



**UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE
ESTRUCTURAS HIPE RESTÁTICAS CON
BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE
LAS FUERZAS Y ROTACIONES**

Autor:

Carlos Lujé **C.I.:**84.613.479

Urb. Yuma II, calle N° 3. Municipio San Diego

Teléfono: (0241) 8714240 (master) – Fax: (0241) 8712394



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
CARRERA: INGENIERÍA CIVIL

**MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPER
ESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS
FUERZAS Y ROTACIONES.**

Proyecto del Trabajo de Grado para optar al título de
INGENIERO CIVIL

Autor:

Carlos Luje C.I.: 84.613.479

Tutor:

Prof. Luis Francisco Rodríguez

San Diego, junio del 2023



ACTA DE APROBACIÓN

INFORME FINAL DE PASANTÍA

TRABAJO DE GRADO

El jurado designado por la Facultad de Ingeniería para la evaluación del Informe Final de Pasantía o Trabajo de Grado titulado: Manual de Análisis y Cálculo de Estructuras Hiper Estáticas con Pielas, Basado en los métodos de los fuerzas y rotaciones

Realizado por el (la) Br. Carlos Luján

C.I. N° 84613479 cursante de la carrera de Ingeniería Civil

hace constar después de analizar su contenido y oída la exposición oral, considera que el Informe Final o Trabajo de Grado ha obtenido la calificación de:

APROBADO

NO APROBADO

El Jurado

[Signature]
Tutor Académico (Coordinador)
Nombre: Carlos Rodríguez
C.I. 65148806

[Signature]
Jurado Ana Hernández C.
Nombre: Ana Hernández
C.I. 20.229913

[Signature]
Jurado
Nombre: Juan Pérez
C.I. 25 985 736

Fecha: 03/07/23





REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

**CONSTANCIA DE APROBACIÓN PARA LA PRESENTACIÓN
PÚBLICA DEL TRABAJO DE GRADO**

Quien suscribe, Ing. Luis Francisco Rodríguez López, portador de la cédula de identidad N° V 15.148.806, en mi carácter de tutor del trabajo de grado presentado por el ciudadano Lujé Poveda Carlos Danilo, portador de la cédula de identidad N° E84.613.479, titulado **Manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.**, presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Civil, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En San Diego, a los 16 días del mes de junio del año dos mil veintitrés.

Ing. Luis Francisco Rodríguez

C.I: 15.148.806



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DECANATO DE INGENIERÍA

FI L 012 2022-2CR TG

Valencia, 08 de junio de 2022

Ciudadano:
LUJE POVEDA, CARLOS DANILO
84.613.479
Presente -

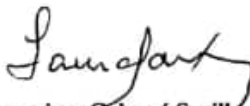
Cumplo con informarle que la comisión de Trabajo de Grado y Pasantías de la Facultad de Ingeniería en su reunión N° 6-2022 de fecha 12/05/2022 aprobó el proyecto de grado titulado:

Manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.

Presentado por usted como requisito para optar al título de Ingeniero Civil

Se ratifica la designación del Tutor Académico que lo asesorará en el desarrollo de este proyecto a:
Ing. Luis Francisco Rodríguez López, titular de la cédula de identidad V- 15.148.806

Atentamente

P/ 
Dr. Francisco Gelanzé Sevilla.
Decano de Ingeniería



c.c. Coordinación de Pasantías y Trabajo de Grado

AGRADECIMIENTOS

En este documento y en el trabajo de grado de investigación realizado han colaborado otras personas que es de justicia mencionar pues sin su ayuda, seguramente no habría sido posible llevarlo a término.

En primer lugar, quiero mostrar mi agradecimiento a mi tutor de tesis el Ingeniero **Luis Francisco Rodríguez**, y a la Ingeniera **Ana Hernández**, que han sido al mismo tiempo, una guía constante en esta investigación con sus aportes y conocimientos, que han hecho posible el que yo esté optando al título como Ingeniero Civil.

Además, agradezco a mis padres **Carlos Alejandro Luje y Marlene Poveda** por el apoyo incondicional, como a mis hermanos **Andrés Quezada, Johana Luje y Paula Luje**, mi sobrina **Emili Quezada**, por su cariño, apoyo y consejos, siendo el motivo de mi superación y dedicación constante. Como a toda mi familia, por siempre escucharme y estar conmigo en todo momento.

También doy las gracias al resto de profesores que me han dado las mejores enseñanzas a lo largo de la carrera y que me han otorgado los conocimientos y quiero hacer mención, el Ing. **Ángel Medina**, el profesor Ing. **Manuel Figueira**, La profesora **Ing. Emerly Castillo**, la profesora **Ing. Jutzy Herrada**, **Ing. Johan Mogollón**, **Ing. Fredy Lanza**, la profesora **Ing. Zhandra Lopez**, todos ellos que con su orientación me han dado sus mejores enseñanzas.

A nuestra alma mater la **Universidad José Antonio Páez**, por abrirme las puertas para estudiar la carrera, por los conocimientos adquiridos y por la educación como profesional de la nación.

A todos mis amigos, conocidos y compañeros que han aportado sea con un consejo u observación en el camino de mi formación profesional.

Por último, agradezco a **Dios** por siempre ser mi guía en este camino que con tanto sacrificio he cumplido.

A todos ustedes, ¡GRACIAS!
Carlos Danilo Luje Poveda

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo de grado en primer lugar, a mi madre **Marlene Poveda** y mi padre **Carlos Alejandro Luje**, que son las persona de mi admiración, desde pequeño me ha formado con valores, respeto, cariño y amor, me otorgaron sus enseñanzas de vida, me han formado como una persona humilde y responsable, y en este capítulo de mi vida, mis padres me han impulsado en los obstáculos más fuertes que se dieron entorno a mis estudios, así, en esta faceta que estoy por culminar, quiero dedicarles este trabajo de grado, y decir que gracias a sus consejos y aliento de seguir adelante, he finalizado este capítulo en mi vida.

Además, dedico este trabajo de grado a mis hermanos **Andrés Quezada, Johana Luje y Paula Luje**, como mi sobrina **Emili Quezada**, por brindarme sus mejores deseos en este camino, porque siempre están conmigo a pesar de la distancia, siempre me han dado el aliento para seguir adelante y porque son las personas que amo con todo mi corazón.

También quiero hacer una dedicación muy especial a mi primo **Santiago Damián Castellanos**, por el recuerdo que idealizo con tanto cariño, el apoyo y la amistad, donde se encuentre, decirle que este trabajo se lo dedico en su memoria.

Por último, dedico este trabajo al país que me vio nacer y al país que me acogió, como a toda mi familia, primos y amigos que en todo este tiempo no pude estar de forma presente con ellos, pero siempre estaba de forma espiritual.

Carlos Danilo Luje Poveda

ÍNDICE

CONTENIDO	pp.
ÍNDICE DE FIGURAS	x
ÍNDICE DE TABLAS	x
ÍNDICE DE CUADROS	xi
ÍNDICE DE GRÁFICAS	xii
RESUMEN	xiii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO	
I EL PROBLEMA.....	3
1.1 Planteamiento del Problema.....	3
1.2 Formulación del Problema.....	4
1.3 Objetivos de la Investigación.....	4
1.3.1 Objetivo General.....	4
1.3.2 Objetivos Específicos.....	4
1.4 Justificación.....	5
1.5 Alcance y Limitaciones.....	6
II MARCO TEÓRICO.....	7
2.1 Antecedentes.....	7
2.2 Bases Teóricas.....	9
2.2.1 Aprendizaje significativo.....	9
2.2.2 Estrategia didáctica.....	10
2.2.3 Manual como herramienta de aprendizaje.....	10
2.2.4 Objetivos de un manual.....	11
2.2.5 Elementos estructurales bidimensionales.....	12
2.2.6 Elementos estructurales tridimensionales.....	12
2.2.7 Elementos de una estructura.....	13
2.2.8 Solicitaciones.....	13
2.2.9 Vínculos de un sistema estructural.....	14
2.2.10 Nudo o Junta.....	16
2.2.11 Reacciones de un sistema estructural.....	16
2.2.12 Grados de libertad.....	17
2.2.13 Deformada de una estructura.....	17
2.2.14 Sistemas hipo estáticos.....	17
2.2.15 Sistema isostático.....	17
2.2.16 Sistema hiper estático.....	18
2.2.17 Trabajo virtual.....	18

2.2.18 Método de las fuerzas.....	18
2.2.19 Método de desplazamiento.....	18
2.2.20 Método de rotaciones.....	19
2.3 Bases Legales.....	19
2.4 Definición de Términos básicos.....	20
III MARCO METODOLÓGICO.....	22
3.1 Enfoque.....	22
3.2 Tipo de Investigación.....	22
3.3 Nivel de la Investigación.....	23
3.4 Diseño de la Investigación.....	23
3.5 Población y Muestra.....	24
3.5.1 Población.....	24
3.2.2 Muestra.....	24
3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	24
3.6.1 Instrumento.....	25
3.7 Validez y confiabilidad.....	26
3.8 Técnica de análisis de datos.....	26
3.9 Fases de la Investigación.....	27
IV RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	
4.1 Diagnóstico del conocimiento previo de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez sobre el análisis y cálculo de las estructuras hiperestáticas con bielas	30
4.1.1 Prueba Diagnóstica en Resistencia de Materiales	31
4.1.2 Prueba Diagnóstica en Introducción al Análisis Estructural ...	34
4.1.3 Prueba Diagnóstica en Estructuras (I)	37
4.1.4 Prueba Diagnóstica en Estructuras (II)	41
4.1.5 Prueba Diagnóstica en Fundaciones y Muros	45
4.1.6 Prueba Diagnóstica en Proyectos de Concreto Armado	48
4.2 Contenido Programático correspondiente a las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiperestáticas ...	53
4.2.1 Matriz FODA	53
4.2.2 Información suministrada por los expertos	54
4.3 Desarrollo del manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas	60
CONCLUSIÓN	62
RECOMENDACIONES	64

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65
APÉNDICE	
A. Entrevista estructurada	70
B. Verificación de entrevista estructurada	72
C. Verificación de prueba diagnóstica	81
D. Manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas ..	89

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA		pp.
1	Sistema de referencia de una viga bidimensional	12
2	Sistema de referencia de una viga tridimensional	12
3	Componentes de una estructura	13
4	Tipos de solicitaciones estructurales	13
5	Clasificación de vínculos estructurales	14
6	Representación de una junta de concreto	16
7	Deformación de una viga empotrada	17

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA		pp.
1	Cálculo de reacciones estudiantas de resistencia de materiales.....	31
2	Diagrama de fuerza cortante, estudiantas de resistencia de materiales	32
3	Punto de Inflexión, estudiantas de resistencia de materiales ...	32
4	Diagrama de Momento flector, estudiantas de resistencia de materiales	33
5	Grados de Indeterminación, estudiantas Introducción al análisis estructural	34
6	Grados de Indeterminación, Estudiantas Introducción al análisis estructural	35
7	Diagrama de Fuerza Cortante, Estudiantas Introducción al análisis estructural	35
8	Punto de Inflexión, Estudiantas Introducción al análisis estructural	36
9	Diagrama de Momento Flector, Estudiantas de Introducción al análisis estructural	37
10	Grados de Indeterminación, Estudiantas de Estructuras (I)...	38
11	Reacciones del Sistema, Estudiantas de Estructuras (I)	38
12	Diagrama de Fuerza de Cortante, Estudiantas de Estructuras (I)	39

13	Diagrama de Fuerza de Cortante, Estudiantes de Estructuras (I)	40
14	Diagrama de Momento Flector, Estudiantes de Estructuras (I).	40
15	Grados de Indeterminación, Estudiantes de Estructuras (II) ...	41
16	Reacciones del Sistema, Estudiantes de Estructuras (II)	42
17	Diagrama de Corte, Estudiantes de Estructuras (II)	43
18	Punto de Inflexión, Estudiantes de Estructuras (II)	43
19	Diagrama de Momento Flector, Estudiantes de Estructuras (II)	44
20	Grados de Indeterminación, Estudiantes Fundaciones y muros.	45
21	Reacciones del Sistema, Estudiantes Fundaciones y muros ...	46
22	Diagrama de Fuerza Cortante, Estudiantes Fundaciones y muros	46
23	Punto de Inflexión, Estudiantes Fundaciones y muros	47
24	Diagrama de Momento Flector, Estudiantes Fundaciones y muros	48
25	Grados de Indeterminación, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado	49
26	Reacciones del Sistema, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado	49
27	Diagrama de Fuerza Cortante, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado	50
28	Punto de Inflexión, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado	51
29	Diagrama de Momento Flector, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado	51

ÍNDICE DE CUADROS

CUADRO	pp.
1 Factores que inciden para resolver estructuras hiperestáticas	22
2 Total, de estudiantes evaluados	30
3 Cuadro comparativo de Entrevista a Ingenieros Civiles expertos	54

ÍNDICE DE GRÁFICAS

GRÁFICAS	pp.
1 Rendimiento reacciones	31
2 Rendimiento diagrama de corte	32
3 Rendimiento Punto de Inflexión	33
4 Rendimiento Diagrama de momento flector	33
5 Rendimiento Grados de Indeterminación	34
6 Rendimiento Reacciones del Sistema	35
7 Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante	36
8 Rendimiento Punto de Inflexión	36
9 Rendimiento Diagrama de Momento Flector	37
10 Rendimiento Grados de Indeterminación	38
11 Rendimiento Reacciones del Sistema	39
12 Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante	39
13 Rendimiento Punto de Inflexión	40
14 Rendimiento Diagrama de Momento Flector	41
15 Rendimiento Grados de Indeterminación	42
16 Rendimiento Reacciones del Sistema	42
17 Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante	43
18 Rendimiento Punto de Inflexión	44
19 Rendimiento Diagrama de Momento Flector	44
20 Rendimiento Grados de Indeterminación	45
21 Rendimiento Reacciones del Sistema	46
22 Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante	47
23 Rendimiento Punto de Inflexión	47
24 Rendimiento Diagrama de Momento	48
25 Rendimiento Grados de Indeterminación	49
26 Rendimiento Reacciones del Sistema	50
27 Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante	51
28 Rendimiento Punto de Inflexión	51
29 Rendimiento Diagrama de Momento Flector	52
30 Rendimiento de reacciones por semestre	53
31 Rendimiento diagrama de corte por semestre	53
32 Rendimiento punto de inflexión por semestre	54
33 Rendimiento diagrama de momento flector por semestre	54
34 Rendimiento grado de indeterminación de una estructura por semestre.	55



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIVIL

**MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPER
ESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS
FUERZAS Y ROTACIONES**

Autor: Carlos Lujé

Tutor: Ing. Luis Francisco Rodríguez

Fecha: Junio, 2023

RESUMEN

El presente trabajo de grado plantea el desarrollo de un manual de análisis y cálculo de estructuras en la Universidad “José Antonio Páez”. El manual propone ayudar a los estudiantes en la resolución de problemas de cálculo estructural y transmitir el beneficio al utilizar este tipo de prácticas en relación con los temas presentados en las asignaturas de cálculo estructural de la Universidad José Antonio Páez. Para el logro de los objetivos planteados se hará uso de la metodología de fuerzas y rotaciones en el cálculo estructural. Dicho manual se desarrolla con metodologías de análisis estructural como principio de trabajo virtual, asociado a los métodos de las fuerzas y rotaciones. El estudio llevado a cabo obedece a una investigación de tipo proyecto especial, descriptivo, documental y de campo, con metodología cualitativa, se aplicarán la Revisión Documental, la Entrevista, Encuestas, Test académico, Observación Directa. Se encuentra inmerso en la línea de investigación ciencias cognitiva y aplicada. El estudio realizado plasma reforzar varios conceptos en el campo de vínculos, diagramas para fuerzas internas de elementos estructurales, despiece de una estructura, deformaciones de una estructura, así como efectos de asentamientos y temperatura.

Descriptor: Manual de cálculo, estructuras, mejora continua.



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIVIL

**MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS
HIPERESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS
FUERZAS Y ROTACIONES**

Autor: Carlos Luje

Tutor: Ing. Luis Francisco Rodríguez

Fecha: Junio, 2023

ABSTRACT

The present work of degree proposes the development of a manual of analysis and calculation of structures at the University "José Antonio Páez". The manual proposes to help students in the resolution of structural calculation problems and to transmit the benefit of using this type of practices in relation to the subjects presented in the structural calculation courses of the Universidad José Antonio Páez. To achieve the proposed objectives, the methodology of forces and rotations in structural calculation will be used. This manual is developed with methodologies of structural analysis as a principle of virtual work, associated to the methods of forces and rotations. The study carried out obeys to a special project type research, descriptive, documentary and field research, with qualitative methodology, Documentary Review, Interview, Surveys, Academic Test, Direct Observation will be applied. It is immersed in the research line of cognitive and applied sciences. The study carried out reinforces several concepts in the field of links, diagrams for internal forces of structural elements, exploded views of a structure, deformations of a structure, as well as settlement and temperature effects.

Descriptors: Calculation manual, structures, continuous improvement.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el cálculo estructural sigue avanzando a pasos agigantados, con todo tipo de metodologías y programas que otorgan una mayor precisión en los resultados, mejorando los procesos constructivos, así, el ingeniero civil debe tener un conocimiento básico en el análisis y cálculo de estructuras para saber interpretar estos resultados que se dan en los distintos lenguajes de software estructural.

Por otro lado, se ha notado una escasa bibliografía en libros de cálculo estructural y páginas web de contenido científico, en los métodos de resolución de estructuras hiper estáticas con bielas y la enseñanza de este tipo de estructuras es limitado, dificultando el entendimiento en los estudiantes de la Escuela de Ingeniería civil de la Universidad José Antonio Páez.

Con base en las consideraciones anteriores, el objetivo del proyecto es desarrollar una manual de análisis y cálculo estructural enfocado a estructuras hiper estáticas que posean vínculos con bielas, mejorando la comprensión de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, en la asignatura de cálculo estructural, y sean capaces de resolver problemas de estructuras hiper estáticas con bielas, para demostrar su aplicación en la vida cotidiana, reforzando sus conocimientos a través de dicho manual, logrando así, un mejor desempeño los estudiantes.

Cabe señalar que el proyecto se presentará en una estructura de cuatro capítulos de la siguiente manera:

Capítulo I El Problema: Este capítulo describe el problema existente, el objetivo principal del proyecto: “Elaborar un manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.”, al igual que los objetivos generales y específicos, además de la justificación.

Capítulo II Marco Teórico: Capítulo en el que se destacan los antecedentes, bases teóricas y definición de términos en las que se basa el proyecto.

Capítulo III Marco Metodológico: Capítulo en el cual se da a conocer el tipo, nivel, diseño, enfoque, población, muestra, técnicas e instrumentos de recolección de datos, técnicas de análisis y las fases metodológicas que se utilizarán para desarrollar este proyecto.

Capítulo IV Resultados de la Investigación: En este capítulo se presentan todos los resultados de la investigación de acuerdo a las pruebas diagnósticas tomadas a estudiantes de la facultad de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, para evaluar el conocimiento previo, así como las materias que involucra la resolución de estructuras hiper estáticas con empotramiento móvil, para presentar el manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas, reforzando los conocimientos previos en integrales definidas, clasificación de vínculos, grados de indeterminación de una estructura, despiece de una estructura, fuerzas internas axial, cortante y momento flector, trabajo virtual, Ley de Hook , condición de temperatura y asentamientos en vigas y columnas, flexibilidad, rigidez , ley de Maxwell, condición de signos de acuerdo a resistencia de materiales.

Finalmente, el método de las fuerzas y rotaciones aplicado a estructuras con bielas internas como externas.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

1.1. Planteamiento del Problema

El cálculo estructural, es un proceso que el hombre ha llevado a cabo desde tiempos antiguos, con la finalidad de satisfacer una necesidad, llevando a cabo la planificación y el diseño, con la seguridad que requiere la construcción de cualquier edificación, el hecho de no tomar ese aspecto a la ligera, ha permitido minimizar en su mayoría el riesgo al colapso abrupto de estas bajo ciertas condiciones, es decir, en el transcurso de estos años, se han mejorado los métodos de cálculo y análisis a utilizar a nivel estructural y como consecuencia, estamos rodeados de una gran variedad de construcciones que, en algún momento se creían imposibles, por la complejidad en el diseño y el reto que representaba, por mencionar algunas de estas estructuras se tiene: la Torre Eiffel, la Gran Muralla China, el coliseo Romano, las pirámides de Egipto, el canal de Panamá, el puente Golden Gates en San Francisco, entre otras.

Actualmente, existen programas que ayudan al proyectista a realizar los cálculos de forma más rápida y precisa, pero el profesional a cargo debe ser capaz de interpretar los resultados obtenidos del programa, e identificar errores y proponer de manera asertiva el diseño estructural que se ajuste a la necesidad del proyecto, sea éste de hidráulica, vialidad, urbano, o saneamiento ambiental, en general cualquier rama de la ingeniería en donde se requiera una estructura.

Conocer, que estructuras se pueden aplicar y cuales son más efectivas a la hora de elegir un proyecto, tomando en cuenta el uso de la obra, los fenómenos naturales, y los costos que representan, es de vital importancia, conocer el análisis estructural que se va a establecer en la obra, tal es el caso de las estructuras hiper estáticas con bielas, de las cuales la información o bibliografía referente a la metodología y resolución de cálculo, es escasa, por ejemplo, los libros convencionales de cálculo estructural: Fundamentos de análisis estructural autor: Kenneth M. Leet; Cálculo Estructural autor;

Manuel Gasch Salavador; Análisis Estructural autor: Aslam Kassimali,; Análisis Estructural autor: R.C Hibbeler; Análisis de Estructuras Métodos Clásico y Matricial autor: Juan Camilo Molina Villegas; Análisis Estructural autor: Amaya Pérez del Palomar y José Cegoñino, no cuentan con el procedimiento para resolver estructuras hiper estáticas con bielas, así como, las páginas web de consulta científica o búsqueda de libros de interés como Academia, Online Computer Books y Scribd.

Este vacío, en los conceptos de cálculo estructural para el diseño con bielas, específicamente en los alumnos que egresan de la Universidad José Antonio Páez, si bien, mantienen bases en análisis estructural, respecto a este tipo de vinculación, poseen un bajo entendimiento, lo que a su vez se traduce en la pérdida de oportunidades laborales. El proceso de cálculo mencionado no cuenta con sistemas metodológicos resueltos, así, se necesita una implementación que se pueda evidenciar, el cálculo, la metodología, el proceso, y la toma de resultados, ayudando a los estudiantes en la comprensión de estos, y en la formación de criterios, con bases sólidas, como futuros ingenieros civiles.

1.2 Formulación del Problema

De acuerdo con lo planteado anteriormente, se formula la siguiente interrogante: ¿De qué manera se puede suministrar información sobre estructuras hiperestáticas con bielas, a estudiantes y/o docentes de la rama estructural de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez?

1.3 Objetivos de la Investigación

1.3.1 Objetivo General

Elaborar, un manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Diagnosticar el conocimiento previo de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, sobre el análisis y cálculo de las estructuras hiperestáticas con bielas.

- Determinar el contenido programático correspondiente a las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiperestáticas.
- Desarrollar un manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas que incluya una metodología de acuerdo con los lineamientos estructurales, clara y precisa.

1.3. Justificación de la Investigación

El acelerado avance tecnológico hace necesario que los profesionales, especialmente los egresados de la Universidad José Antonio Páez se encuentren capacitados para afrontar diseños en los cuales se presente el mecanismo de bielas en su vinculación, integrando de esta manera los conocimientos adquiridos desde mecánica racional, resistencia de materiales hasta análisis estructural y que sin mayor complicación se pueda realizar el análisis y cálculo de la estructura.

Si bien los profesores llevan a cabo un arduo trabajo transmitiendo sus conocimientos a los estudiantes, esto no es suficiente, ya que en el caso de las bielas es escaso el material disponible para estudiar y llevar a la vida real el uso o comportamiento de este tipo de vinculación; a causa de este vacío se plantea la elaboración de un manual de estructuras hiperestáticas con bielas aplicando una metodología clara y precisa con la finalidad de guiar a los estudiantes que se encuentran cursando los cursos de estructuras en la Universidad José Antonio Páez.

Por otro lado, para lograr analizar y resolver este tipo de sistemas es importante dominar conocimientos en cálculos: como reacciones de una estructura, tipos de vínculos, grados de libertad, despiece de un sistema estructural, obtención de diagramas de fuerza cortante, fuerza axial y momento en una estructura, trabajo virtual, entre otros cálculos que se necesitarán. Por ello, se implementará una introducción para que el lector pueda tener bases y lograr un entendimiento en la resolución de este tipo de sistema estructural.

Adicionalmente, la investigación permitirá poner en práctica los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera universitaria como mecánica racional, resistencia de

materiales, introducción al análisis estructural, estructuras I y estructuras II, entre otros. Con lo que se pretende dejar un manual que ayude a los estudiantes de la Universidad José Antonio Páez que deseen cursar futuros cursos de estructuras abarcando una metodología dinámica, eficiente, de fácil entendimiento y permita favorecer sus capacidades en el estudio de temas estructurales que pueden ser complejos, pero que con dedicación y preparación se pueden dominar.

Así mismo tiene como propósito, formar parte de un apoyo a las nuevas investigaciones que se hagan sobre el tema, que permitirá desarrollar teorías simplificadas basadas en el análisis y diseños en la vida real bajo los estándares de seguridad requeridos durante su vida útil, así como su condición de operabilidad; y servirá como guía para quienes quieran proponer o diseñar estructuras con el mecanismo de bielas externas o internas.

1.4. Alcance

El alcance de esta investigación, se enmarca en la elaboración de un manual detallado, de la metodología para el análisis y cálculo de estructuras estáticamente indeterminadas con bielas, que abarcan las materias de mecánica racional, resistencia de materiales, introducción al análisis estructural, estructuras I y estructuras II, para los estudiantes del de la rama estructural de la Escuela de Ingeniería Civil en la Universidad José Antonio Páez, así brindar apoyo y soporte a los estudiantes al incorporar tópicos y conceptos básicos de las materias necesarias para lograr resolver estructuras hiper estáticas con bielas.

Esta investigación, se limitará a correlacionar los vacíos académicos de las materias, referente al análisis de estructuras indeterminadas con el mecanismo de bielas relacionando con estructuras reales, ya construidas, para plantear una metodología que garantice la facilidad, comprensión, análisis, calculo y diseño de este tipo de estructuras hiperestáticas.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes.

Para poder realizar el presente trabajo de grado se tomará en cuenta diversa información en trabajos anteriores con el objetivo primordial de plasmar una base procedimental, metodológica y técnicas además de servir como una guía para elaborar las actividades de este trabajo de grado. Según El Manual Para La Elaboración Y Presentación De Los Anteproyectos, Proyectos De Trabajo De Grado, Trabajos De Grado, Tesis Doctoral E Informe De Pasantías Y Extramuros De La Universidad José Antonio Páez (Páez, 2020) señala que “Se trata de la revisión de investigaciones previa relacionadas de manera directa o indirecta con la investigación planteada” (p.21).

Al contemplar la metodología sobre manuales en el proceso de aprendizaje y enseñanza, se encuentran estudios como Peña Osmar (2019). En su trabajo de grado titulada “**Método de estudio: memoria contextual**”, para optar por el título profesional en Derecho en la Universidad Central de Venezuela en el aporte de esta investigación es claro que las situaciones por las que pasamos hoy en día nos exigen que las habilidades de procesar la información sean más decisivas que en cualquier otra época y constantemente nos hacemos la pregunta de cómo mejorar la memoria. La información acumulada sobrepasa la capacidad de memoria, por lo que resulta necesaria la implementación de habilidades para aplicar con eficacia los aprendizajes. Mostrando la importancia de tener una metodología que facilite la comprensión de un determinado tema.

Dentro de este mismo contexto se encuentra la tesis de Mirka Csoban (2018). En su trabajo de grado titulada “**Efecto del contexto y de la información falsa en el aprendizaje y el recuerdo**”; para optar por el título de Licenciado en Ciencias de la Educación en la Universidad Católica Andrés Bello en el aporte a esta investigación,

han sido objeto de considerable investigación en los últimos 50 años. Una creciente literatura sigue acumulándose para mostrar que nueva información que se agrega luego de presenciar un evento puede cambiar el recuerdo del evento original. De forma más crítica, si la información agregada es engañosa o falsa, causa distorsión del recuerdo al punto que las personas llegan a considerar la información falsa como verdadera.

Abarcando un poco el área de Ingeniería, se cuenta con el manual realizado por Yépez Fabricio (2016). En su trabajo de grado titulado **“Guía práctica para el diseño de estructuras de hormigón armado de conformidad con la Norma Ecuatoriana de la Construcción NEC 2015”** para optar por el título de Ingeniero Civil en la Universidad Politécnica Salesiana en el aporte a esta investigación donde se implanta la guía y norma para la edificación de estructuras de concreto armado en Ecuador, siendo un apoyo teórico y práctico que facilita a la hora de ejecutar una metodología de cálculo. Esta guía práctica con el presente, poseen similitud ya que ambos poseen una metodología apta, dirigible y sencilla para facilitar el entendimiento del futuro profesional y así afianzar el aprendizaje, bases de cálculo y teorías obtenidos previamente.

Siendo más puntuales sobre el uso de manuales dentro de la carrera de ingeniería civil se encuentra el trabajo de Mejías Rosalba y Ramos Ahinara (2011). En su trabajo de grado **“Diseño de un manual de análisis matricial de las estructuras ajustado al programa de la carrera de ingeniería civil de la Universidad de Carabobo”** para optar por el título de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo sirve el aporte a esta investigación como objetivo, la elaboración de un manual, para la resolución de estructuras mediante el método matricial y de esta manera permitir a los estudiantes y docentes afianzar los conocimientos adquiridos de una manera organizada, didáctica y de fácil comprensión. La relación con el presente trabajo de grado resulta casi directa, puesto que la problemática que se presenta en este caso era similar a la que se presenta en la actualidad, al requerir un manual que proporcione una metodología que sirva a estudiantes y profesores como base de estudio de estructuras.

Finalmente, Camejo Johan y Rodríguez Yuletsy (2016). En su trabajo de grado **“Diseño de un material didáctico para la introducción al análisis estructural mediante el método de elementos finitos adaptado a la unidad curricular de estructuras avanzadas”** para optar por el título de ingeniería Civil en la Universidad de Carabobo, orienta el aporte a esta investigación para el diseño y cálculo de sistemas estructurales hiper estáticos con el propósito de contribuir con los conocimientos impartidos de una manera práctica y entendible, mediante una serie de imágenes, tablas, problemas ilustrativos e información importante para la resolución partiendo de teoremas de cálculo estructural referente a los temas más significativos de los temas antes mencionados. Por ende, este trabajo de grado sirvió de referencia para concretar en el presente, los conceptos fundamentales y más sobresalientes para el cálculo estructural hiper estático con bielas.

2.2 Bases Teóricas

2.2.1 Aprendizaje significativo

En la actualidad se requiere que un ingeniero esté en la capacidad plena de sus habilidades para analizar, evaluar, criticar y solucionar diversos problemas que se presenten, como lo menciona la Maestra de Pedagogía Romero Trenas (2009). En su trabajo investigativo **“El aprendizaje significativo”**, se refiere a que el proceso de construcción de significados es el elemento central del proceso de enseñanza / aprendizaje. El alumno aprende un contenido cualquiera cuando es capaz de atribuirle un significado. (p.02). Dentro de este marco, se encuentra la actividad del docente como facilitador de estrategias para crear un entorno de institución en donde los estudiantes logren entender lo que se está aprendiendo. Así que, más que memorizar hay que comprender. Al referirnos por aprendizaje significativo se tienen:

- Los conocimientos previos han de estar relacionados con aquellos que se quieren adquirir de manera que funcionen como base o punto de apoyo para la adquisición de conocimientos nuevos.

- El aprendizaje significativo puede producirse mediante la exposición de los contenidos por parte del docente o por descubrimiento del estudiante interesado.
- Requiere una participación del estudiante donde la atención se centra en él como se adquieren los aprendizajes.
- Al hablar de aprendizaje significativo y aprendizaje mecanicista no son dos tipos opuestos de aprendizaje, sino que se complementan durante el proceso de enseñanza.
- Para la promoción de dicho aprendizaje es necesario proporcionar retroalimentación productiva para guiar el aprendizaje e infundirle una motivación intrínseca, proporcionar familiaridad, explicar mediante ejercicios académicos, guiar el proceso cognitivo y fomentar las estrategias de aprendizaje.

2.2.2 Estrategia didáctica

De acuerdo con Campusano Cataldo y Díaz Olivos (2017). La estrategia didáctica son procedimientos organizados que tienen una clara formalización / definición de sus etapas y se orientan al logro de los aprendizajes esperados. A partir de la estrategia didáctica, el docente orienta el recorrido pedagógico que deben seguir los estudiantes para construir su aprendizaje. (p.02). En otras palabras, el manual se presenta como el soporte de los conocimientos y de las técnicas que en un momento dada una sociedad necesita para la perpetuación de los conceptos plasmados.

2.2.3 Manual como herramienta de aprendizaje

Un repaso en la historia del primer manual que se elaboro fue según García Saldaña (2015). “El primer manual de estilo básico fue elaborado por un centro académico y no por un medio de comunicación: The Chicago Manual of Style, publicado en noviembre de 1906 por la Universidad de Chicago Press. Este primer manual, que se distribuyó a un precio de cincuenta centavos de dólar, tuvo alrededor de 200 páginas. Así, el manual ha sido ampliado, reeditado y corregido en los años sucesivos y hoy está disponible en su decimosexta edición, publicada en el 2010.” (p.17).

En la actualidad es una metodología de aprendizaje y enseñanza que orienta de forma clara y organizada como señala Programa Nacional de educación España (2006). consiste en que su utilidad no sólo es aplicable al aula y a los estudiantes, sino que también es aplicable a cualquier persona, ya que todos nos encontramos en un continuo proceso de aprendizaje y conocer qué estilo prevalece en nosotros nos da una vía para perfeccionar la manera en que aprendemos y de desarrollar aquellos estilos que no hemos ejercitado. (p.01).

2.2.4 Objetivos de un manual

De acuerdo con Pérez Mendoza (2016). Posibilitan el diseño metodológico, clasifican y eficientizan el proceso educativo, permiten la determinación de contenidos, recursos, Técnicas e instrumentos de evaluación y estrategias de aprendizaje. (p.02).

De esta manera podemos inferir que el manual permite:

- Identificar la secuencia de los contenidos a impartir.
- Hacer una distribución equitativa de dichos contenidos.
- Establecer los procedimientos para ejecutar las distintas actividades en relación con el puesto de trabajo.
- Determinar los conocimientos técnicos pertinentes al desarrollo de las actividades a cumplir.
- Servir de medio de evaluación del lector.

Así los manuales permiten a los estudiantes lo siguiente:

- a) Revisar las unidades de instrucción tantas veces como le sea necesario.
- b) Realizar consultas durante el desarrollo.
- c) Identificar los conocimientos técnicos necesarios para la ejecución de las actividades u operaciones.
- d) Conocer cada uno de los diferentes pasos para la ejecución de las actividades que tendrán que realizar.
- e) Realizar su autoevaluación.
- f) Enriquecer el vocabulario técnico.

g) Reforzar los conocimientos y destrezas adquiridos.

h) Finalmente subrayar los puntos o áreas que más le interesan.

2.2.5 Elementos estructurales Bidimensionales

Son elementos estructurales como vigas, columnas, losas, juntas y vínculos en los apoyos que se analizan en un plano de referencia para tener una visualización de las secciones, se muestra en la figura 1, tal como el plano cartesiano se consideran coordenadas (x, y) (x, z) (y, z) .

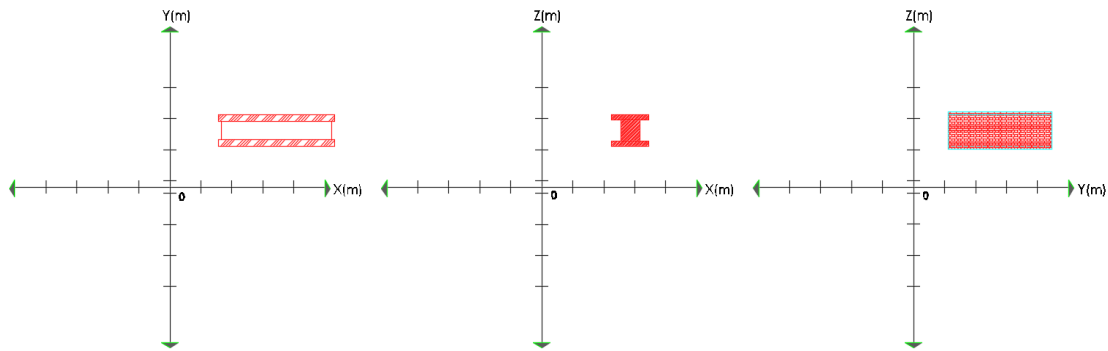


Figura.1. Sistema de referencia de una viga bidimensional.

Fuente autor. Lujé, C. (2022).

2.2.6 Elementos estructurales Tridimensionales

Son elementos estructurales como vigas, columnas, pantallas, juntas y vínculos que se analizan en un plano de referencia como el plano cartesiano, su análisis se establece en coordenadas (x, y, z) . Como se muestra en la figura 2, es un análisis que permite la visualización de las solicitaciones en una viga simplemente apoyada.

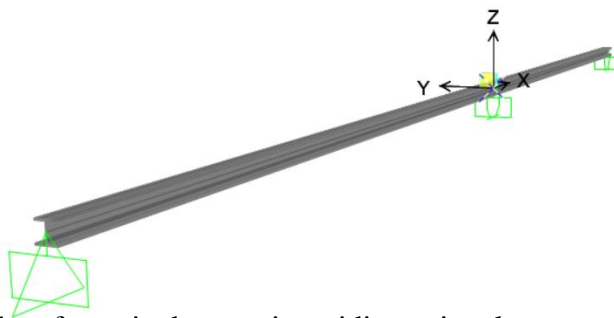


Figura.2. Sistema de referencia de una viga tridimensional.

Fuente autor. Lujé, C. (2022).

2.2.7 Elementos de una estructura

Se consideran como elementos los apoyos, franjas, resortes, nodos o juntas, vigas, correas y columnas, componentes de una infraestructura como lo muestra la figura 3, que cumplen con la función de brindar estabilidad a la super estructura.

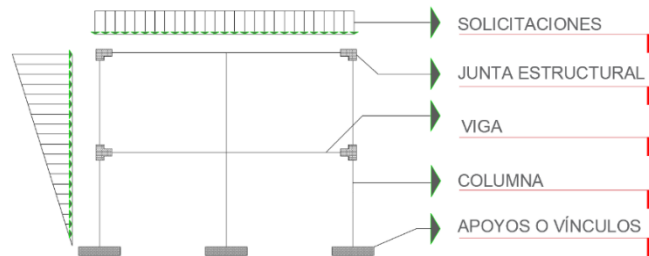


Figura.3. Componentes de una estructura.

Fuente autor. Luje, C. (2022).

2.2.8 Solicitaciones

Las solicitaciones son fuerzas que se generan debido a una carga muerta, carga viva, movimiento sísmico, y viento, representadas en la figura 4, estas ocasionan una transición de energía por todos sus miembros de la estructura hasta sus fundaciones y de ellas al suelo. Además, señala Canet Miquel (2012). Las tensiones, deformaciones y movimientos, en una estructura formada por piezas lineales, pueden ser calculadas utilizando los principios y desarrollos generales de la elasticidad. Es decir, que diferentes sistemas de acciones o cargas que produzcan los mismos esfuerzos darán lugar a tensiones y deformaciones iguales. (p.62).

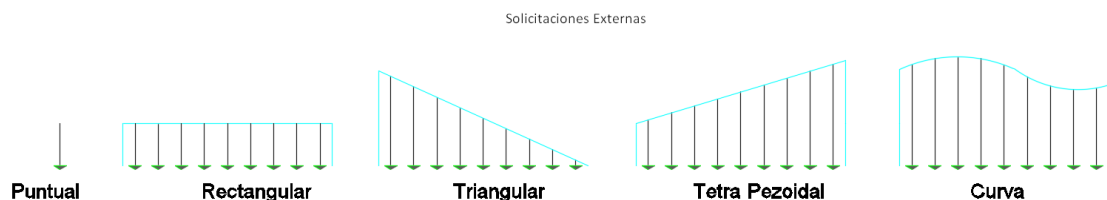


Figura 4. Tipos de Solicitaciones estructurales.

Fuente autor. Luje, C. (2022).

2.2.9 Vínculos de un sistema estructural

Son los pilares que sostienen a una super estructura, se los conoce como cimientos, apoyos o un lenguaje más técnico como vínculos estructurales como se muestra en la figura 5, estos elementos tienen la característica de tener una interacción directa con el suelo y son capaces de transmitir grandes cargas del sistema. De acuerdo con Cervera Ruíz y Blanco Díaz (2015) “se llama apoyo a todo dispositivo destinado a unir una estructura al medio de sustentación” (p.74). Los apoyos cumplen la función de:

1. Impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura
2. Limitar la deformación que sufre
3. Transmitir las cargas que soporta la estructura al medio de sustentación

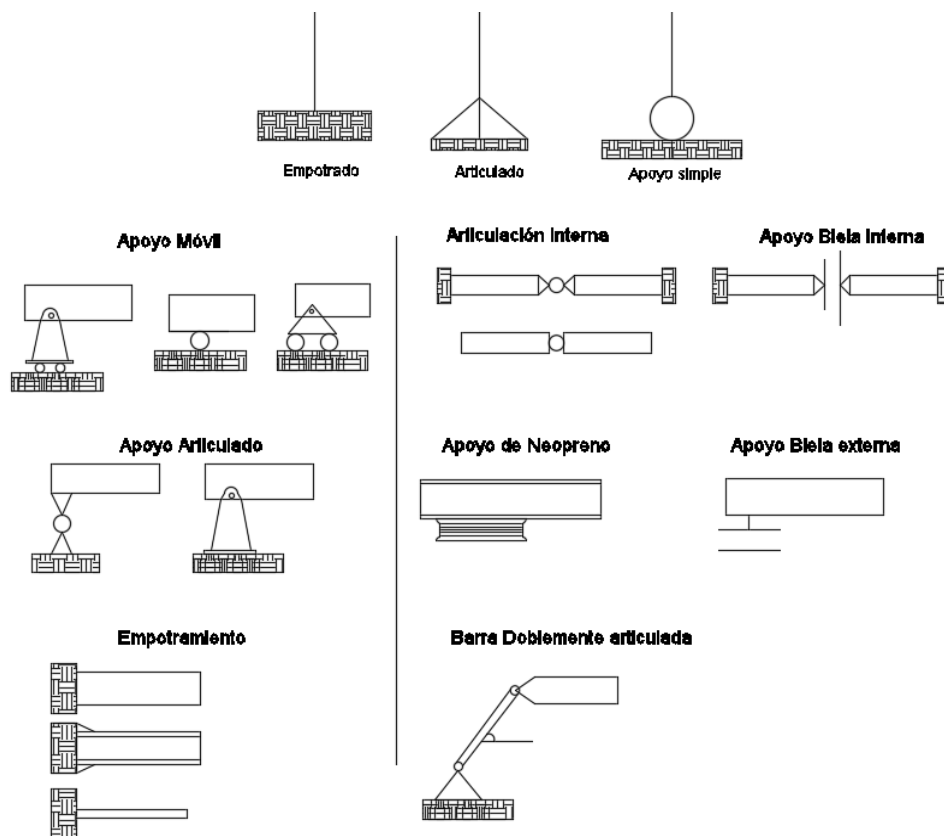


Figura 5. Clasificación de vínculos estructurales.

Fuente Luján, C. (2022).

- **Apoyo simple o articulado móvil**

Es un tipo de apoyo, que sólo restringe el movimiento de traslación en una dirección de la sección de apoyo, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de apoyo como se muestra en la figura 5. La reacción que produce es una fuerza perpendicular a la dirección de rodadura, en otras palabras, al movimiento permitido.

- **Apoyo fijo o articulación**

Este tipo de apoyo impide totalmente el movimiento de traslación de la sección de apoyo, pero permite el giro, como se muestra en la figura 5. La reacción que produce es una fuerza de dirección y módulos desconocidos. Se introducen, dos incógnitas, las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendicular.

- **Empotramiento**

Este tipo de apoyo impide todo el movimiento de la sección de apoyo, tanto de traslación como de giro, la reacción que se produce es una fuerza de posición, dirección y módulo desconocidos como se muestra en la figura 5. Se generan tres incógnitas, dos componentes de la reacción y el momento sobre la sección de apoyo.

- **Articulación o nudo articulado**

Este tipo de enlace llamado nudo articulado, es el que une entre sí las distintas barras de una estructura articulada se muestra en la figura 5. También puede darse ocasionalmente en una estructura de barras de otra tipología. Se suele representar con un círculo sobre el nudo.

- **Bielas o Empotramiento móvil**

Es un tipo de apoyo que se impone en un elemento de viga o columna, ocasionando el desplazamiento en dirección de la abertura de esta y se restringe el movimiento en dirección perpendicular a la disponible, respecto al momento permite la transición de miembro a miembro conectadas por este sistema. Se muestra en la figura 5.

- **Perno**

Es un vínculo que se emplea para restringir el paso de momento de un miembro a otro se muestra en la figura 5, este suele permitir el paso de fuerzas cortantes, a su vez suele ubicarse en el centro de un pórtico.

2.2.10 Nudo o junta

Se llama junta, nudo o enlace a todo dispositivo destinado a unir entre sí las diferentes piezas que forman una estructura las cuales pueden ser de acero, madera, concreto armado como se muestra en la figura 6, para su fácil comprensión se utiliza la representación en líneas estos cumplen la función de:

- Impedir o limitar los movimientos relativos de unas piezas respecto a otras
- Transmitir las cargas que unas soportan a las demás.

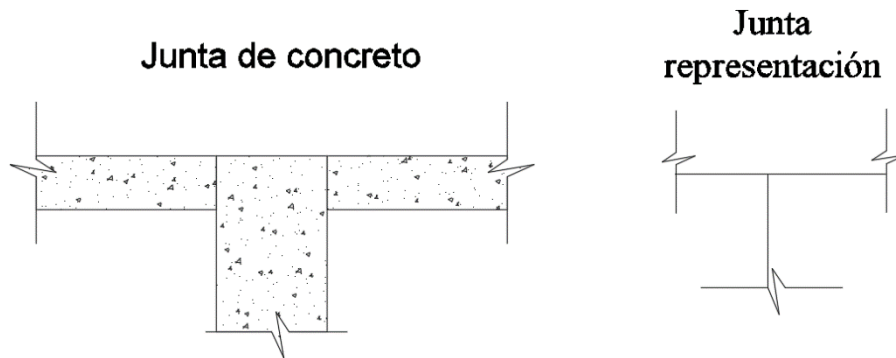


Figura.6. Representación de una Junta de concreto.

Fuente: Lujé, C. (2022).

2.2.11 Reacciones de un sistema estructural

Son fuerzas que se tornan debido a las cargas de la estructura o solicitaciones, éstas son las que se deben identificar haciendo uso de las distintas metodologías para el cálculo estructural de acuerdo con el tipo de sistema estructural estos pueden ser:

1. Sistemas hipo estáticos
2. Sistemas isostáticos
3. Sistemas hiperestáticos

2.2.12 Grados de libertad

Es una condición o hipótesis para identificar si se encuentra en movimiento una estructura y es capaz de desplazar sus miembros estructurales en conjunto, se puede obtener esta condición para determinar, el tipo de análisis que se debe emplear para resolver la estructura establecida según el uso de esta y sus solicitaciones, partiendo del equilibrio o identificando sus restricciones.

2.2.13 Deformada de una estructura

Es la deformación que puede tener una viga, columna, placa de fundación, diafragmas o losas, y nodos de acuerdo con las solicitaciones como se muestra en la figura 7, esta deformada es importante para comprender el método de pendiente deflexión y sus concatenaciones.

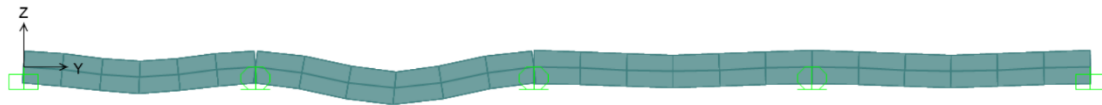


Figura.7. Deformación de una viga empotrada.

Fuente: Lujé, C. (2022).

2.2.14 Sistemas hipo estático

Estructuras que poseen más que 1 grado de libertad, son estructuras inestables debido a que poseen mayor movimiento, se debe mantener una precaución a la hora de elegir el tipo de sistema estructural y su configuración.

2.2.15 Sistemas isostáticos

Son sistemas que se encuentran en equilibrio es posible determinar todas las leyes de esfuerzos en cada punto utilizando únicamente los recursos de la estática estos son:

- Fuerza axial igual a cero.
- Fuerza cortante igual a cero.
- Fuerzas de momento flector igual a cero.

2.2.16 Sistemas hiper- estáticos

Son sistemas que se encuentran restringidos sus movimientos, sus grados de libertad son menores que cero, este tipo de estructuras se encuentran en la mayoría de los casos en la vida real, para resolver este tipo de estructuras se tiene:

1. Método de las fuerzas
2. Métodos de pendiente deflexión o deformaciones
3. Método de rotaciones
4. Método de Cross
5. Método de los tres momentos
6. Teorema de los polos
7. Trabajo virtual.
8. Ecuaciones de Mohr

2.2.17 Trabajo virtual

Es un método de cálculo que permite la resolución de estructuras hiper estáticas, haciendo uso de una carga virtual en sus apoyos, convirtiendo el sistema estructural en un sistema isostático resoluble, y evidenciando un método de cálculo para dos sistemas, el primario y el secundario generado por una carga virtual.

2.2.18 Método de las Fuerzas

Es un método conocido como de la flexibilidad, por los coeficientes que aparecen en el proceso de cálculo, se emplea para resolver estructuras hiper estáticas ya que se necesita más que las ecuaciones por estática, también a las ecuaciones suplementarias de deformación. Tales incógnitas son aplicadas como cargas exteriores sobre la estructura inicial. De esta forma, la estructura original se transforma en una estructura isostática. Se puede entender según Cervera Ruíz y Blanco Díaz (2004) “Es un método integral general para calcular movimientos eficaces de fuerzas reales que actúan sobre las estructuras. Así mismo, proporciona una herramienta válida para resolver estructuras hiperestáticas”. (p.122).

2.2.19 Método de desplazamientos o pendiente deflexión

Son las posibilidades de desplazamientos de dichas juntas de acuerdo con la vinculación existente. Para su resolución se emplea sistemas auxiliares como el sistema

principal Q-q, el sistema secundario R-r y el sistema complementario P-p o conocido como q-q en otros libros.

El análisis se realiza de acuerdo con el giro en las juntas partiendo del sistema Q-q, el cual es una matriz que está generada por la rotación en la junta, el desplazamiento en dirección Y, el desplazamiento en dirección x, así como todas las juntas del sistema respectivamente. Los miembros de una estructura son capaces de sufrir rotaciones como cuerpos rígidos de acuerdo con su vinculación existente tanto interna como externa. Estas rotaciones dependen por tanto de los desplazamientos de la estructura como cuerpos rígidos y son independientes de las rotaciones que, como cuerpo elástico, puedan sufrir las juntas de la estructura.

2.2.20 Método de rotaciones

Este método es más simplificado, derivado del método de desplazamientos, permite el análisis por matrices analizando las rotaciones que se generan en las juntas cumpliendo con las propiedades de resistencia de materiales.

2.3 Bases Legales

En la legislación venezolana vigente existen una serie de disposiciones que conforman la base legal, permite garantizar el disfrute del conocimiento con fines educativos o apoyar alguna de las actividades que el ciudadano realiza como parte de sus actividades ordinarias. Por lo que La Ley Universitaria (1960), por su parte, señala en su artículo 3:

“Las Universidades deben realizar una función rectora en la educación, cultura y la ciencia. Para cumplir esta misión, sus actividades se dirigirán a crear, asimilar y difundir el saber mediante la investigación y la enseñanza; a complementar la formación integral iniciada en los ciclos educacionales anteriores; y a formar los equipos profesionales y técnicos que necesita la Nación para su desarrollo y progreso”. (p.1)

Este artículo señala la importancia para impulsar el desarrollo en las Universidades mediante herramientas que fortalezcan el entendimiento, la investigación y los métodos de aprendizaje para crecer como profesionales en los ámbitos académicos y personales. De igual forma la Ley Orgánica de Ciencia y Tecnología (LOCTI) (2001). Estipula en el artículo 3:

“Forman parte del Sistema Nacional de Ciencia, Tecnología e innovación, las instituciones públicas o privadas que generen y desarrollen conocimientos científicos y tecnológicos y procesos de innovación, y las personas que se dediquen a la planificación, administración, ejecución y aplicación de actividades que posibiliten la vinculación efectiva entre la ciencia, la tecnología y la sociedad. A tal efecto, forman parte del sistema: 1. El ministerio de Ciencia y Tecnología, sus organismos adscritos y las entidades tuteladas por éstos, o aquellas en las que tengan participación. 2. Las instituciones de educación superior y de formación técnica, academias nacionales, colegios profesionales, sociedades científicas, laboratorios y centros de investigación y desarrollo, tanto público como privado. 3. Los demás organismos públicos y privados que se dediquen al desarrollo, organización, procesamiento, tecnología e información. 4. Los organismos del sector privado, empresas, proveedoras de servicios, insumos y bienes del capital, redes de información y asistencia que sean incorporadas al Sistema. 5. Las personas que, a título individual o colectivo, realicen actividades de ciencia, tecnología e innovación”, (p.1).

Con este artículo se concluye que se resalta la importancia de la gestión de los recursos de información por parte de las instituciones de educación superior, fuera de si son de orden público o privado, cabe señalar que estos se encuentran integrados en el Sistema Nacional de Ciencia y Tecnología, para lo cual se considera necesario, con base en el desarrollo y generación de conocimientos científicos y tecnológicos sobre los procesos de innovación y el compromiso con la planificación, gestión, implementación y aplicación de las diversas actividades que engloban la ciencia, los avances tecnológicos y la sociedad de la que se originan y retornan.

2.4 Definición de términos básicos

Apoyo Neopreno: Es un tipo de apoyo estructural que no tiene permitido la traslación vertical y si tiene permitido la traslación horizontal y la rotación.

Bielas: Las bielas son elementos de una estructura capaces de permitir el movimiento en una dirección, pero restringen otra.

Estructura: Es un sistema estructural compuesto por vigas, columnas, nodos, losas y fundaciones, su uso es capaz de brindar estabilidad y seguridad a la población.

Fuerza axial: Fuerza que se encuentra a tracción o compresión en dirección paralela a una viga, correa o columna estructural.

Fuerza cortante: Fuerza que se encuentra perpendicular al miembro estructural como viga, correa o columna.

Hipostático: Es el grado de inestabilidad de un sistema estructural.

Hiperestáticos: Es la restricción total de los elementos estructurales, y se emplea, en las edificaciones habituales.

Isostáticos: Es el grado de equilibrio de un sistema estructural.

Junta o Nudo: Parte de la unión de una viga con una columna, capaz de transmitir la energía acumulada por las solicitaciones.

Momento Flector: Fuerza que se genera por la acumulación de las fuerzas por sus distancias respecto a un punto de referencia o punto para determinar el momento en ese punto, se considera la acumulación de energía que se puede generar.

Pendiente deflexión: Método de cálculo para estructuras que no se pueden resolver por la estática, se emplea analizando el desplazamiento de los miembros de la estructura.

Sistema Q-q: Sistema de coordenadas generalizadas de un sistema estructural.

Sistema R-r: Sistema de coordenadas secundarias de los nodos de un sistema estructural.

Sistema P-p: Sistema complementario de una viga o columna de un sistema estructural.

Trabajo Virtual: Sistema de cálculo que permite asumir una carga virtual de cualquier valor, se toma la unidad.

Vínculo: Es el tipo de apoyo que se coloca en la estructura para transmitir la carga recibida hacia el suelo.

2.5 Cuadro de Operacionalización de Variables.

Objetivo Específico	Variables	Definición	Técnicas
<p>Diagnosticar el conocimiento previo de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, sobre el análisis y cálculo de las estructuras hiperestáticas con bielas.</p>	<p>Situación actual de análisis y cálculo esencial de estructuras básicas, en los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez.</p>	<p>Se entiende como análisis esencial a las estructuras que se pueden resolverse aplicando las ecuaciones de estática, suma de fuerzas vertical, horizontal y momento flector.</p>	<p>- Prueba Diagnóstica - Revisión Documental</p>
<p>Determinar el contenido programático correspondiente a las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiperestáticas.</p>	<p>Contenido programático correspondiente a la resolución de estructuras isostáticas e hiperestáticas.</p>	<p>Son todas las materias que permiten el cálculo de estructuras estáticas (determinadas o en equilibrio) como estructuras hiperestáticas (indeterminadas).</p>	<p>- Entrevista Estructurada - Cronograma de actividades</p>
<p>Desarrollar un manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas que incluya una metodología de acuerdo con los lineamientos estructurales, clara y precisa.</p>	<p>Elaboración de un Manual estructural</p>	<p>Se entiende como Identificar los problemas en análisis estructural y reforzar los conocimientos previos con una metodología clara.</p>	<p>Elaborar un Manual de Análisis y Cálculo de estructuras hiper estáticas.</p>

Cuadro 1: Factores que inciden para resolver estructuras hiperestáticas.

Fuente: Luje, C. (2022).

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Enfoque

El enfoque, que tiene esta investigación, es de tipo cuantitativo, ya que refleja la necesidad de medir y estimar magnitudes de los fenómenos o problemas de investigación, De acuerdo con (Collaguazo, 2017) señala que:

“El enfoque cuantitativo es secuencial y probatorio. Cada etapa precede a la siguiente y no podemos brincar o eludir pasos. El orden es riguroso, aunque desde luego, podemos redefinir alguna fase. Parte de una idea que va acotándose y, una vez delimitada, se derivan objetivos y preguntas de investigación, se revisa la literatura y se construye un marco o una presentación teórica. De las preguntas se establecen hipótesis y determinan variables; se traza un plan para probarlas (diseño); se miden las variables en un determinado contexto; se analizan las mediciones obtenidas utilizando métodos estadísticos, y se extrae una serie de conclusiones respecto de la o las hipótesis.” (p. 04).

3.2. Tipo de Investigación

Esta investigación se encuentra enmarcada dentro del prototipo de investigación tecnicista, en la modalidad de proyecto especial, puesto que busca el desarrollo con la aplicación técnica del investigador en la solución de una situación problemática de orden práctico. Según El Manual Para la Elaboración Y Presentación De Los Anteproyectos, Proyectos De Trabajos De Grado. Trabajos De Grado, Tesis Doctoral E Informe De Pasantías Y Extramuros De La Universidad José Antonio Páez (2020), señala que un proyecto especial de grado:

“Son trabajos que conllevan a la creación de objetos tangibles, para ser usados como solución a problemas, intereses o necesidades demostradas. Para Trabajos de Grado contemplan tres fases: diagnóstico y/o establecimiento de la necesidad, un estudio de factibilidad operativa, técnica y económica (costo – beneficio y/o mercadeo) y desarrollo de la propuesta”. (p.13).

3.3. Nivel de la Investigación

De acuerdo con Valderrama (2017). “Según su naturaleza o profundidad, el nivel de una investigación se refiere al grado de conocimiento que posee el investigador en relación con el problema, hecho o fenómeno a estudiar. De igual modo cada nivel de investigación emplea estrategias adecuadas para llevar a cabo el desarrollo de la investigación”. (p.42). Por tanto, la profundidad con el que se abordará el evento de estudio, en este caso será descriptiva ya que el presente proyecto se pretende abordar los problemas de los estudiantes que poseen a la hora de resolver estructuras hiper estáticas.

3.4. Diseño de la investigación.

De acuerdo con El Manual, señala que una investigación de campo y documental orientado a un diseño de investigación:

“Se entenderá por investigación de campo, el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo”. (p.10).

Ya que no hay manipulación deliberada de las variables y en los que se observan los fenómenos en su ambiente natural para después analizarlos.

Por otro lado, El Manual, también señala:

“El estudio de problemas con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo, principalmente en trabajos previo, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos”. (p.12).

Teniendo en cuenta que todos los datos necesarios para la construcción del manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas se va a obtener directamente del estado actual del sistema educativo presente en la Universidad José Antonio Páez, necesarios para definir aspectos como requisitos funcionales y no funcionales del sistema, métodos de cálculo, datos estadísticos, entre otros, por lo tanto, se considera que el diseño de la investigación es de campo.

3.5 Población y Muestra

3.5.1 Población

De acuerdo con Arias (2016), la población “Es un conjunto finito o infinito de elementos con características comunes para los cuales serán extensivas las conclusiones de la investigación. Esta queda delimitada por el problema y por los objetivos del estudio”. (p.81). Debido a que este trabajo tiene como objeto de estudio para el desarrollo de un manual de cálculo y análisis de estructuras hiper estáticas para la guía de estudiantes y profesores, la población está presentada por los estudiantes y profesores de la Escuela de Ingeniería Civil en la Universidad José Antonio Páez.

3.5.2 Muestra

Conforme con Arias (2016) indica que la muestra “Es un subconjunto representativo y finito que se extrae de la población accesible” (p.83). La muestra, por tanto, está conformada por los estudiantes del 5to, 6to, 7mo, 8vo 9no y 10mo semestre de la universidad José Antonio Páez que cursan la carrera de ingeniería civil.

3.6 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Según Arias, F. (2016) “las técnicas de recolección de datos son las distintas formas o maneras de obtener la información” (p.111). Tenga en cuenta que las técnicas son de procedimiento, por lo que al desarrollar la encuesta se utilizarán las siguientes técnicas e instrumentos de recolección de datos. En primer lugar, el uso se hará mediante compilación, que Torrealba y Rodríguez (2009) definen como “La recopilación documental es un instrumento o técnica de investigación general cuya finalidad es obtener datos e información a partir de fuentes documentales con el fin de ser utilizados dentro de los límites de una investigación en concreto.”, en definitiva, se trata de una revisión bibliográfica de las distintas fuentes cuya información puede ser aplicable o necesaria en una encuesta.

Según el autor Zapata (2006). define encuestas como “un conjunto de técnicas destinadas a reunir, de manera sistemática, datos sobre determinado tema o temas relativos a determinada población, a través de contactos directos o indirectos con los individuos o grupos de individuos que integran la población estudiada” (p.189)

De acuerdo con la Comisión Internacional de Pruebas (2014) define “las pruebas o test, como procedimientos o métodos que evalúan la presencia de un factor o fenómeno que comprende un conjunto de ítems (preguntas, estímulos o tareas) que se puntúan de forma estandarizada y se utilizan para examinar y posiblemente evaluar las diferencias individuales en aptitudes” (p.03). Por lo que se implantará una prueba para verificar los conocimientos básicos de las materias que se necesitan emplear, antes de calcular estructuras hiper estáticas.

Finalmente, está la entrevista que Vargas (2012) define como “Una conversación considerada, como el arte de realizar preguntas y escuchar”. Por supuesto, este es un diálogo entre un investigador y una persona relacionada con el tema. Esto le da la ventaja de que el entrevistado es relevante para el tema y que la información que pueda brindar será la base de la investigación, que se aplicará para lograr una serie de requisitos y características de un Manual como la planteada en esta investigación la cual permitirá mejorar la eficiencia en la gestión de la investigación.

3.6.1 Instrumento

Para Chávez (2007) señala “los instrumentos de investigación son los medios que utiliza el investigador para medir el comportamiento o atributos de las variables. Entre ellos se pueden mencionar: los cuestionarios, entrevistas y escalas de clasificación, entre otros.” (p.173). Por lo tanto, se planteará una entrevista a los docentes de la rama estructural de la Escuela de Ingeniería Civil, que llevará preguntas de las materias de análisis estructural, que consideran pertinentes para lograr una inserción de los estudiantes con el método de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, y los problemas que pueden notar, por parte de los estudiantes, éstos se encontrarán en la sección de anexos.

Finalmente, se diseñará una (1) evaluación o prueba diagnóstica de análisis estructural, de una viga simplemente apoyada con diferentes tipos de cargas, para verificar si existe la comprensión y entendimiento de conceptos básicos, como reacciones, despiece de una estructura, diagramas de fuerza axial, cortante y momento

flector, principio de equilibrio, que deben poseer para la resolución de estructuras hiperestáticas.

3.7 Validez y Confiabilidad

Según, la autora Landeau (2007) define la validez como “el grado en que el instrumento proporciona datos que reflejen realmente los aspectos que interesan estudiar.” (p.81).

Así mismo, la autora Landeau (2007) define la confiabilidad como “el grado con el cual el instrumento prueba su consistencia, por los resultados que produce al aplicarlo repetidamente al objeto de estudio.” (p.81).

En este orden de ideas, la validez de los instrumentos será obtenida mediante un proceso de validación de contenido, el cual consiste en la evaluación por parte de tres (3) expertos en el área de ingeniería, pertenecientes a la cátedra de estructuras de la Facultad de Ingeniería Civil en la Universidad José Antonio Páez.

3.8 Técnica de Análisis de Datos

Según el autor Vidal (2009) define la técnica de análisis de datos como “La sección de ciertos criterios haciendo referencias en herramientas como, tipo de métrica de las variables utilizadas, cualitativas y cuantitativas” (p.13).

Así mismo, según lo define el autor Tamayo y Tamayo (2006) “una vez recopilados los datos por los instrumentos diseñados para este fin, es necesario procesarlos, es decir, elaborarlos matemáticamente, ya que la cuantificación y su tratamiento estadístico nos permitirán llegar a conclusiones” (p.187).

La información recabada mediante la aplicación de la entrevista estructurada será procesada utilizando una tabulación de comparación de opinión de profesionales expertos, realizada en el programa Microsoft Excel, donde en forma de columna se colocarán las preguntas y en cada fila se colocarán los ítems para obtener con mayor confiabilidad los porcentajes y de esta manera llegar a los resultados de forma inmediata.

Hay que mencionar, los resultados que se pretenden obtener a partir de la aplicación de la prueba diagnóstica serán analizados, concretamente su distribución de frecuencias presentadas en tablas y gráficos sinópticos.

De igual forma, se obtendrán resultados de la prueba diagnóstica, para comprobar el conocimiento que poseen los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil, para notar su comprensión y entendimiento del proceso de análisis estructural básico que deben tener.

Una vez que se aplicará todos los instrumentos, se pretende obtener una cantidad de información que debe ser ordenada, clasificada y manejada de forma tal, que pueda responder a cada uno de los objetivos de esta investigación, primero se organizará dependiendo de las características de la información y luego se registrarán las técnicas de análisis empleadas por el autor, estas son de tipo cuantitativas ya que nos ponderarán en números las situaciones, solo se apreciarán las condiciones que cumplen o no con el método existente.

3.9 Fases de la Investigación

Fase I: Diagnóstico, del conocimiento previo de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, sobre el análisis y cálculo de las estructuras hiperestáticas con bielas.

El diagnóstico, se aplicará de la prueba diagnóstica para comprender la magnitud de sus conocimientos respecto al análisis de estructuras hiperestáticas con bielas y si cuentan con las herramientas necesarias para resolver estas.

Fase II: Determinar, el contenido programático correspondiente a las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiperestáticas.

En esta fase se analizará si el contenido programático brinda a los estudiantes las bases para lograr resolver estructuras hiperestáticas.

Fase III: Desarrollo del manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas, que incluya una metodología de acuerdo con los lineamientos estructurales, clara y precisa.

Finalmente, en esta fase se dará solución mediante el manual de análisis y cálculo para fortalecer los métodos de cálculo estructural a los estudiantes de la facultad de ingeniería y profesores que deseen una mejor comprensión en el análisis de este tipo de estructuras.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 Diagnóstico del conocimiento previos de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, sobre el análisis y cálculo de las estructuras hiperestáticas con bielas.

Para conocer las condiciones de análisis estructural se plasmó tres (3) pruebas diagnósticas tipo (A), tipo (B) y tipo (C), a estudiantes del quinto (5to), sexto (6to), séptimo (7mo), octavo (8vo), noveno (9no) y décimo (10mo) semestre, en la rama estructural de la Universidad José Antonio Páez para determinar los conocimientos previos que relacionan los temas de las cátedras de resistencia de materiales, introducción al análisis estructural, estructuras (I), y estructuras (II), con la finalidad de reforzar los temas para la aplicación del método de fuerzas como rotaciones enfocado a estructuras con empotramiento móvil o bielas.

Número total de estudiantes evaluado en la catedra de estructuras						
Materias	Resistencia de Materiales	Introducción al Análisis Estructural	Estructuras 1	Estructuras 2	Fundaciones y Muros	Proyectos de Concreto Armado.
Estudiantes por materia	7	11	18	13	11	4
Total, de Estudiantes	64					

Cuadro 2: Total de estudiantes evaluados.

Fuente: Luje, C. (2023).

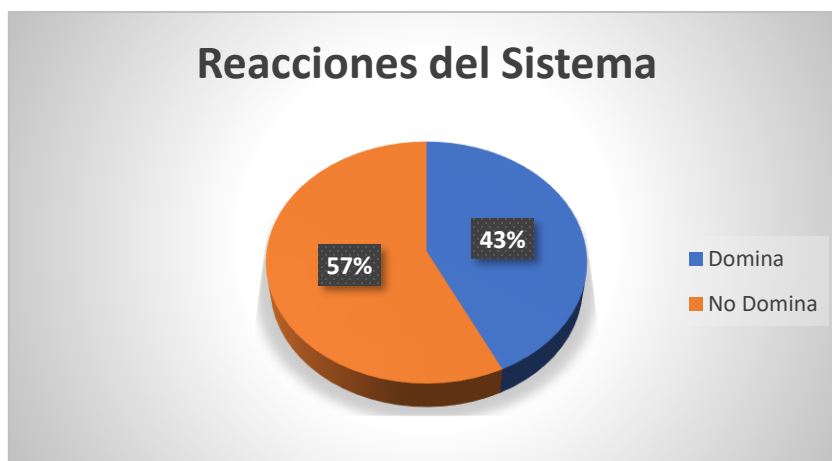
4.1.1 Prueba Diagnóstica en Resistencia de Materiales

La materia de resistencia de materiales aporta conocimientos sobre los principios básicos de la resistencia de materiales, se analiza conceptos de esfuerzo y deformación, La ley de Hook, coeficientes de dilatación térmica para los materiales de construcción, el método de doble integración, condiciones de apoyos, así como los efectos de esfuerzos normales, por ello se planteó una prueba diagnóstica tipo (B) a estudiantes del quinto (5to) semestre de la Universidad José Antonio Páez, para evaluar los temas más principales que vinculan el método de fuerzas y rotaciones para estructuras hiperestáticas, obteniendo los siguientes resultados.

Estudiantes de Resistencia de Materiales		
Estudiantes Totales	Reacciones del sistema	
7	Domina	No Domina
	3	4

Tabla 1: Cálculo de reacciones estudiantes de resistencia de materiales.

Fuente: Lujé, C. (2023).



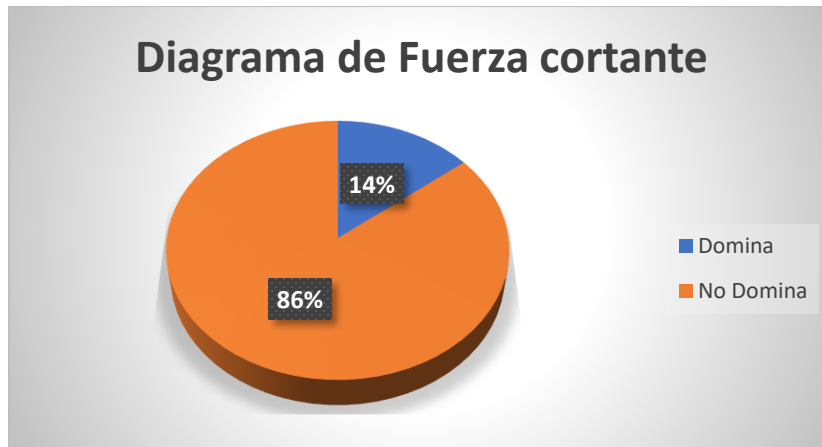
Gráfica 1: Rendimiento reacciones.

Fuente: Lujé, C. (2023).

Estudiantes de Resistencia de Materiales		
Estudiantes Totales	Diagrama de Fuerza cortante	
7	Domina	No Domina
	1	6

Tabla 2: Diagrama de fuerza cortante, estudiantes de resistencia de materiales.

Fuente: Lujé, C. (2023).



Gráfica 2: Rendimiento diagrama de corte.

Fuente: Lujé, C. (2023).

Estudiantes de Resistencia de Materiales		
Estudiantes Totales	Punto Crítico o de Inflexión	
7	Domina	No Domina
	1	6

Tabla 3: Punto de Inflexión, estudiantes de resistencia de materiales.

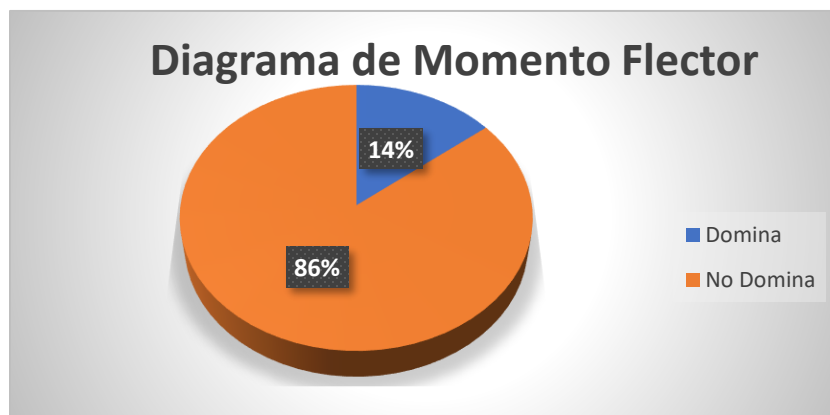
Fuente: Lujé, C. (2023).



Gráfica 3: Rendimiento Punto de Inflexión.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes de Resistencia de Materiales		
Estudiantes Totales	Diagrama de Momento Flector	
	Domina	No Domina
7	1	6

Tabla 4: Diagrama de Momento flector, estudiantes de resistencia de materiales.
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 4: Rendimiento Diagrama de momento flector.
Fuente: Luje, C. (2023).

4.1.2 Prueba Diagnóstica en Introducción al análisis estructural.

El análisis que se emplea en la materia Introducción al análisis estructural, es trabajo virtual, diagrama de corrimiento, como el teorema de los polos, mismo que se imparte en la materia de introducción al análisis estructural, lo que implica, conocer vínculos de una estructura, despiece de una estructura, grado de indeterminación de una estructura, así como los diagramas de fuerzas internas axial, cortante y momento flector, siendo trabajo virtual la más aplicada en el método de las fuerzas, por tanto, se planteó una prueba diagnóstica tipo (B) a estudiantes del sexto (6to) semestre de la Universidad José Antonio Páez, obteniendo los siguientes resultados.

Estudiantes Introducción al Análisis Estructural		
Estudiantes Totales	Grados de Indeterminación	
11	Domina	No Domina
	11	0

Tabla 5: Grados de Indeterminación, estudiantes Introducción al análisis estructural.

Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 5: Rendimiento Grados de Indeterminación.

Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Introducción al Análisis Estructural		
Estudiantes Totales	Reacciones del sistema	
11	Domina	No Domina
	9	2

Tabla 6: Grados de Indeterminación, Estudiantes Introducción al análisis estructural.

Fuente: Luje, C. (2023).



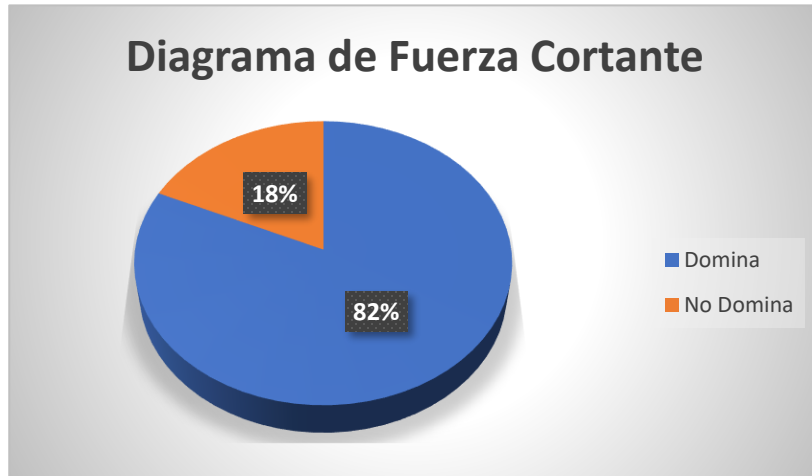
Gráfica 6: Rendimiento Reacciones del Sistema.

Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Introducción al Análisis Estructural		
Estudiantes Totales	Diagrama de Fuerza Cortante	
11	Domina	No Domina
	9	2

Tabla 7: Diagrama de Fuerza Cortante, Estudiantes Introducción al análisis estructural.

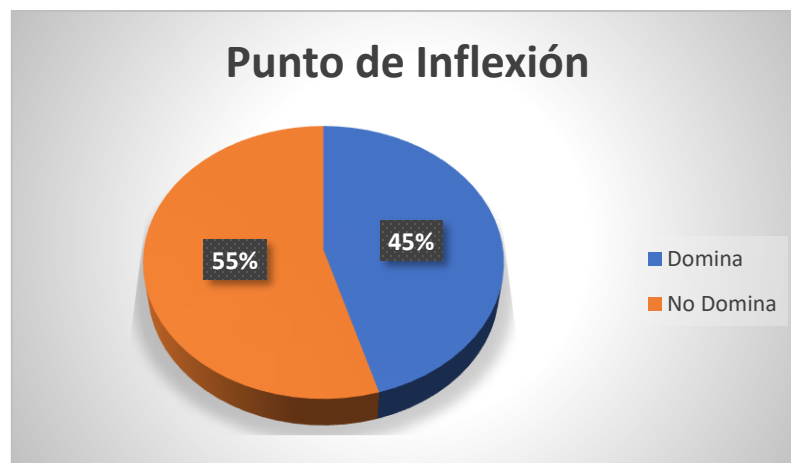
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 7: Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Introducción al Análisis Estructural		
Estudiantes Totales	Punto de Inflexión	
	Domina	No Domina
11	5	6

Tabla 8: Punto de Inflexión, Estudiantes Introducción al análisis estructural.
Fuente: Luje, C. (2023).

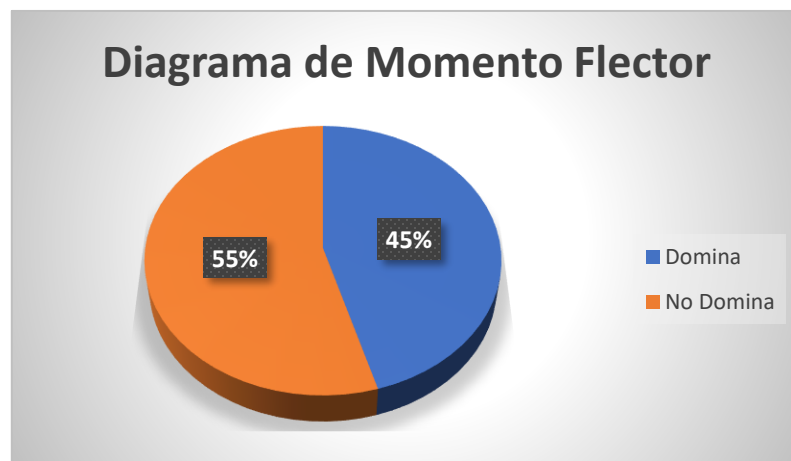


Gráfica 8: Rendimiento Punto de Inflexión.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Introducción al Análisis Estructural		
Estudiantes Totales	Diagrama de Momento Flector	
	Domina	No Domina
11	5	6

Tabla 9: Diagrama de Momento Flector, Estudiantes Introducción al análisis estructural.

Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 9: Rendimiento Diagrama de Momento Flector.

Fuente: Luje, C. (2023).

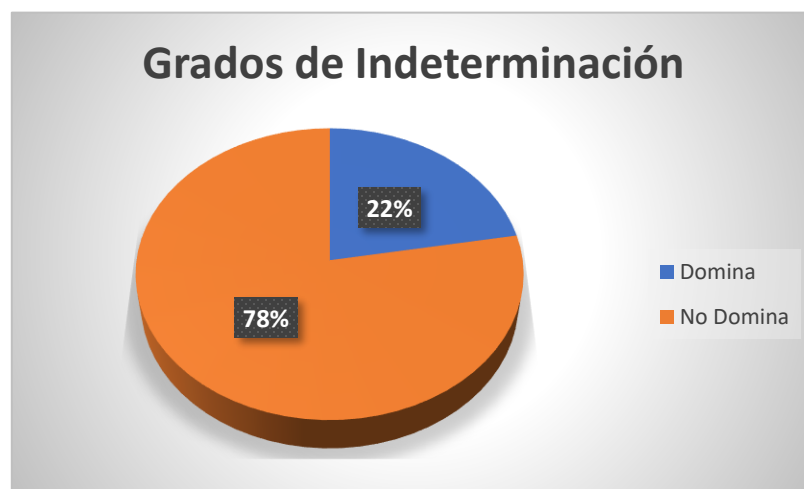
4.1.3 Prueba Diagnóstica en Estructuras (I)

El análisis que se emplea en la materia Estructuras (I), es el método de las fuerzas, método de rotaciones, método de desplazamiento o rigideces, y el método de Cross, siendo la base de cálculo del manual propuesto, por tanto, se planteó una prueba diagnóstica tipo (A) a estudiantes del séptimo (7mo) semestre de la Universidad José Antonio Páez, ya que se debe comprender y dominar estos métodos para interpolarlo hacia los tipos de estructuras con vinculación de empotramiento móvil o bielas, se obtuvieron los siguientes resultados

Estudiantes Estructuras (I)		
Estudiantes Totales	Grados de Indeterminación	
	Domina	No Domina
18	4	14

Tabla 10: Grados de Indeterminación, Estudiantes de Estructuras (I).

Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 10: Rendimiento Grados de Indeterminación.

Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (I)		
Estudiantes Totales	Reacciones del Sistema	
	Domina	No Domina
18	3	15

Tabla 11: Reacciones del Sistema, Estudiantes de Estructuras (I).

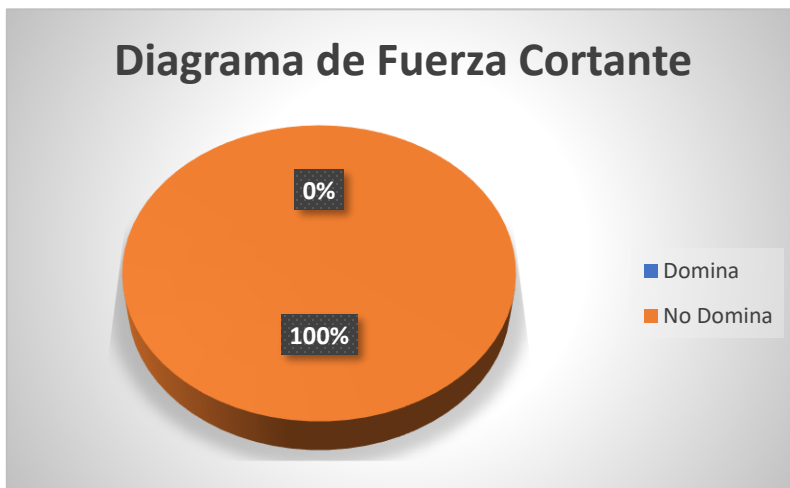
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 11: Rendimiento Reacciones del Sistema.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (I)		
Estudiantes Totales	Diagrama de Fuerza de Cortante	
	Domina	No Domina
18	0	18

Tabla 12: Diagrama de Fuerza de Cortante, Estudiantes de Estructuras (I).
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 12: Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (I)		
Estudiantes Totales	Punto de Inflexión	
	Domina	No Domina
18	0	18

Tabla 13: Diagrama de Fuerza de Cortante, Estudiantes de Estructuras (I).

Fuente: Lujé, C. (2023).



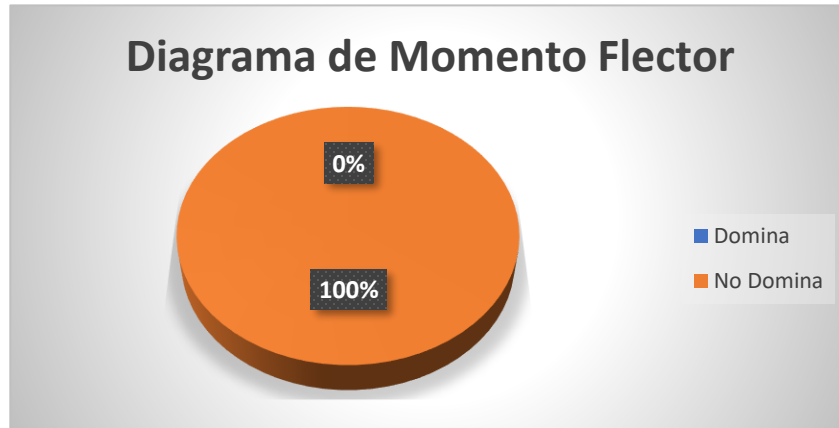
Gráfica 13: Rendimiento Punto de Inflexión.

Fuente: Lujé, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (I)		
Estudiantes Totales	Diagrama de Momento Flector	
	Domina	No Domina
18	0	18

Tabla 14: Diagrama de Momento Flector, Estudiantes de Estructuras (I).

Fuente: Lujé, C. (2023).



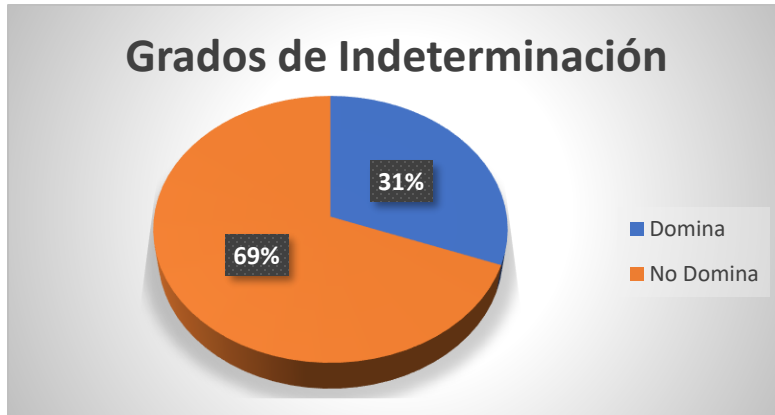
Gráfica 14: Rendimiento Diagrama de Momento Flector.
Fuente: Luje, C. (2023).

4.1.4 Prueba Diagnóstica en Estructuras (II)

En la cátedra de Estructuras II se emplea el método de rotaciones para la resolución de secciones variables, líneas de influencia, trabes y arcos, por lo cual, se puede utilizar una mezcla de secciones variables con bielas, por tanto, se planteó una prueba diagnóstica tipo (A) a estudiantes del octavo (8vo) semestre de la Universidad José Antonio Páez, ya que se debe comprender y dominar este método para interpolarlo hacia los tipos de estructuras con vinculación de empotramiento móvil o bielas con secciones variables, se obtuvieron los siguientes resultados.

Estudiantes Estructuras (II)		
Estudiantes Totales	Grados de Indeterminación	
	Domina	No Domina
13	4	9

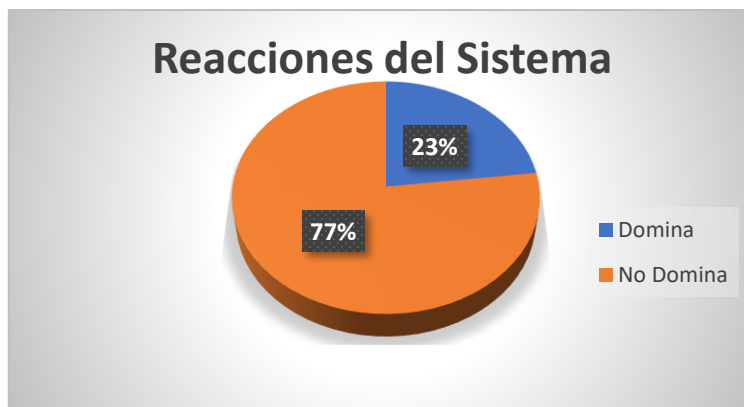
Tabla 15: Grados de Indeterminación, Estudiantes de Estructuras (II).
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 15: Rendimiento Grados de Indeterminación.
Fuente: Lujé, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (II)		
Estudiantes Totales	Reacciones del Sistema	
	Domina	No Domina
13	3	10

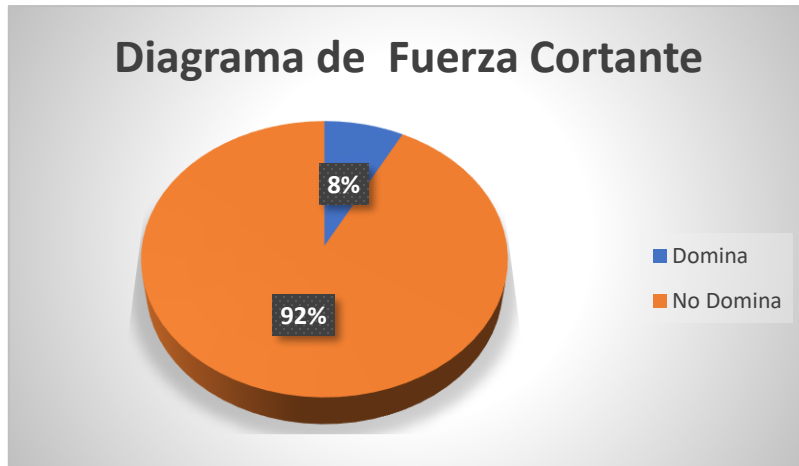
Tabla 16: Reacciones del Sistema, Estudiantes de Estructuras (II).
Fuente: Lujé, C. (2023).



Gráfica 16: Rendimiento Reacciones del Sistema.
Fuente: Lujé, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (II)		
Estudiantes Totales	Diagrama de cortante	
	Domina	No Domina
13	1	12

Tabla 17: Diagrama de Corte, Estudiantes de Estructuras (II).
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 17: Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (II)		
Estudiantes Totales	Punto de Inflexión	
	Domina	No Domina
13	0	13

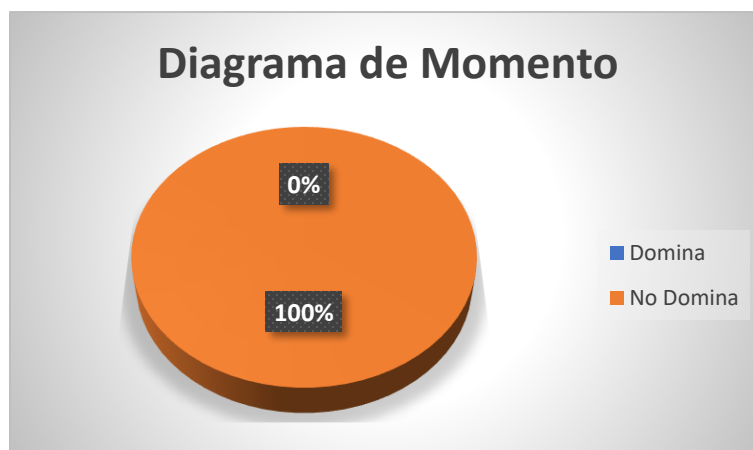
Tabla 18: Punto de Inflexión, Estudiantes de Estructuras (II).
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 18: Rendimiento Punto de Inflexión.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Estructuras (II)		
Estudiantes Totales	Diagrama de Momento	
	Domina	No Domina
13	0	13

Tabla 19: Diagrama de Momento Flector, Estudiantes de Estructuras (II).
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 19: Rendimiento Diagrama de Momento Flector.
Fuente: Luje, C. (2023).

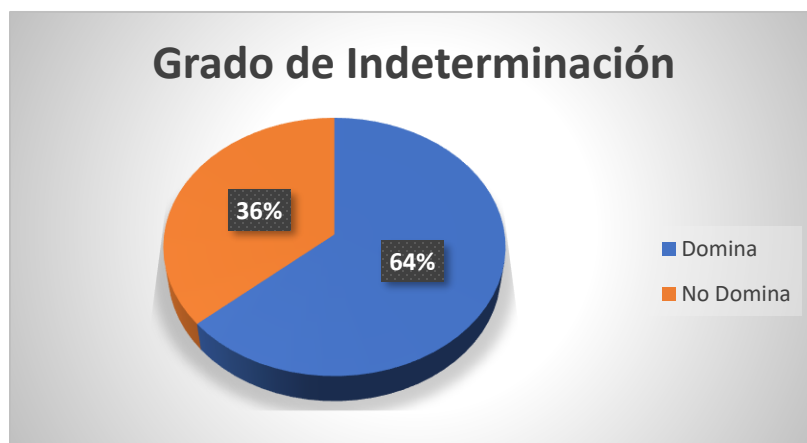
4.1.5 Prueba Diagnóstica en Fundaciones y Muros

La cátedra de fundaciones y muros imparte el diseño en las fundaciones de las cargas provenientes de la super estructura, si vinculamos un sistema estructural con secciones variables con un tipo de vinculación como empotramiento móvil, las solicitaciones externas se van a transmitir hacia estas fundaciones y posterior se realiza su diseño ya sea en zapatas aisladas, rectangulares, trapezoidales, placas de fundación o pilotes, por tanto, es importante conocer el análisis estructural, así, se planteó una prueba diagnóstica tipo (C) a estudiantes del noveno (9no) semestre de la Universidad José Antonio Páez, se obtuvieron los siguientes resultados.

Estudiantes Fundaciones y muros		
Estudiantes Totales	Grados de Indeterminación	
	Domina	No Domina
11	7	4

Tabla 20: Grados de Indeterminación, Estudiantes Fundaciones y muros

Fuente: Lujé, C. (2023).

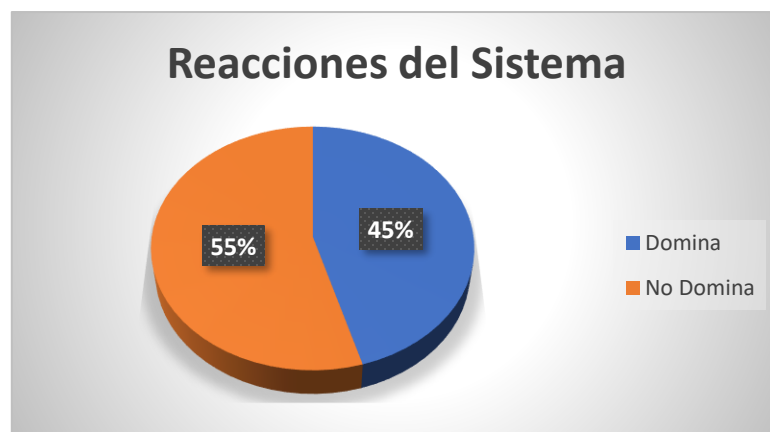


Gráfica 20: Rendimiento Grados de Indeterminación.

Fuente: Lujé, C. (2023).

Estudiantes Fundaciones y muros		
Estudiantes Totales	Reacciones del Sistema	
	Domina	No Domina
11	5	6

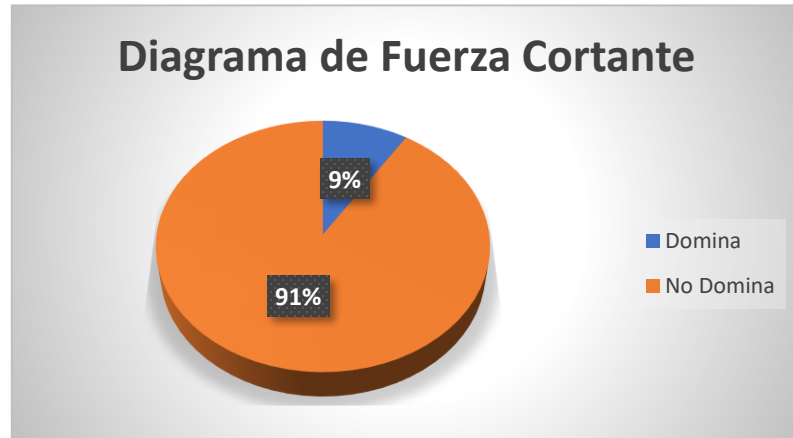
Tabla 21: Reacciones del Sistema, Estudiantes Fundaciones y muros
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 21: Rendimiento Reacciones del Sistema.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Fundaciones y muros		
Estudiantes Totales	Diagrama de Fuerza Cortante	
	Domina	No Domina
11	1	10

Tabla 22: Diagrama de Fuerza Cortante, Estudiantes Fundaciones y muros
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 22: Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Fundaciones y muros		
Estudiantes Totales	Punto de Inflexión	
	Domina	No Domina
11	0	11

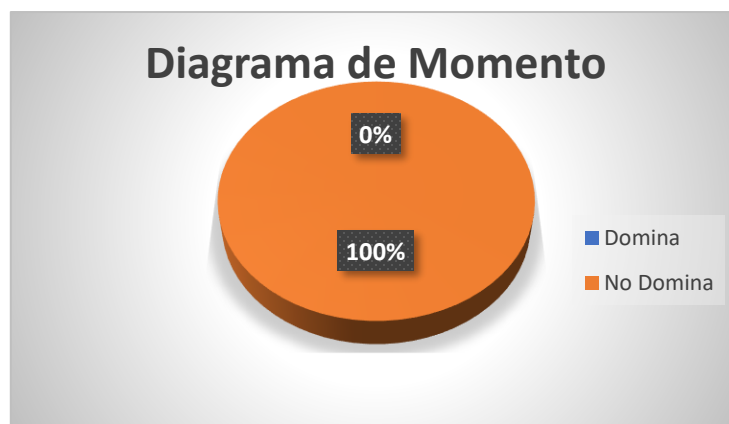
Tabla 23: Punto de Inflexión, Estudiantes Fundaciones y muros
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 23: Rendimiento Punto de Inflexión.
Fuente: Luje, C. (2023).

Estudiantes Fundaciones y muros		
Estudiantes Totales	Diagrama de Momento	
	Domina	No Domina
11	0	11

Tabla 24: Diagrama de Momento Flector, Estudiantes Fundaciones y muros
Fuente: Luje, C. (2023).



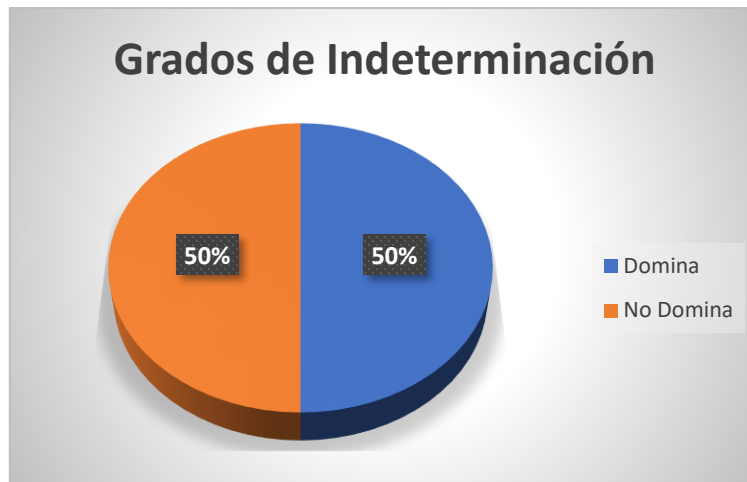
Gráfica 24: Rendimiento Diagrama de Momento.
Fuente: Luje, C. (2023).

4.1.6 Prueba Diagnóstica en Proyectos de Concreto Armado

En la cátedra de proyectos de concreto armado es aplicar todo lo aprendido en los semestres de estructuras y concreto armado, se realiza una edificación para la condición de uso aplicando las normativas de construcción vigente, por tanto, el método de fuerzas y rotaciones que se empleó en el manual permite solucionar estructuras con vinculación con empotramiento móvil o bielas, así, se planteó una prueba diagnóstica tipo (A) a estudiantes del décimo (10mo) semestre de la Universidad José Antonio Páez, se obtuvieron los siguientes resultados.

Proyectos de Concreto Armado		
Estudiantes Totales	Grados de Indeterminación	
	Domina	No Domina
4	2	2

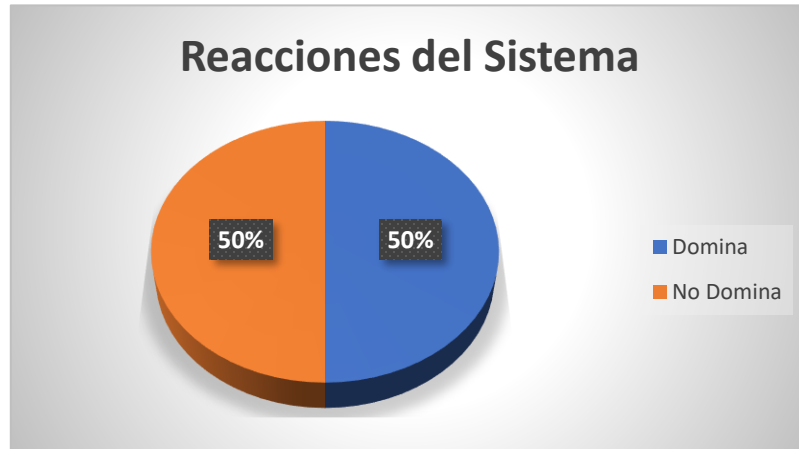
Tabla 25: Grados de Indeterminación, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 25: Rendimiento Grados de Indeterminación.
Fuente: Luje, C. (2023).

Proyectos de Concreto Armado		
Estudiantes Totales	Reacciones del Sistema	
	Domina	No Domina
4	2	2

Tabla 26: Reacciones del Sistema, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado
Fuente: Luje, C. (2023).



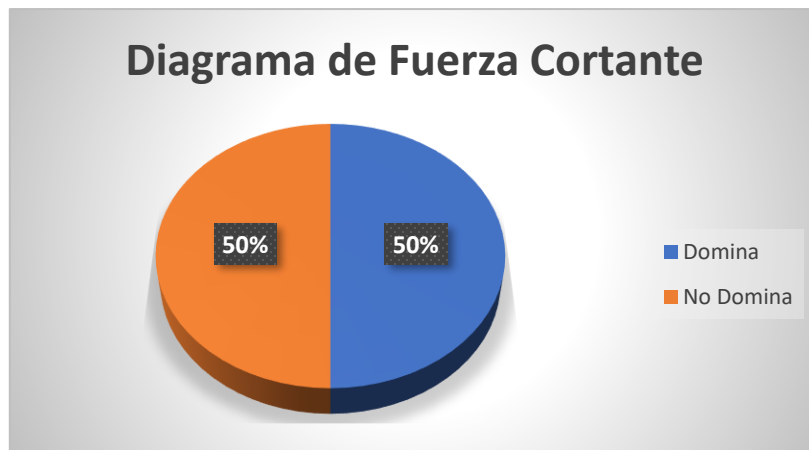
Gráfica 26: Rendimiento Reacciones del Sistema.

Fuente: Luje, C. (2023).

Proyectos de Concreto Armado		
Estudiantes Totales	Diagrama de Fuerza Cortante	
	Domina	No Domina
4	2	2

Tabla 27: Diagrama de Fuerza Cortante, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado

Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 27: Rendimiento Diagrama de Fuerza Cortante.

Fuente: Luje, C. (2023).

Proyectos de Concreto Armado		
Estudiantes Totales	Punto de Inflexión	
	Domina	No Domina
4	0	4

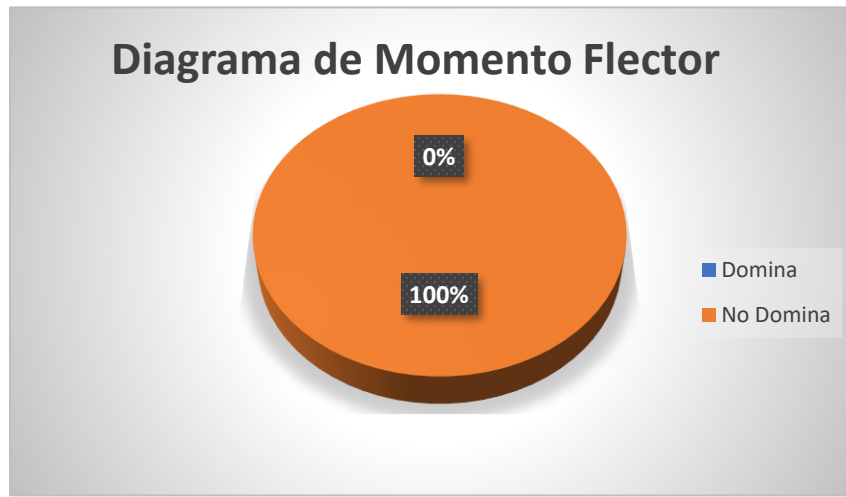
Tabla 28: Punto de Inflexión, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado
Fuente: Luje, C. (2023).



Gráfica 28: Rendimiento Punto de Inflexión.
Fuente: Luje, C. (2023).

Proyectos de Concreto Armado		
Estudiantes Totales	Diagrama de Momento Flector	
	Domina	No Domina
4	0	4

Tabla 29: Diagrama de Momento Flector, Estudiantes Proyectos de Concreto Armado
Fuente: Luje, C. (2023).



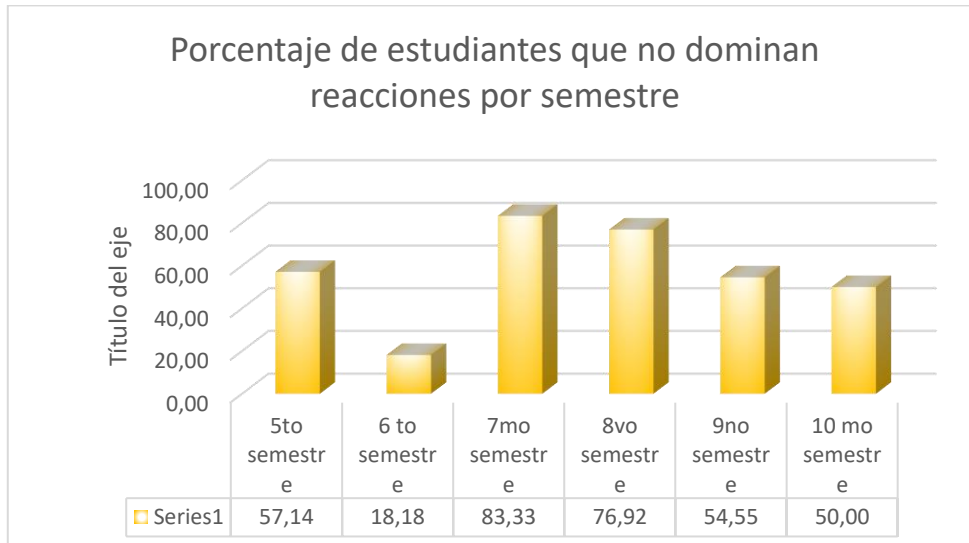
Gráfica 29: Rendimiento Diagrama de Momento Flector.

Fuente: Luje, C. (2023).

Al analizar los rendimientos, podemos concluir que se debe realizar un repaso por los capítulos de vinculación, reacciones del sistema estructural, grado de indeterminación de la estructura, diagrama de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, despiece de una estructura, trabajo virtual, integrales definidas e indefinidas, con la finalidad de que el estudiante pueda repasar esos temas que pueden generar incertidumbre, así, en el manual debe incluir un repaso para posteriormente aplicar el método de las fuerzas, como el método de rotaciones direccionado a vínculos con empotramiento móvil o bielas a diferentes tipos de estructuras que se puede encontrar en la vida real, y es necesario identificar y resolver este tipo de estructuras, para evitar una pérdida en contratos que involucren las mismas.

4.1.7 Resumen de porcentajes de grado de comprensión

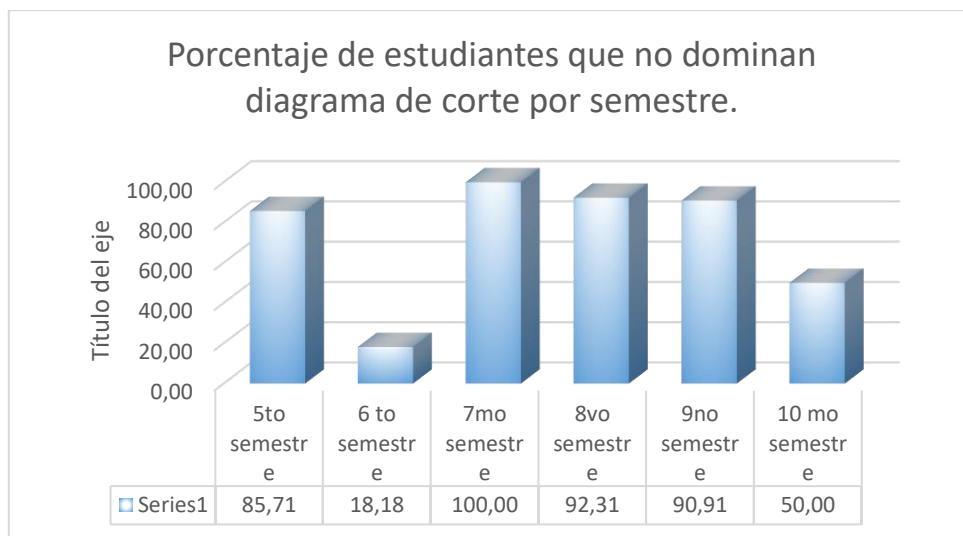
Se realiza un resumen de los porcentajes por semestre obtenidos de acuerdo con el grado de comprensión, para identificar la dificultad de los estudiantes y las posibles causas que ha generado estos porcentajes.



Gráfica 30: Rendimiento de reacciones por semestre.

Fuente: Lujé, C. (2023).

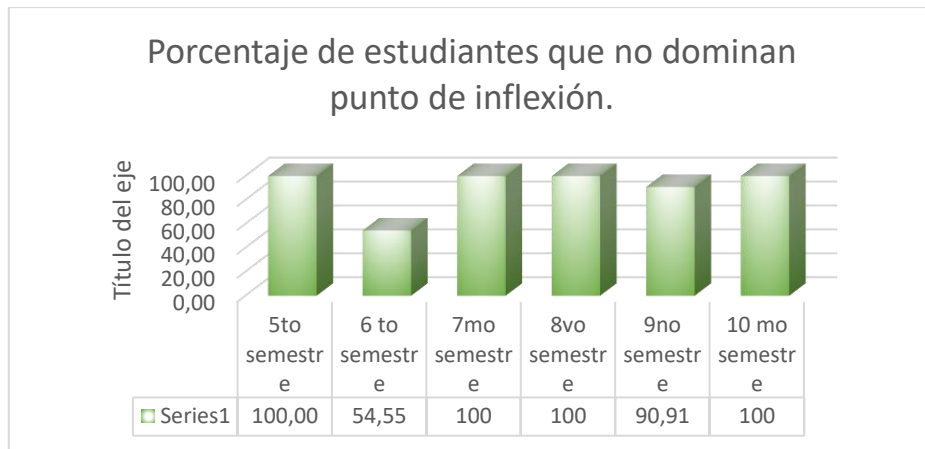
El diagrama de barras muestra la falta de dominio en reacciones siendo el más alto con el 83,33% el séptimo semestre, por lo que en el manual se considera un repaso de la obtención de reacciones de un sistema estructural.



Gráfica 31: Rendimiento diagrama de corte por semestre.

Fuente: Lujé, C. (2023).

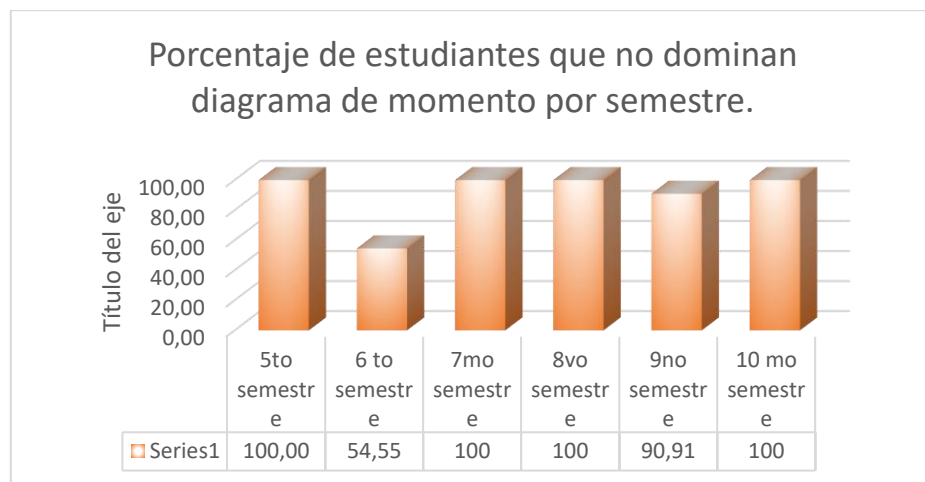
El diagrama de barras muestra la falta de dominio en la obtención del diagrama de cortante siendo el más alto con el 100% el séptimo semestre, por lo que en el manual se considera un repaso de la obtención de diagrama de fuerza cortante de un sistema estructural.



Gráfica 32: Rendimiento punto de inflexión por semestre.

Fuente: Lujé, C. (2023).

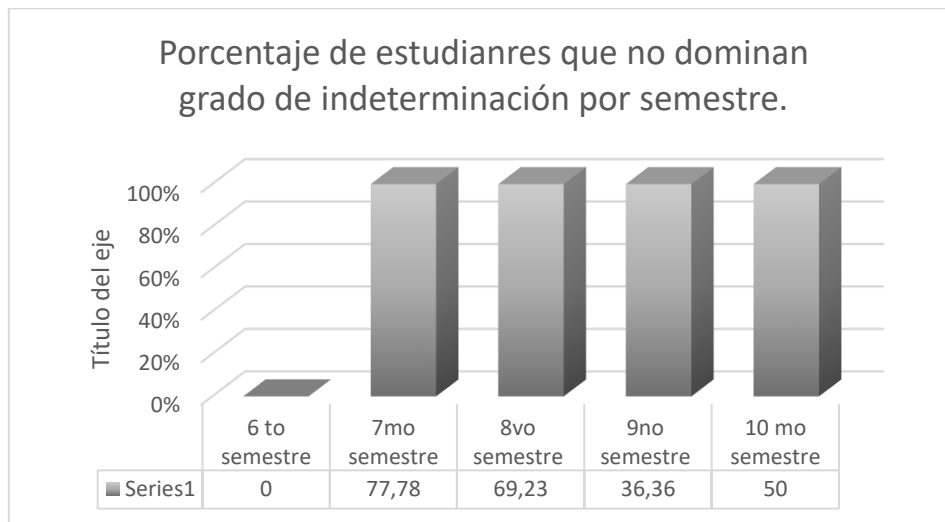
El diagrama de barras muestra la falta de dominio en la obtención sobre el punto de inflexión siendo el más alto con el 100% el quinto, séptimo, octavo y décimo semestre, por lo que en el manual se considera un repaso de la obtención de punto de inflexión de un sistema estructural.



Gráfica 33: Rendimiento diagrama de momento flector por semestre.

Fuente: Lujé, C. (2023).

El diagrama de barras muestra la falta de dominio en la obtención sobre el diagrama de momento siendo el más alto con el 100% el quinto, séptimo, octavo y décimo semestre, por lo que en el manual se considera un repaso de la obtención de diagrama de momento flector de un sistema estructural.



Gráfica 34: Rendimiento grado de indeterminación de una estructura por semestre.
Fuente: Luje, C. (2023).

El diagrama de barras muestra la falta de dominio en la obtención sobre el grado de indeterminación de una estructura siendo el más alto con el 77,78 % el séptimo, semestre, por lo que en el manual se considera un repaso de la obtención sobre grado de indeterminación de una estructura. Como consecuencias de los resultados mostrados, se debe considerar que los estudiantes estaban en la época de pandemia, generando que las clases sean de forma virtual, dando a entender que se generó un efecto en el cambio de entorno de un estudio presencial a un estudio de forma virtual no siendo el más adecuado para la parte estructural, quedando con varias falencias los estudiantes, pero con esfuerzo y dedicación se puede retomar la excelencia y el entendimiento en el análisis y cálculo estructural básico.

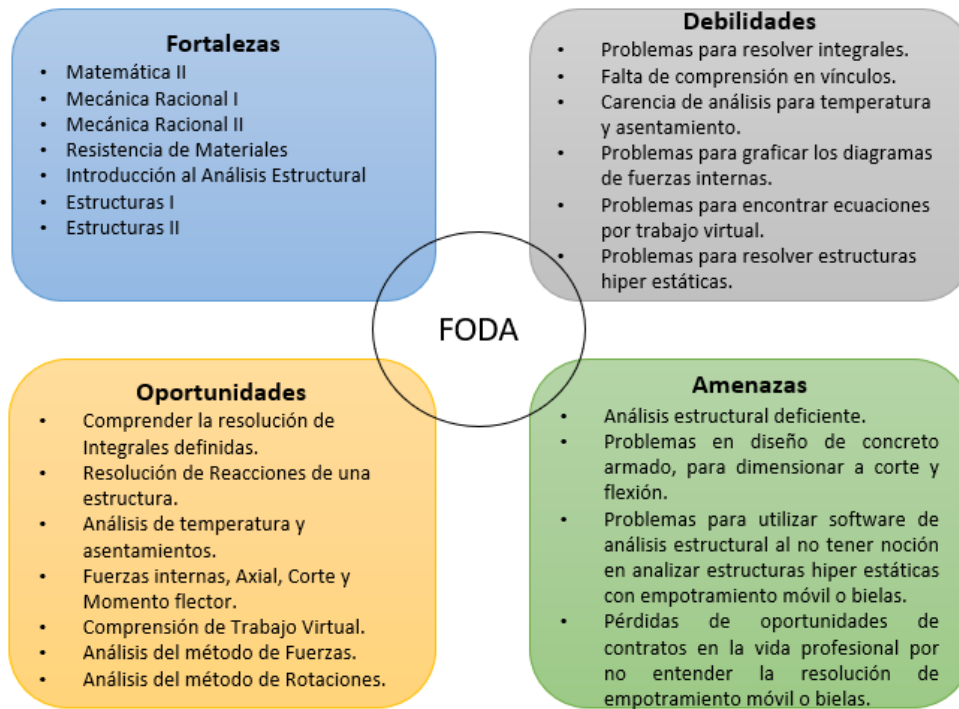
4.2 Determinar el contenido programático correspondiente a las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiper estáticas.

Para determinar el contenido programático se realizó la entrevista estructura validado por tres expertos, estas entrevistas permiten identificar las materias necesarias que los estudiantes deben conocer, así como el implemento de la matriz FODA, para su mejor comprensión.

4.2.1 Matriz FODA:

La matriz FODA es una herramienta de análisis aplicable a una situación, individuo, empresa, persona de estudio, temas de investigación, así como cualquier objeto de estudio en un momento dado.

Esta herramienta permite formar una imagen de la situación actual, como es el caso de las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiper estáticas.



Fuente: Luje, C. (2023).

4.2.2 Información Suministrada por los expertos

Cuadro comparativo de Entrevista a Ingenieros Civiles expertos.

Entrevista a Ingenieros Civiles expertos		
Manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.		
Objetivo: Elaborar un manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.		
Ingenieros Civiles Expertos		
Ing. Ana Hernández	Ing. Luis Francisco Rodríguez	Ing. Jutzi Herrada
1. ¿Cree usted que se debe ampliar el concepto y aplicación de bielas en un sistema estructural?		
Respuestas:		
Si, debido a que hay muchas deficiencias bajo este tipo de vinculación.	Si, pienso que se debe ampliar ya que son muy pocos las personas que conocen la parte de bielas. Yo creo que es interesante el tema.	Pienso que si se debe ampliar los conocimientos.
Comparación		
Los ingenieros coinciden que si se debe ampliar el concepto y aplicación de bielas en un sistema estructural.		
2. ¿Considera que la vinculación correspondiente a un empotramiento móvil o biela es aplicable en estructuras en la vida real? ¿Por qué?		
Respuestas:		
Si, en la parte de puentes grúa, o diferentes estructuras, dependiendo del diseño se puede permitir un desplazamiento.	Yo pienso que sí, hay algunos detalles en estructuras que se pueden aplicar.	Si considero que si se pueden emplear en la vida real.
Comparación		
Los ingenieros consideran que en la vida real se emplean estructuras que poseen la vinculación de empotramiento móvil o biela.		
3. ¿Considera que el método de las fuerzas se puede emplear para resolver sistemas estructurales con presencia de bielas? ¿Por qué?		
Respuestas:		

Si se puede, ya que el método de las fuerzas se encuentra en varias bibliografías aplicado a casos con rodillos, articulaciones, empotramientos externos y vínculos internos con rótulas, pero hay casos que es necesario el mecanismo de la biela.	Yo pienso que sí.	Si se puede emplear considerando los parámetros de cálculo estructural.
Comparación		
Según la respuesta de los ingenieros si se puede emplear el método de las fuerzas para resolver estructuras con bielas.		
4. ¿Considera que el método de rotaciones se puede emplear para resolver sistemas estructurales con presencia de bielas? ¿Por qué?		
Respuestas:		
Si, considero que, si se puede resolver, en el planteamiento para este método puede ser más sencillo que el método de las fuerzas siempre y cuando se conozca las restricciones del vínculo de la biela.	Yo pienso que sí, el sistema de rotaciones si se puede aplicar.	Pienso que si se puede aplicar.
Comparación		
De igual forma los ingenieros consideran que se puede emplear el método de rotaciones para aplicar a estructuras con bielas.		
5. ¿Los estudiantes deben entender el proceso de despiece en una estructura para aplicar el método de las fuerzas? ¿Por qué?		
Respuestas:		
Claro, porque el método de las fuerzas se basa en las fuerzas redundantes y a través del despiece se puede observar la transmisión de estas fuerzas.	Si, es necesario y a mí me parece interesante, los estudiantes que he dado clases les faltan esos conceptos, ya que no identificar el despiece de la estructura, entonces si no sabes vas a tener inconveniente en resolver la estructura.	Los estudiantes deben entender el proceso para poder diseñar en concreto armado.
Comparación		
De acuerdo a la respuesta de los ingenieros, es importante comprender el despiece para aplicar correctamente el método de fuerzas.		
6. ¿Considera que es importante saber graficar el diagrama de corte y momento para calcular estructuras hiperestáticas? ¿Por qué?		
Respuestas:		

Si es totalmente imprescindible, conocer el diagrama de corte, momento hasta axial, aprendiendo a analizar de acuerdo con el sistema de cargas que se tiene, y las deformaciones que se generan por estas cargas.	Es fundamental	Es importante para conocer las fuerzas internas de la estructura.
Comparación		
Realizar un correcto diagrama de fuerzas internas coinciden los ingenieros que es imprescindible como fundamental.		
7. ¿Por qué considera importante que el estudiante domine las restricciones de cada vínculo?		
Respuestas:		
Bueno las restricciones de cada vinculación, les va a permitir el análisis de la estructura de forma exitosa, por ejemplo, si el estudiante no conoce que restringe un empotramiento, va a tener un análisis incorrecto.	Si es muy importante para que los estudiantes puedan resolver las estructuras sin inconveniente.	El entender permite realizar un correcto análisis estructural.
Comparación		
Los ingenieros consideran que el entender y dominar las reacciones de cada vínculo permite resolver estructuras.		
8. ¿Cuáles son los tipos de sistemas estructurales de acuerdo con su indeterminación?		
Respuestas:		
Son dos, indeterminación estática e indeterminación cinemática. Hay diferentes tipos de indeterminaciones, pero en cuanto a los grados de libertad, la parte del movimiento de la estructura se puede clasificar en estos dos, que son la más comúnmente usados.	Pues pueden ser isostáticos hiperestáticos.	Existen los estáticos como dinámicos.
Comparación		
Los sistemas de indeterminación son estática y cinemática dentro de estos se encuentran, las hipo estáticas, isostáticas e hiper estáticas.		
9. ¿Por qué considera importante la identificación de los tipos de sistemas estructurales de acuerdo con su indeterminación?		
Respuestas:		

<p>Son importantes, porque sabemos de dónde vamos a partir, ya que al conocer que tipo de indeterminación nos permite conocer que fuerzas vamos a necesitar unas reacciones, mientras que para la indeterminación cinemática debemos conocer los movimientos que se pueden dar a pesar de la vinculación y restricciones del elemento.</p>	<p>Primero que todo a los estudiantes les cuesta resolver una estructura estática de una hiperestática, al no tener identificado los movimientos que tiene cada uno de los apoyos, entonces no conocen los vínculos y no saben cómo resolver ese tipo de estructuras.</p>	<p>Pienso que debe generar un análisis previo a la hora de calcular, por eso se debe conocer bien el análisis.</p>
Comparación		
<p>Los ingenieros comentan que el conocer el grado de indeterminación permite conocer las fuerzas y movimientos que se van a emplear en la estructura.</p>		
10. ¿Qué conocimientos matemáticos considera como base para el análisis estructural?		
Respuestas:		
<p>Es necesario como base tener conocimiento en trigonometría, como cálculo de hipotenusa, identificación de cateto opuesto, cateto adyacente, adicional, la relación de triángulos, resolución de integrales, ecuaciones de una recta, pendiente que son base del cálculo.</p>	<p>Fundamentalmente, deben conocer geometría, trigonometría, así como un poco de algebra ya que se complican al resolver una estructura, esas tres son claves, personalmente pienso que los análisis estructurales de cálculo deben tener estos tres, así como resolver un sistema de ecuaciones de segundo y tercer grado.</p>	<p>Se necesita conocer matemáticas como operaciones básicas, más geometría relacionando los ángulos como triángulos internos.</p>
Comparación		
<p>Los ingenieros coinciden que es base en matemáticas dominar geometría, trigonometría, algebra, como el estudio de la recta.</p>		
11. ¿Qué análisis recomienda para obtener las reacciones de un pórtico con cargas rectangulares?		
Respuestas:		
<p>Cuando tenemos cargas rectangulares se puede analizar de forma sencilla por el método de rotaciones, primero calcular la resultante, que está ubicada en la mitad, y se transmite a los extremos de un elemento.</p>	<p>Deben conocer el centro de gravedad de la carga.</p>	<p>Obtener la carga resultante aplicado a L/2 de sus extremos.</p>
Comparación		

Los ingenieros recomiendan emplear un análisis en cargas rectangulares obteniendo el centro de gravedad ubicado a la mitad de la longitud de la barra.		
12. ¿Qué análisis recomienda para obtener las reacciones de una viga simplemente apoyada con una carga triangular actuando sobre ella?		
Respuestas:		
Para una carga triangular, por ejemplo, en una viga simplemente apoyada, se debe calcular la resultante en primer lugar, y se debe tener noción de la ubicación del centroide, que será a 1/3 del lado recto, para luego realizar un análisis de momento.	Sencillamente, saber cuáles son el centro de gravedad del triángulo, para que ellos puedan determinar la carga equivalente.	Se debe tomar en cuenta la carga puntual que se coloca en el centro de gravedad y luego hacer el chequeo.
Comparación		
De igual forma, para las cargas triangulares se debe encontrar el centro de gravedad que está ubicado a 1/3 del lado recto del triángulo.		
13. ¿Cómo recomienda obtener la resultante cuando se tiene una carga trapezoidal?		
Respuestas:		
Para la carga trapezoidal en el caso de los estudiantes, mientras obtienen más experiencia lo que yo recomiendo es que realicen una superposición de figuras, dividan esa carga trapezoidal, en un rectángulo y una triangular, donde la rectangular se va a aplicar en la mitad de la longitud y la triangular a 1/3 de lado recto.	Calcular el centro de gravedad, para la carga rectangular y triangular.	Considero que se puede realizar una clasificación de áreas en rectangular como triangular para obtener las cargas resultantes.
Comparación		
Los ingenieros consideran que se puede emplear una superposición de figuras, descomponiendo la carga en rectangular y triangular.		
14. ¿Qué estructuras en la vida real pueden servir de ejemplo de la aplicación de empotramientos móviles o bielas?		
Respuestas:		
Podemos tener los puentes grúa, donde estás permitiendo un desplazamiento, pero estás impidiendo el giro, así estás condicionando el desplazamiento vertical.	Son los puentes grúa, en las naves industriales donde posean tren grúa.	Pueden ser los puentes grúa.
Comparación		
Los ejemplos que los ingenieros consideran como estructura con bielas, más conocido en la vida real son los puentes grúa.		
15. ¿Considera que el dominio y la aplicación del Trabajo virtual en el análisis estructural es importante? ¿Por qué?		
Respuestas:		

Si, es importante porque el trabajo virtual, te permite obtener las ecuaciones adicionales, para determinar en los métodos de indeterminación cinemática, poder conocer los valores de esos desplazamientos laterales que se van a generar en la estructura.	Si, porque la estructura si es simétrica en cargas, adicional a ello tiene ciertas características se puede hacer un equilibrio de cortante, que es una simplificación de trabajo virtual, y esta es aplicable para todas las estructuras.	Si, considero que es importante para el análisis estructural.
Comparación		
Es importante de acuerdo con los ingenieros, debido a que nos permite obtener una ecuación para resolver casos de indeterminación cinemática.		
16. ¿Cree que contar con un manual de análisis estructural que contenga explicación teórica y práctica sobre los métodos de las fuerzas y rotaciones con la presencia de bielas sería beneficioso para reforzar el conocimiento de los estudiantes? ¿Por qué?		
Respuestas:		
Si, me parece beneficioso, porque a pesar de que hay variedad de bibliografía hay muchos que faltan conceptos o los tienen en otras bibliografías, así que el hecho de unificar y reforzar conocimientos que ya deberían estar claros para obtener resultados satisfactorios me parece una buena idea, que el estudiante adicional de lo que se puede indicar en clases, pueda tener una bibliografía de base de guía tanto para él, como para el profesor, para reforzar ejercicios que salgan de tal manual.	Yo pienso que sí, es más pienso que está un poco avanzado con respecto a los estudiantes ya que les falta resolver un poco más de estructuras, lo ideal es que todos los estudiantes que salgan de la universidad lo sepan hacer, ya que en la vida real algunos van a conseguir en las industrias y deben saber cómo se va a hacer.	Si, fuese beneficioso en especial cuando tengan una duda, puedan consultar como material de bibliografía.
Comparación		
Los ingenieros consideran que será beneficioso la creación de una manual que contengan casos de bielas en la vida real.		
17. ¿Por qué es importante conocer los puntos de inflexión a la hora de realizar un diseño?		
Respuestas:		
Los puntos de inflexión son cambios en la pendiente, esto está ligado a que corresponde un máximo o un mínimo, es importante, ya que al realizar un diseño de cualquier estructura se diseña con el momento máximo, así nos va a permitir que el diseño planteado sea seguro, y sea capaz de soportar la máxima sollicitación planteada.	Es importante para diseñar en concreto armado, de lo contrario como están dimensionando para el momento máximo que se genera en la estructura.	Permite el diseño en concreto armado, de lo contrario estarían realizando un diseño incorrecto de la sección de estudio.

Comparación		
Identificar los puntos de inflexión es importante ya que con ello se puede realizar un correcto diagrama, así como diseñar en concreto armado.		
18. ¿Qué importancia tiene conocer los esfuerzos internos que se generan en una estructura?		
Respuestas:		
Es importante al hablar de fuerza axial, cortante y momento ya que está relacionado con el diseño, por ejemplo, conocer el cortante en una determinada sección ya que permite la zona de confinamiento de estribos en una viga o columna de acero.	Es importante para identificar que fuerzas se generan internamente, y luego poder diseñar.	Es importante para identificar las gráficas y su comportamiento interno para cortante, y momento flector.
Comparación		
Los ingenieros concuerdan que el conocer las fuerzas internas es de importancia para el Predimensionado de vigas y columnas.		

Cuadro 3: Cuadro comparativo de Entrevista a Ingenieros Civiles expertos.

Fuente: Lujé, C. (2023).

4.3 Desarrollo del manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas, que incluya una metodología de acuerdo con los lineamientos estructurales, clara y precisa.

Después de haber realizado un estudio de los conceptos previos que deben conocer los estudiantes, como de las materias que se deben tener presentes, el manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones incluye un repaso en las materias como:

- Matemática II (Integrales definidas)
- Mecánica Racional (Vínculos; Tipos de Cargas; Grados de indeterminación y despiece a vigas, pórticos y cerchas.)
- Resistencia de Materiales (Ley de Hook, Cálculo de Diagramas de fuerzas internas, axial, cortante y momento flector.)
- Introducción al Análisis Estructural (Trabajo virtual aplicado a estructuras con desplazamiento.)

- Estructuras I (Método de las fuerzas; Fuerzas redundantes; Principio de Superposición; Trabajo virtual; Ecuaciones de corte y momento flector; Punto de inflexión; Flexibilidad; Rigidez; Ecuaciones de Compatibilidad, Ley de Maxwell, Asentamientos en los apoyos; Variación de temperatura.)
- Estructuras II (Método de rotaciones, Convención de Signos, Tablas de Momentos de Empotramiento.)

El manual cuenta con todos los temas previos para llenar los vacíos que poseen los estudiantes, como las tablas más utilizadas en la rama estructural, y una serie de ejercicios propuestos para que el estudiante pueda aplicar los conceptos aprendidos.

Además, el manual de análisis y cálculo estructural posee una interfaz clara, con sus comentarios de análisis lo que permitirá que el estudiante o el lector entienda la obtención de todos los cálculos previos a un análisis estructural, los ejercicios que se realizaron en el manual por el método de las fuerzas y por el método de rotaciones, son iguales, para mostrar al estudiante que los resultados serán los mismos, así, se puede emplear cualquier método para resolver este tipo de estructuras hiper estáticas con empotramiento móvil o bielas.

Finalmente, el manual de análisis y calculo estructural se lo puede visualizar en el (Apéndice D) de esta investigación.

Conclusión

Para culminar, dentro del desarrollo del presente trabajo de grado, se logró adquirir nuevos conocimientos, técnicas de análisis que permitirán un mejor desenvolvimiento en el ámbito personal como profesional. Mediante la elaboración del Manual de Análisis y Cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, esta investigación beneficiará tanto a estudiantes de la rama estructural de la Universidad José Antonio Páez, como a docentes que deseen reforzar sus conocimientos, de igual forma, a todo estudiante que desee conocer el método para resolver este tipo de estructuras con vinculación de bielas.

Se desarrollo una investigación cuantitativa de tipo factible, permitiendo el uso de herramientas tanto matemáticas como estadísticas, obteniendo resultados cuantificables, con un diseño de investigación de campo y documental permitiendo recolectar información sobre las variables, tal y como se muestran sin ser alteradas.

Por lo que se puede concluir que las carencias y falencias de conceptos en los estudiantes sobre análisis estructural fueron estudiados en sus condiciones actuales. Seguidamente se describió un nivel de investigación descriptivo, buscando responder interrogantes del por qué, cómo y cuándo se manifiesta la problemática en estudio. La población y muestra fue designada por los estudiantes de la facultad de Ingeniería Civil en la Universidad José Antonio Páez, siendo los estudiantes de la rama estructural en el Estado Carabobo, Venezuela.

Cabe destacar que la investigación se baso en la creación de un manual de análisis y cálculo estructural con bielas o empotramiento móvil, que permitiera mejorar la comprensión y reforzar conceptos de análisis estructural en los estudiantes, por lo que, se desarrolló un diagnóstico en sus condiciones actuales, a través de una prueba diagnóstica tipo A, B y C.

Seguidamente, la segunda fase del proyecto permitió analizar las materias que se deben comprender previo a un análisis de estructuras hiper estáticas que tengan como vinculación un empotramiento móvil o bielas, por lo que se ejecutó un análisis FODA,

permitiendo obtener las fortalezas, al comprender los temas que abarcan las materias de Matemática II, Mecánica Racional, Resistencia de Materiales, Introducción al análisis estructural, Estructuras I y Estructuras II; se pudo evidenciar como oportunidades la comprensión de los temas que conllevan estas materias como integrales definidas, obtención de reacciones de una estructura, análisis de temperatura y asentamientos, cálculo y análisis de diagramas de fuerzas internas axial, cortante y momento flector, entendimiento de trabajo virtual, como la comprensión de los métodos de fuerzas y rotaciones; se pudo evidenciar como amenazas, un análisis estructural deficiente lo que trae como resultado problemas para el diseño en concreto armado, de igual forma al no tener un entendimiento en análisis estructural, se complica a la hora de utilizar algún software que mantenga estas características, trayendo fallas en su aplicación de forma profesional.

Finalmente, se ejecutó un cuadro comparativo que consta de entrevistas suministradas por los Ingenieros Civiles especializados en análisis y cálculo estructural.

Para la tercera fase del presente trabajo de grado se elaboró un manual de análisis y cálculo estructural a través de una interfaz clara y sencilla, que contiene un refuerzo en los conceptos básicos de análisis estructural como, tipos de vínculos de una estructura, clasificación de estructuras, convención de signos de acuerdo a resistencia de materiales, resolución de diagramas de fuerzas internas axial, cortante y momento, condición de barras axialmente infinitos, condición de barras inercialmente infinitos, condición de temperatura y asentamientos, análisis estructural para vigas, pórticos y cerchas, trabajo virtual, flexibilidad, rigidez, ecuaciones de compatibilidad, ley de Maxwell, que son importantes para la comprensión de los métodos de fuerzas y rotaciones, de tal forma el manual contiene las tablas más utilizadas en el cálculo estructuras, para resolver todo tipo de estructuras con bielas o empotramiento móviles. Para todos los estudiantes, docentes, profesionales tanto nacionales como internacionales, que deseen una bibliografía permitiendo resolver este tipo de estructuras y evitando perder contratos que se transforman en pérdidas económicas.

Recomendaciones

De acuerdo con los resultados y conclusiones obtenidos en el trabajo de investigación, se vuelve necesario hacer énfasis en el planteamiento de recomendaciones para satisfacer las incertidumbres que se pueden dar en los estudiantes a la hora de resolver una estructura con vinculación de bielas, tomando en cuenta las condiciones actuales, dichas recomendaciones son:

- Identificar y comprender los vínculos externos e internos de una estructura, para obtener las reacciones que se generan entorno a las sollicitaciones externas sea por viento, sismos, cargas vivas o muertas, que a su vez se traducen a cargas de forma puntual, rectangular, triangular, trapezoidal o curva.
- Llevar a cabo la resolución de los ejercicios propuestos en dicho manual, con la finalidad de retomar los métodos impartidos extrapolados a vínculos con bielas internas y empotramiento móvil externo.
- Discretizar las estructuras colocando las fuerzas internas con la finalidad de conocer como son sus diagramas de fuerza axial, cortante y momento flector.
- Plasmar los conceptos adquiridos en ejercicios que faciliten el entendimiento del análisis de estructuras hiper estáticas utilizando los diferentes tipos de metodologías ya sea, Cross, Desplazamientos o Tres momentos y comparando los resultados, estos deberán ser los mismos por cualquier metodología, generando una nueva metodología de análisis.

REFERENCIAS

I.

- Arias, F. (2016). **Introducción a la metodología de la investigación científica**. Obtenido de Google. libros: <https://books.google.co.ve/books?hl=es&lr=&id=W5n0BgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA11&dq=nivel+de+investigaci%C3%B3n+seg%C3%BAn+autores&ots=kYnHepsnib&sig=pA8yDTq9-1S34LB0Y9OdrM2C86w#v=onepage&q&f=false>
- Arias, F. (2016). **Proyecto De Intigación Introducción a la Metodología Científica** . Obtenido de ISSUU: https://issuu.com/fidiasgerardoarias/docs/fidias_g._arias._el_proyecto_de_inv
- Bernal, C. (2001). **Metodología de la Investigación**. Obtenido de anyflip: <https://anyflip.com/vede/ohla/basic/251-300>
- Bonett, R. L. (2018). **Análisis estructural II Proyecto de aula** . Obtenido de Academia : https://www.academia.edu/37793803/ANALISIS_ESTRUCTURAL_II
- Camejo, & Rodríguez. (2016). **Diseño De Un Material Didáctico Para La Introducción Al Análisis Estructural Mediante El Método De Elementos Finitos Adaptado a La Unidad Curricular De Estructuras Avanzadas**. Obtenido de Universidad Carabobo: https://renati.sunedu.gob.pe/bitstream/sunedu/744906/1/Rodriguez_Trillo_Yuletsy.pdf
- Campusano Cataldo, K., & Díaz Olivos , C. (2017). **Manual De Estrategias Didácticas: Orientaciones Para Su Selección**. Obtenido de Dirección de desarrollo académico: <https://www.inacap.cl/web/2018/documentos/Manual-de-Estrategias.pdf>
- Cervera Ruiz , M., & Blanco Díaz , E. (2015). **Resistencia de Materiales** . Obtenido de CIMNE: <http://cervera.rmee.upc.edu/libros/Resistencia%20de%20Materiales.pdf>
- Cervera Ruíz , M., Y Blanco Díaz, E. (2004). **Mecánica de estructuras Libro 2 Métodos de análisis**. Obtenido de POLITEXT: http://cervera.rmee.upc.edu/libros/Mec%C3%A1nica_de_estructuras_II_Analisis_de_Estructuras.pdf

- Chávez. (2007). **Fases De La Investigación.** Obtenido de UTMACH: <http://repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/6785>
- Collaguazo, C., Y Baptista , P. (2017). **Metodología de la Investigación.** Obtenido de Metodología de la Investigación: <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>
- Comisión Internacional de Tests. (2014). **El Uso de los Tests y otros Instrumentos de Evaluación en Investigación .** Obtenido de Consejo General de la Psicología : https://www.intestcom.org/files/statement_using_tests_for_research_spanish.pdf
- García Saldaña, A. (2015). **La Importancia Del Manual Como Herramienta De Aprendizaje Del Estilo Periodístico. Una Propuesta De Guía De Estilo Para Los Estudiantes De Periodismo.** Obtenido de Universidad de Piura: https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/2268/INF_196.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Landeau. (2007). **Procesos y Fundamentos De La Investigación Científica.** Obtenido de Universidad Técnica de Machala: <http://repositorio.utmachala.edu.ec/bitstream/48000/14232/1/Cap.4-Investigaci%C3%B3n%20cuantitativa%20y%20cualitativa.pdf>
- Mejias , R., Y Ramos , A. (2011). **Diseño De Un Manual De Análisis Matricial De Las Estructuras Ajustado Al Programa De La Carrera De Ingeniería Civil De La Universidad De Carabobo.** Obtenido de Universidad De Carabobo: <http://mriuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/handle/123456789/5657/mejiramo.pdf?sequence=2>
- Ministerio del Poder Popular para Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias. (2008). **Ley Orgánica De Ciencia Tecnología e Innovación (LOCTI).** Obtenido de Fonacit: http://www.ucv.ve/fileadmin/user_upload/asesoria_juridica/leyciecinaytecnologia.pdf
- Miquel Canet, J. (2012). **Resistencia de Materiales y Estructurales .** Obtenido de Métodos numéricos de ingeniería : https://portal.camins.upc.edu/materials_guia/250120/2012/Resistencia%20de%20materiales%20y%20estructuras.pdf

- Mirka Csoban, E. (2018). **Efecto del contexto y de la información Falsa en el Aprendizaje y el recuerdo** . Obtenido de Universidad Católica Andrés Bello. Facultad de Humanidades y Educación : <http://biblioteca2.ucab.edu.ve/anexos/biblioteca/marc/texto/AAV1923.pdf>
- Páez, U. J. (2020). **Manual de Normas trabajo de grado**. Obtenido de https://201.249.74.130/adms/recursos/NormasReglamentos/MANUAL_NORMAS_TRABAJO_GRADO_Mayo_2020.pdf
- Peña, O. (2019). **Método de estudio: memoria contextual**. Obtenido de POLIVERSO: <https://www.poli.edu.co/blog/poliverso/memoria-contextual>
- Pérez Mendoza, R. (2016). **Guía Metodológica Para La Elaboración De Objetivos De Aprendizaje**. Obtenido de Docplayer: <https://docplayer.es/4023877-Guia-metodologica-para-la-elaboracion-de-objetivos-de-aprendizaje.html>
- Programa Nacional de educación España. (2006). **Manual De Estilos De Aprendizaje**. Obtenido de DOCUMENTOS.BIBLIOGRÁFICOS: https://docs.google.com/document/d/1CpHdvh0Elfpq8yQwBmE5PmcjXTSZWM3Vm_BLoSWIW0g/edit?hl=en_US
- República Bolivariana de Venezuela. (2002). **Proyecto De Ley De Educación Universitaria**. Obtenido de Legislación De Educación Universitaria : <http://www.superior.consejos.usb.ve/sites/default/files/Proyecto%20de%20Ley%20de%20Educaci%C3%B3n%20Universitaria%20Aprobado%20por%20la%20Asamblea%20nacional%20%28Diciembre%20%202010%29.pdf>
- Rodríguez, T. y. (2009). **La recopilación documental como técnica de investigación**. Obtenido de Técnica de investigación: <http://dani14238551.blogspot.com/2009/03/la-recopilacion-documental-como-tecnica.html>.
- Romero Trenas , F. (2009). **Aprendizaje Significativo y Constructivo**. Obtenido de Temas para la educación: <https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd4981.pdf>
- Tamayo, T. y. (2006). **Diccionario de la Investigación Científica**. Obtenido de Google.Libros: <https://books.google.co.ve/books?hl=es&lr=&id=jcGySsqyv4wC&oi=fnd&pg=PA7&dq=tamayo+y+tamayo+2006+investigaci%C3%B3n+descriptiva&ots=32rubVoQX>

&sig=x5qOoxe52HakCa_v6GEBZxpADXU#v=onepage&q=tamayo%20y%20tamayo%202006%20investigaci%C3%B3n%20descriptiva&f=false

Valderrama. (2017). **Pasos para elaborar proyectos y tesis de investigación científica.** Obtenido de Nivels de investigación : <https://www.aacademica.org/cporfirio/17.pdf>

Vargas. (2012). **La entrevista en la investigación cualitativa: nuevas tendencias y retos.** Obtenido de Google.Libros: http://biblioteca.icap.ac.cr/blivi/coleccion_unpan/bol_diciembre_2013_69/uned/2012/investigacion_cualitativa.pdf

Vidal, D. (2009). **Análisis de datos de encuesta. Desarrollo de una investigación completa utilizando SPSS.** Obtenido de Google.Libros: <https://books.google.co.ve/books?id=xk7I9MCJZFsc&printsec=frontcover&dq=Vidal+2009+investigaci%C3%B3n+descriptiva&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwiVmorJr6b3AhWzSjABHWiMCAAQ6AF6BAgGEAI#v=onepage&q=Vidal%202009%20investigaci%C3%B3n%20descriptiva&f=false>

Yépez Moya , F., Guerra , M., Bermúdez Arboleda, N., Peñaherrera, R., Bravo, V., Zorrilla, D., . . . Castillo, K. (2016). **Guía práctica para el diseño de estructuras de hormigón armado de conformidad con la Norma Ecuatoriana de la construcción NEC 2015.** Obtenido de Secretaría de Gestión de Riesgos : <https://www.habitatyvivienda.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/10/GUIA-2-HORMIGON-ARMADO.pdf>

Zapata. (2006). **Elementos Del Marco Metodológico De Una Investigación.** Obtenido de Essays Club: <https://es.essays.club/Ciencias-humanas/Literatura-y-lenguaje/ELEMENTOS-DEL-MARCO-METODOL%C3%93GICO-DE-UNA-6INVESTIGACI%C3%93N-125160.html>

APÉNDICE

APÉNDICE A: ENTREVISTA ESTRUCTURADA

Fecha:
Manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.
Nombre del entrevistado:
Autor: Luje, Carlos
Objetivo: Elaborar, un manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.
Preguntas :
1. ¿Cree usted que se debe ampliar el concepto y aplicación de bielas en un sistema estructural?
2. ¿Considera que la vinculación correspondiente a un empotramiento móvil o biela es aplicable en estructuras en la vida real? ¿Por qué?
3. ¿Considera que el método de las fuerzas se puede emplear para resolver sistemas estructurales con presencia de bielas? ¿Por qué?
4. ¿Considera que el método de rotaciones se puede emplear para resolver sistemas estructurales con presencia de bielas? ¿Por qué?
5. ¿Los estudiantes deben entender el proceso de despiece en una estructura para aplicar el método de las fuerzas? ¿Por qué?
6. ¿Considera que es importante saber graficar el diagrama de corte y momento para calcular estructuras hiperestáticas? ¿Por qué?
7. ¿Por qué considera importante que el estudiante domine las restricciones de cada vínculo?
8. ¿Cuáles son los tipos de sistemas estructurales de acuerdo con su indeterminación?
9. ¿Por qué considera importante la identificación de los tipos de sistemas estructurales de acuerdo con su indeterminación?

10. ¿Qué conocimientos matemáticos considera como base para el análisis estructural?
11. ¿Qué análisis recomienda para obtener las reacciones de un pórtico con cargas rectangulares?
12. ¿Qué análisis recomienda para obtener las reacciones de una viga simplemente apoyada con una carga triangular actuando sobre ella?
13. ¿Cómo recomienda obtener la resultante cuando se tiene una carga trapezoidal?
14. ¿Qué estructuras en la vida real pueden servir de ejemplo de la aplicación de empotramientos móviles o bielas?
15. ¿Considera que el dominio y la aplicación del Trabajo virtual en el análisis estructural es importante? ¿Por qué?
16. ¿Cree que contar con un manual de análisis estructural que contenga explicación teórica y práctica sobre los métodos de las fuerzas y rotaciones con la presencia de bielas sería beneficioso para reforzar el conocimiento de los estudiantes? ¿Por qué?
17. ¿Por qué es importante conocer los puntos de inflexión a la hora de realizar un diseño?
18. ¿Qué importancia tiene conocer los esfuerzos internos que se generan en una estructura?

APÉNDICE B: VERIFICACIÓN DE ENTREVISTA ESTRUCTURADA.



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

CARTA DE VALIDACIÓN METODOLÓGICA DEL INSTRUMENTO PARA ELABORACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO

Estimada Prof. Milbet Rodríguez,

Por medio de la presente, debido a su amplia experiencia profesional como Ingeniero Civil. Mi persona, Lujé. P. Carlos. D titular del número de cédula **E84.613.479**. Solicito, la validación del presente instrumento para la recolección de datos e información del trabajo de grado titulado: **“MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPER ESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS FUERZAS Y ROTACIONES”**, Este instrumento de medición tiene como objetivo determinar la opinión de diversos expertos sobre el cálculo y análisis estructural.

Investigador:

Carlos. Lujé

Tutor:

Ing. Luis Francisco. Rodríguez

Se agradece evaluar, analizar y validar el presente instrumento.



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

Título de la investigación:

Manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.

Objetivo General:

Elaborar un manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones

Objetivos Específicos:

- Diagnosticar el conocimiento previo de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, sobre el análisis y cálculo de las estructuras hiper estáticas con bielas.
- Determinar el contenido programático correspondiente a las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiper estáticas.
- Desarrollar un manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas que incluya una metodología de acuerdo con los lineamientos estructurales, clara y precisa.

Anexo A

Cuadro de Operacionalización de variables

Objetivo General: Elaborar, un manual de análisis y cálculo de estructuras hiperestáticas con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y rotaciones.

Objetivo Específico	Variables	Definición	Dimensión	Indicadores	Ítems	Instrumento
Diagnosticar el conocimiento previo de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez, sobre el análisis y cálculo de las estructuras hiperestáticas con bielas.	Situación actual de análisis y cálculo esencial de estructuras básicas, en los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad José Antonio Páez.	Se entiende como análisis esencial a las estructuras que se pueden resolverse aplicando las ecuaciones de estática, suma de fuerzas vertical, horizontal y momento flector.	Vínculos de la estructura	Reacciones	1, 2, 11, 12 y 13	Entrevista estructurada y evaluación diagnóstica.
			Grados de Libertad de la estructura	Restricciones	2, 7 y 14	
			Diagrama de fuerza axial	Fuerza interna longitudinal	6	
			Diagrama de fuerza cortante	Fuerza interna transversal	6	
			Diagrama de Momento Flector	Fuerza interna torsión	6	
			Despiece de la estructura	Equilibrio interno	2 y 5	
			Punto de Inflexión	Torsión interna máxima	17	
Determinar el contenido programático correspondiente a las materias que se deben emplear para la resolución y cálculo de estructuras hiperestáticas.	Contenido programático correspondiente a la resolución de estructuras isostáticas e hiperestáticas.	Son todas las materias que permiten el cálculo de estructuras estáticas (determinadas o en equilibrio) como estructuras hiperestáticas (indeterminadas).	Ecuaciones diferenciales	Integrales definidas	10	Entrevista y evaluación diagnóstica.
			Mecánica Racional	Vigas y pórticos estáticos	8 y 9	
			Resistencia de Materiales	Esfuerzos internos en pórticos	18	
			Introducción al análisis estructural	Trabajo virtual	15	
			Estructuras I	Método de fuerzas	3 y 16	
			Estructuras II	Método de rotaciones	4 y 16	

Validación de Instrumento (Ítems de Entrevista)

Leer cuidadosamente cada recuadro y marca con una (X) la calificación que otorgará a cada factor a validar con sus variables, de acuerdo con los siguientes aspectos.

Ítems	Redacción			Pertinencia de los objetivos		Observaciones
	Clara	Confusa	Tendenciosa	Pertinente	No pertinente	
1	✓			✓		
2	✓			✓		
3	✓			✓		
4	✓			✓		
5	✓			✓		
6	✓			✓		
7	✓			✓		
8	✓			✓		
9	✓			✓		
10	✓			✓		
11	✓			✓		
12	✓			✓		
13	✓			✓		
14	✓			✓		
15	✓			✓		
16	✓			✓		
17	✓			✓		
18	✓			✓		

Fuente autor. Luje, C. (2023).

Prof. Milbet Rodríguez


Firma

15/05/2023
Fecha

Descripción del Especialista: Doctora.



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

***A. CARTA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTO PARA ELABORACIÓN DEL
TRABAJO DE GRADO***

Estimado Ing. Manuel Figueira,

De acuerdo a su amplia experiencia profesional como Ingeniero Civil profesor en las cátedras de Topografías y Dibujo de Proyectos. Mi persona, Lujé. P. Carlos. D titular del número de cédula de identidad **E84.613.479**. Solicito, la validación del presente instrumento para la recolección de datos e información del Trabajo de Grado titulado: **“MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPER ESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS FUERZAS Y ROTACIONES”**.

Este instrumento de medición cualitativo-cuantitativo está estructurado como una entrevista estructurada, la cual tiene como objetivo determinar el análisis de los docentes activos de la Universidad José Antonio Páez en la rama estructural, en diversos temas sobre el cálculo y análisis estructural.

Ing. Manuel Figueira
C.I.: V-17315996



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

II. FORMATO DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS JUICIO DE EXPERTOS

A continuación, se presenta una serie de aspectos a considerar para validar la Entrevista Estructurada, tomando en cuenta los cuatro (4) factores y sus distintas variables que conforman el instrumento de recolección de datos, el cual será aplicado en el proyecto de grado del bachiller **Luje P. Carlos D.** titular de la cédula de identidad **E-84.613.479**, en su trabajo de grado titulado: **“MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPER ESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS FUERZAS Y ROTACIONES.”**.

Instrucciones

Leer cuidadosamente cada recuadro y marque con una (X) la calificación que otorgará a cada factor a validar con sus variables, de acuerdo a los siguientes aspectos a evaluar:

- Coherencia en los planteamientos.
- Lenguaje acorde al grado de instrucción.
- Pertinencia con los objetivos.
- Redacción adecuada.
- Veracidad y calidad del contenido.

Calificación:

- Excelente (E)
- Satisfactorio (S)
- Bueno (B)
- Regular (R)
- Deficiente (D)

FACTORES PARA EVALUAR Y SUS VARIABLES.	ASPECTOS PARA EVALUAR																								
	Coherencia en los planteamientos					Lenguaje acorde al grado de instrucción					Pertinencia con los objetivos					Redacción Adecuada					Veracidad y Calidad del Contenido				
	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D
1. Conocer el tipo de vinculación calculando las reacciones del sistema estructural.		X					X					X					X					X			
2. Identificar las ecuaciones para fuerza cortante como momento flector del sistema estructural.		X					X					X					X					X			
3. Determinar los puntos de inflexión o puntos críticos del sistema estructural.		X					X					X					X					X			
4. Análisis de los diagramas para fuerza axial, cortante y momento flector.		X					X					X					X					X			

TABLA DE EVALUACIÓN. Validada por Especialista.

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO	
APLICABLE	X
NO APLICABLE	
APLICABLE CONSIDERANDO LAS OBSERVACIONES	

Consideraciones Generales	SI	NO	OBSERVACIONES
El Instrumento tiene instrucciones claras y precisas para que los docentes puedan realizar un análisis y comentario respecto al análisis estructural.	X		
La presentación del instrumento Entrevista Estructurada es adecuada. De no ser así, señale las variables o factores a corregir.	X		
Los factores y variables son adecuados para recolectar la información necesaria. De ser negativa su respuesta, sugiera los factores o variables que deben incluirse y/o eliminarse.	X		



Ing. Manuel Figueira
C.I. V- 1731599

Ing. Manuel Figueira
C.I V-1731599

APÉNDICE C: VERIFICACIÓN DE PRUEBA DIAGNÓSTICA.



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

A. CARTA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTO PARA ELABORACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO

Estimada Prof. Ing. Ana Hernández,

De acuerdo a su amplia experiencia profesional como Ingeniero Civil. Mi persona, Luján P. Carlos. D titular del número de cédula **E84.613.479**. Solicito, la validación del presente instrumento prueba diagnóstica para la recolección de datos e información del Trabajo de Grado titulado: **“MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS FUERZAS Y ROTACIONES”**.

Este instrumento de medición cualitativo-cuantitativo está estructurado como una prueba diagnóstica, la cual tiene como objetivo determinar el conocimiento de los estudiantes de la Universidad José Antonio Páez en la rama estructural, en diversos temas sobre el cálculo y análisis estructural.

Ana L. Hernández C.
20.229.913.

Ing. Ana. Hernández
C.I: V- 20229913



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

III. FORMATO DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS JUICIO DE EXPERTOS

A continuación, se presenta una serie de aspectos a considerar para validar la Prueba Diagnóstica, tomando en cuenta los cuatro (4) factores y sus distintas variables que conforman el instrumento de recolección de datos, el cual será aplicado en el proyecto de grado del bachiller **Luje P. Carlos D.** titular de la cédula de identidad **E-84.613.479**, en su trabajo de grado titulado: **“MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON BIELAS, BASADO EN LOS MÉTODOS DE LAS FUERZAS Y ROTACIONES.”**.

Instrucciones

Leer cuidadosamente cada recuadro y marque con una (X) la calificación que otorgará a cada factor a validar con sus variables, de acuerdo a los siguientes aspectos a evaluar:

- Coherencia en los planteamientos.
- Lenguaje acorde al grado de instrucción.
- Pertinencia con los objetivos.
- Redacción adecuada.
- Veracidad y calidad del contenido.

Calificación:

- Excelente (E)
- Satisfactorio (S)
- Bueno (B)
- Regular (R)
- Deficiente (D)

FACTORES PARA EVALUAR Y SUS VARIABLES.	ASPECTOS PARA EVALUAR																								
	Coherencia en los planteamientos					Lenguaje acorde al grado de instrucción					Pertinencia con los objetivos					Redacción Adecuada					Veracidad y Calidad del Contenido				
	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D	E	S	B	R	D
1. Conocer el tipo de vinculación calculando las reacciones del sistema estructural.		X					X					X					X					X			
2. Identificar las ecuaciones para fuerza cortante como momento flector del sistema estructural.		X					X					X					X					X			
3. Determinar los puntos de inflexión o puntos críticos del sistema estructural.		X					X					X					X					X			
4. Análisis de los diagramas para fuerza axial, cortante y momento flector.		X					X					X					X					X			

TABLA DE EVALUACIÓN. Validada por Especialista.



Prueba Diagnóstica Tipo A

Esta prueba diagnóstica tiene la finalidad de verificar sus conocimientos básicos en el análisis estructural y su análisis en la resolución del mismo.

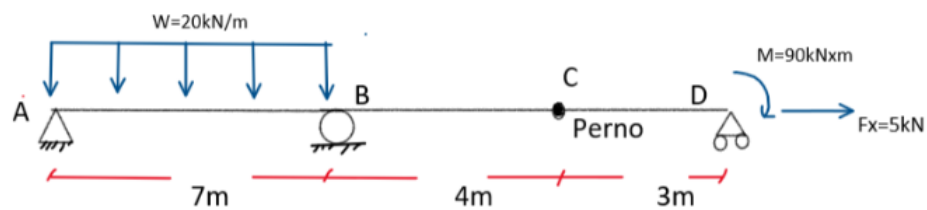
Nombre y apellido: _____

Fecha: _____

Semestre : _____

1. Resuelva el sistema estructural de una viga se pide :

- Grado de Indeterminación.
- Cálculo de reacciones del sistema estructural.
- Cálculo de las ecuaciones de cortante y momento flector.
- Puntos de inflexión del sistema.
- Cálculo de los diagramas Fuerza axial, cortante y momento flector.





Prueba Diagnóstica Tipo B

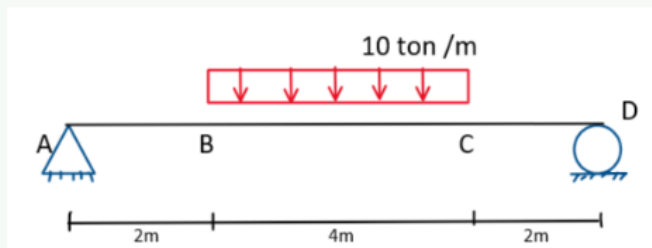
Nombre y apellido: _____

Fecha: _____

Semestre : _____

Esta prueba diagnóstica tiene la finalidad de verificar sus conocimientos básicos en el análisis estructural y su análisis en la resolución del mismo.

1. Resuelva el sistema estructural de viga se pide :
 - a) Cálculo de reacciones del sistema estructural.
 - b) Ecuaciones de cortante y momento flector.
 - c) Puntos de Inflexión.
 - d) Cálculo de los diagramas Fuerza axial, cortante y momento flector.





Prueba Diagnóstica Tipo C

Nombre y apellido: _____

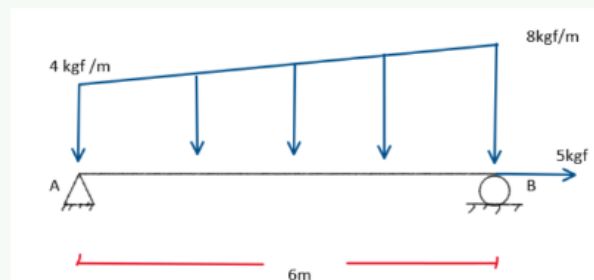
Fecha: _____

Semestre : _____

Esta prueba diagnóstica tiene la finalidad de verificar sus conocimientos básicos en el análisis estructural y su análisis en la resolución del mismo.

1. Resuelva el sistema estructural de viga se pide :

- Grado de Indeterminación.
- Cálculo de reacciones del sistema estructural.
- Ecuaciones de cortante y momento flector.
- Puntos de Inflexión.
- Cálculo de los diagramas Fuerza axial, cortante y momento flector.



Consideraciones Generales	SI	NO	Observaciones
El Instrumento tiene instrucciones claras y precisas para que los estudiantes puedan realizar un análisis estructural básico.	X		
La presentación del instrumento Prueba Diagnóstica es adecuada. De no ser así, señale las variables o factores a corregir.	X		
Los factores y variables son adecuados para recolectar la información necesaria. De ser negativa su respuesta, sugiera los factores o variables que deben incluirse y/o eliminarse.	X		

VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO	
APLICABLE	X
NO APLICABLE	
APLICABLE CONSIDERANDO LAS OBSERVACIONES	

Ana L. Hernández C.
20.229.913.

Ing. Ana. Hernández
C.I: V- 20229913

**APÉNDICE D: MANUAL DE ANÁLISIS Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS
HIPERESTATICAS CON BIELAS**



República Bolivariana de
Venezuela

Universidad José Antonio Páez

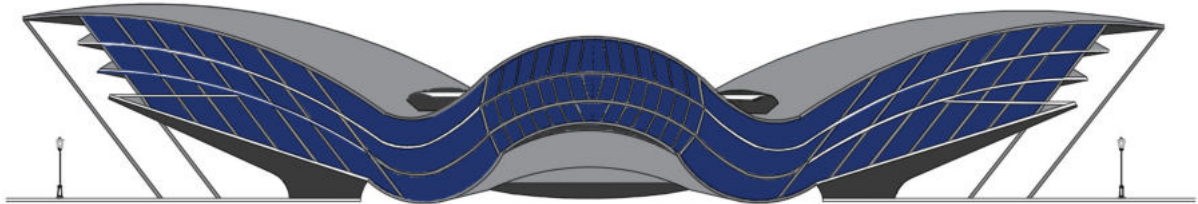
Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Civil

Carrera Ingeniería Civil

Manual de análisis y cálculo de estructuras hiper estáticas
con bielas, basado en los métodos de las fuerzas y
rotaciones.

Proyecto de Trabajo de Grado para optar al título de Ingeniero Civil

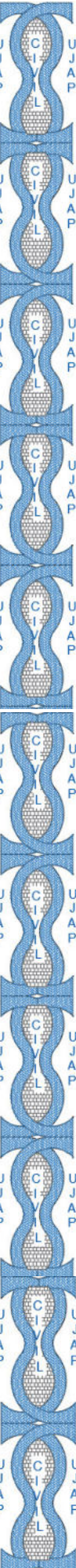


CIVIL ENGINEER

Autor: Ing. Carlos Lujé

Tutor: Ing. Luis Francisco Rodríguez

Venezuela - Carabobo -San Diego





Resumen / Abstracción :

El cálculo de estructuras hiper estáticas con bielas, es un campo limitado a la hora de realizar su proceso de solución, dificultando al estudiante en la comprensión de este tipo de estructuras, por tanto, se necesita comprender varios tópicos de cálculo estructural, como análisis de vínculos, fuerzas redundantes, grado de hiper estaticidad, cálculo de reacciones, despiece de la estructura, isostatización, ecuaciones de fuerza axial, cortante y momento flector, sistema virtual, entre otros.

El análisis estructural, es una ciencia que se encarga de la elaboración de métodos de cálculo para determinar la resistencia, rigidez, estabilidad, durabilidad, y seguridad de las estructuras, obteniéndose los valores necesarios para un diseño económico y seguro.

Además, se resuelven estructuras en el plano y en el espacio. Los problemas se resuelven en dos dimensiones mientras que las espaciales en tres dimensiones. Generalmente para el cálculo de estructuras espaciales se tiende a dividir en elementos planos, debido a que su cálculo es mucho más sencillo, pero no en todos los casos es posible dicha metodología. Esto se debe, a que la mayoría de los métodos principales y teoremas están modelados para estructuras en el plano.

Así mismo, el análisis estructural se divide en problemas lineales y no lineales, distinguiéndose la no linealidad geométrica y no linealidad física. La no linealidad geométrica surge cuando existen grandes desplazamientos y deformaciones de los elementos, lo que es característico en puentes de grandes luces y edificios altos. La no linealidad física se produce cuando no existe una dependencia proporcional entre los esfuerzos y deformaciones, esto es, cuando se utilizan materiales inelásticos, lo que es característico en todas las construcciones.

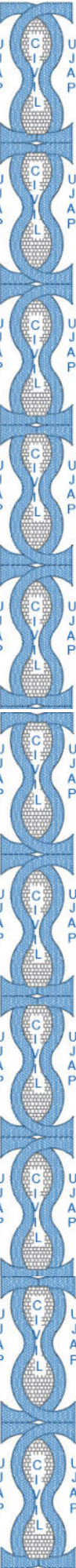
Se pretende otorgar al lector, una guía para resolver estructuras hiper estáticas con bielas, de forma práctica y con una interfaz clara, así, satisfaga al lector esos vacíos a la hora de realizar un análisis y cálculo de este tipo de estructuras.

De igual manera, permitirá al estudiante un repaso o reforzar conocimientos previos como derivadas, integrales indefinidas, integrales definidas, mecánica racional, resistencia de materiales, análisis estructural, entre otros.

Por tanto, la visión de este manual pretende que el estudiante pueda realizar un reconocimiento en los tipos de estructuras, y resolver sin ninguna dificultad, estructuras que mantengan bielas internas o externas (empotramiento móvil interno o externo) como vínculos en una estructura.

Finalmente, el lector podrá hacer uso de las tablas más utilizadas en el cálculo estructural, si desea reforzar los conocimientos y analizar las deformaciones con los valores de momento máximo para los casos más comunes en análisis estructural.





Agradecimientos:

En este documento y en el trabajo de grado de investigación realizado han colaborado otras personas que es de justicia mencionar pues sin su ayuda, seguramente no habría sido posible llevarlo a término.

En primer lugar, quiero mostrar mi agradecimiento a la profesora Ing. Ana Hernández y mi tutor de tesis Ing. Luis Francisco Rodríguez, que han sido al mismo tiempo, mis tutores en esta investigación por su aporte con sus conocimientos, que han hecho posible el que yo esté optando al título como Ingeniero Civil. Creo que sinceramente nunca seré capaz de pagar su ayuda y guía en este trabajo de tesis.

Además, quiero hacer una mención especial en esta dedicatoria a mis padres Carlos y Marlene que son las personas de mi admiración, desde pequeño me han formado con valores, respeto, cariño y amor, me otorgaron sus enseñanzas de vida, me han formado como una persona humilde y responsable, y en este capítulo de mi vida, mis padres me han impulsado en los obstáculos más fuertes que se dieron entorno a mis estudios, así, en esta faceta que estoy por culminar, quiero agradecerles por todo su cariño incondicional, por sus consejos y su aliento de seguir adelante; siempre estaré en deuda, mi amor y cariño por mis padres será como el tiempo infinito.

A mis hermanos Andrés, Johana, y Paula, mi sobrina Emy, por su cariño, apoyo y consejos, siendo el motivo de mi superación y dedicación constante. Como a Dios por siempre escucharme y estar conmigo en todo momento.

También doy las gracias al resto de profesores que me han dado las mejores enseñanzas a lo largo de la carrera y que han otorgado los conocimientos adecuados para complementarme como ingeniero civil y es de mi agradecimiento hacer mención al profesor Ing. Ángel Medina, el profesor Ing. Manuel Figueira, la profesora Ing. Alicia de Pizzella, la profesora Ing. Emerly Castillo, la profesora Ing. Jutzy Herrada, El profesor Cesar Quintana, y el profesor Ing. Johan Mogollón, todos ellos que con su orientación me han dado sus mejores enseñanzas a lo largo de la carrera.

A todos mi amigos, conocidos y compañeros que en algún momento hemos compartido y me han sabido extender la mano, me han dado un trato afectivo.

Por último, me gustaría dedicar este trabajo de grado en memoria de mi primo Santiago Damián donde se encuentre, decirle que el cariño y aprecio que tengo siempre será sincero, muchas gracias.



Vínculos de una estructura

1.1 Vínculos	17
1.2 Clases de vínculos	17
1.2.1 Vínculos externos que restringen un desplazamiento o de primera especie	17
1.2.2 Vínculos externos que restringen dos desplazamientos o de segunda especie	17
1.2.3 Vínculos externos que restringen tres desplazamientos o de tercera especie	17
1.2.4 Vínculos internos.	18
1.3 Reacciones o Solicitaciones	18
1.4 Condición de signos para diagramas Axial, Cortante y Momento	18

Introducción a Estructuras

2.1 Clases de estructuras	19
2.2 Grado de indeterminación	19
2.3 Grado de indeterminación de una estructura Viga - Pórtico - Cercha	19
2.4 Ejemplos de grado de indeterminación de una estructura	20

Estructuras estáticas vigas

3.1 Introducción elementos estructurales - vigas	23
3.2 Sistemas de vigas en la vida real	23
3.3 Ejercicios	24
3.3.1 Ejercicio	24
3.3.2 Ejercicio	28
3.3.3 Ejercicio	31

Estructuras estáticas pórticos

4.1 Introducción elementos estructurales - pórticos	35
4.2 Condición axialmente infinitos (A_{∞})	35
4.3 Condición inercialmente infinitos (I_{∞})	35
4.4 Pórticos Isostáticos	36
4.5 Ejercicios	36
4.5.1 Ejercicio	36

Método de las fuerzas

5.1 Método de las fuerzas	41
5.2 Principio de Superposición	41
5.3 Fuerzas redundantes o estados complementarios	42
5.4 Ley de Hooke	42
5.5 Flexibilidad	42
5.6 Rigidez	42
5.7 Ecuaciones de compatibilidad	42
5.8 Matriz de flexibilidad	42
5.9 Ley de Maxwell	42
5.10 Asentamientos en los apoyos	43
5.11 Variación de temperatura	43
5.12 Ejercicios	44
5.12.1 Ejercicio	44
5.12.2 Ejercicio	47
5.12.3 Ejercicio	49
5.12.4 Ejercicio	55
5.12.5 Ejercicio	62
5.12.6 Ejercicio	67
5.12.7 Ejercicio	73
5.12.8 Ejercicio	79
5.12.9 Ejercicio	87
5.12.10 Ejercicio	96

Método de rotaciones

6.1 Método de rotaciones	102
6.2 Ecuación general del método de rotaciones	102
6.3 Convención de signos	102
6.4 Proceso para realizar el cálculo de rotaciones al tener $\varphi = 0$	102
6.5 Proceso para realizar el cálculo de rotaciones al tener $\varphi \neq 0$	103





Índice de contenido :

Pag.

Método de rotaciones

6.6 Ejercicios	103
6.6.1 Ejercicio	103
6.6.2 Ejercicio	105
6.6.3 Ejercicio	108
6.6.4 Ejercicio	113
6.6.5 Ejercicio	117
6.6.6 Ejercicio	123
6.6.7 Ejercicio	129
6.6.8 Ejercicio	133
6.6.9 Ejercicio	139
6.6.10 Ejercicio	145
7. Ejercicios Propuestos	151
8. Bibliografía	153

Índice de tablas :

Propiedades de áreas	13
Momentos de empotramiento	14
Diagramas de momento y expresiones para la deflexión máxima	15
Diagramas y ecuaciones para el método de tres momentos	16
Tabla 1. Valores de distancia - pendiente - carga puntual y cortante	27
Tabla 2. Valores de distancia - carga puntual - distancia al centro de gravedad	27

Índice de imágenes:

Vínculos de una estructura:

Figura.1 Vínculos externos de primera especie	17
Figura.2 Vínculos externos de segunda especie	17
Figura.3 Vínculos externos de tercera especie	17
Figura.4 Vínculos Internos	18
Figura.5 Convención de resistencia de materiales	18

Introducción a Estructuras:

Figura.6 Tipos de estructuras hipostática - Isostática - Hiperestática	19
Figura.7 Estructura hiperestática grado 1	20
Figura.8 Estructura hiperestática grado 4	20
Figura.9 Pórtico hiperestática grado 3	20
Figura.10 Pórtico hiperestático grado 1 con junta articulada en A	20
Figura.11 Cercha hiperestática externa grado 2	21
Figura.12 Cercha hiperestática externa grado 1	21
Figura.13 Sistema estructural hiperestática grado 1, con biela interna y empotramiento móvil externo	22
Figura.14 Sistema estructural isostática con biela interna y externa	22
Figura.15 Estructura isostática grado 0, con perno interno	22

Estructuras estáticas vigas:

Figura.16 Vigas de acero en San Diego	23
Figura.17 Viga de madera	23
Figura.18 Cercha de madera en los Andes	23
Figura.19 Vigas de madera en Valencia	23
Figura.20 Sistema estructural con biela interna o empotramiento móvil	23
Figura.21 Idealización de estructura con carga trapezoidal	24
Figura.22 Sistema de cargas equivalentes de carga trapezoidal	24
Figura.23 Sección de corte 1-1 en carga y viga	24
Figura.24 Discretización de carga trapezoidal en rectangular y triangular	25
Figura.25 Diagrama de cortante de carga trapezoidal	25
Figura.26 Diagrama de Momento de carga trapezoidal	26
Figura.27 Diagrama de fuerza axial de carga trapezoidal	26
Figura.28 Fuerza puntual equivalente en el centro de gravedad	26
Figura.29. Sistema de referencia en carga trapezoidal	26
Figura.30 Corte 1-1 en carga trapezoidal	26
Figura.31 Diagrama de cortante de carga trapezoidal	27
Figura.32 Diagrama de momento flector de carga trapezoidal	27
Figura.33 Diagrama de fuerza axial de carga trapezoidal	27



**Índice de imágenes:****Estructuras estáticas vigas:**

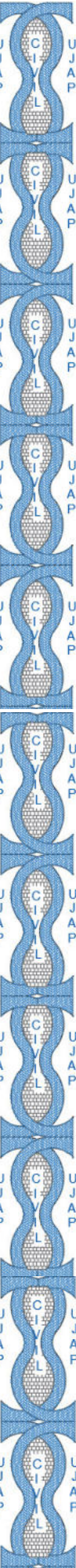
Figura.34 Idealización de sistema estructural con biela interna	28
Figura.35 Reacciones del sistema estructural con biela interna	28
Figura.36 Discretización del sistema de viga con biela interna	28
Figura.37 Sección discretizada de viga, lado izquierdo	29
Figura.38 Sección discretizada de viga, lado derecho	29
Figura.39 Cortes en el sistema idealizado con fuerzas externas e internas	29
Figura.40 Sección de corte 1-1 con fuerzas externas e internas	29
Figura.41 Sección de corte 2-2 con fuerzas externas e internas	30
Figura.42 Sección de corte 3-3 con fuerzas externas e internas	30
Figura.43 Sección de corte 4-4 con fuerzas externas e internas	30
Figura.44 Sistema de fuerzas y reacciones externas	30
Figura.45 Diagrama de cortante de sistema de viga con biela interna	30
Figura.46 Diagrama de momento flector sistema de viga con biela interna	31
Figura.47 Diagrama de fuerza axial sistema de viga con biela interna	31
Figura.48 Idealización de estructura con empotramiento móvil externo	31
Figura.49 Fuerzas y reacciones externas de estructura con empotramiento móvil externo	31
Figura.50 Discretización sección A-B	32
Figura.51 Discretización sección D-E	32
Figura.52 Discretización sección B-D	32
Figura.53 Sistema estructural global con cortes totales	32
Figura.54 Corte 1-1 sistema de viga con empotramiento móvil externo	33
Figura.55 Corte 2-2 sistema de viga con empotramiento móvil externo	33
Figura.56 Corte 3-3 sistema de viga con empotramiento móvil externo	33
Figura.57 Corte 4-4 sistema de viga con empotramiento móvil externo	33
Figura.58 Diagrama de fuerza cortante, viga con empotramiento móvil externo	34
Figura.59 Diagrama de momento flector, viga con empotramiento móvil externo	34
Figura.60 Diagrama de momento flector, viga con empotramiento móvil externo	34

Estructuras estáticas pórticos:

Figura.61 Deformada de un pórtico, condición Axialmente infinito	35
Figura.62 Deformada de un pórtico, condición Inercialmente infinito	35
Figura.63 Sistema de pórticos vigas y columnas de acero	36
Figura.64 Sistema estructural de pórtico de concreto armado	36
Figura.65 Sistema estructural pórtico de madera	36
Figura.66. Sistema estructural pórtico de concreto con columnas y vigas inclinadas	36
Figura.67 Pórtico de vigas y columnas inclinadas de concreto armado	36
Figura.68 Pórtico con cercha de madera	36
Figura.69 Idealización de sistema estructural con columnas inclinadas	36
Figura.70 Estructura con biela interna y columna inclinada	37
Figura.71 Discretización de estructura con biela interna y columna inclinada	37
Figura.72 Discretización lado derecho de la biela interna	37
Figura.73 Discretización lado izquierdo de la biela interna	37
Figura.74 Discretización reacciones externas e internas	38
Figura.75 Linealización de reacción Ax	38
Figura.76 Linealización de reacción Ay	38
Figura.77 Fuerza resultante vertical y horizontal	38
Figura.78 Linealización de carga distribuida	38
Figura.79 Carga distribuida perpendicular a la columna	38
Figura.80 Cortes globales de estructura con biela interna y columna inclinada	39
Figura.81 Sección de corte 1-1 columna inclinada	39
Figura.82 Sección de corte 2-2 columna inclinada y viga	39
Figura.83 Diagrama de fuerza cortante de estructura con biela interna y columna inclinada	39
Figura.84 Diagrama de momento flector de estructura con biela interna y columna inclinada	40
Figura.85 Diagrama de fuerza axial de estructura con biela interna y columna inclinada	40

Método de las fuerzas

Figura.86 Principio de superposición	41
Figura.87 Desplazamientos para cada fuerza	41
Figura.88 Matriz de compatibilidad	42
Figura.89 Idealización de la ley de Maxwell	42





Método de las fuerzas:

Figura.90 Coeficientes de flexibilidad	43
Figura.91 Idealización de asentamientos en una estructura	43
Figura.92 Ecuaciones de compatibilidad	43
Figura.93 Sistema de viga hiperestática	44
Figura.94 Sistema de viga real	44
Figura.95 Sistema de viga principal	44
Figura.96 Sistema de viga virtual	44
Figura.97 Reacciones externas sistema virtual	44
Figura.98 Corte 1-1 viga hiperestática	44
Figura.99 Reacciones externas sistema principal	45
Figura.100 Corte 1-1 viga hiperestática	45
Figura.101 Reacciones externas sistema real	46
Figura.102 Corte 1-1 viga hiperestática	46
Figura.103 Diagramas de corte y momento del sistema real	46
Figura.104 Viga hiperestática	47
Figura.105 Sistema de viga real	47
Figura.106 Sistema de viga principal	47
Figura.107 Sistema de viga virtual	47
Figura.108 Viga hiperestática sistema virtual	47
Figura.109 Corte 1-1 viga hiperestática	47
Figura.110 Diagrama de corte y momento sistema virtual	48
Figura.111 Viga hiperestática sistema principal	48
Figura.112 Corte 1-1 sistema principal	48
Figura.113 Diagrama de corte y momento sistema principal	48
Figura.114 Viga hiperestática sistema real	49
Figura.115 Diagrama de corte y momento sistema real	49
Figura.116 Pórtico hiperestática con biela interna	49
Figura.117 Sistema real pórtico	50
Figura.118 Sistema principal pórtico	50
Figura.119 Sistema virtual (1) pórtico	50
Figura.120 Sistema virtual (2) pórtico	50
Figura.121 Discretización (Biela a la derecha)	50
Figura.122 Discretización (Biela a la izquierda)	50
Figura.123 Sistema global de cortes en el pórtico	51
Figura.124 Diagrama de corte y momento flector, sistema principal	51
Figura.125 Reacciones sistema virtual (1) pórtico	51
Figura.126 Sistema virtual (1) cortes globales	51
Figura.127 Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (1)	52
Figura.128 Reacciones sistema virtual (2) pórtico	52
Figura.129 Sistema virtual (2) cortes globales	52
Figura.130 Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (2)	52
Figura.131 Discretización sistema real (biela lado derecho)	54
Figura.132 Discretización sistema real (biela lado izquierdo)	55
Figura.133 Diagrama de corte y momento flector, sistema real	55
Figura.134 Pórtico hiperestático con biela interna	55
Figura.135 Sistema real pórtico	56
Figura.136 Sistema principal pórtico	56
Figura.137 Sistema virtual (1) pórtico	56
Figura.138 Sistema virtual (2) pórtico	56
Figura.139 Discretización pórtico (biela lado derecho)	56
Figura.140 Discretización pórtico (biela lado izquierdo)	57
Figura.141 Sistema de cortes globales, sistema principal	57
Figura.142 Diagrama de corte y momento flector, sistema principal	57
Figura.143 Sistema virtual (1) pórtico	57
Figura.144 Sistema de cortes globales, sistema virtual (1)	57
Figura.145 Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (1)	58
Figura.146 Sistema virtual (2) pórtico	58
Figura.147 Sistema de cortes globales, sistema virtual (2)	58
Figura.148 Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (2)	59
Figura.149 Discretización pórtico (biela a la derecha)	61
Figura.150 Discretización pórtico (biela a la izquierda)	61
Figura.151 Diagrama de corte y momento flector, sistema real	61





Método de las fuerzas:

Figura.152 Idealización de pórtico hiperestático con biela interna y columna inclinada 62

Figura.153 Sistema real pórtico con biela interna y columna inclinada 62

Figura.154 Sistema principal con biela interna y columna inclinada 62

Figura.155 Sistema virtual (1) pórtico con biela interna y columna inclinada 62

Figura.156 Discretización de pórtico (a la izquierda de la biela) 62

Figura.157 Discretización de pórtico (a la derecha de la biela) 63

Figura.158 Linealización de carga distribuida 63

Figura.159 Carga distribuida perpendicular a la columna 63

Figura.160 Linealización de reacción Ay 63

Figura.161 Sistema global de cortes sistema principal 63

Figura.162 Diagrama de corte y momento flector, sistema principal 64

Figura.163 Sistema virtual (1) pórtico con biela interna y columna inclinada 64

Figura.164 Linealización de fuerza virtual perpendicular a la columna 64

Figura.165 Cortes globales sistema virtual (1) 64

Figura.166 Diagramas de corte y momento flector, sistema virtual (1) 65

Figura.167 Discretización de pórtico (a la izquierda de la biela) 66

Figura.168 Discretización de pórtico (a la derecha de la biela) 66

Figura.169 Linealización de reacciones Ax y Ay 66

Figura.170 Corte 1-1 sistema real 66

Figura.171 Corte 2-2 sistema real 67

Figura.172 Diagramas de corte y momento flector, sistema real 67

Figura.173 Estructura con biela interna 67

Figura.174 Estructura con biela interna, Sistema principal 68

Figura.175 Estructura con biela interna, Sistema virtual 1 68

Figura.176 Estructura con biela interna, Sistema virtual 2 68

Figura.177 Despiece biela interna 68

Figura.178 Despiece biela interna 68

Figura.179 Linealización de reacción Ay 69

Figura.180 Linealización de fuerza distribuida 69

Figura.181 Diagrama de corte y momento sistema principal 69

Figura.182 Sistema virtual 1, con vínculo modificado 69

Figura.183 Sistema virtual 1, cortes globales 70

Figura.184 Diagramas de corte y momento del sistema virtual 1 70

Figura.185 Sistema virtual 2, con vínculo modificado 70

Figura.186 Diagramas de corte y momento del sistema virtual 2 71

Figura.187 Despiece biela interna lado izquierdo 72

Figura.188 Despiece biela interna lado derecho 72

Figura.189 Linealización de reacciones 72

Figura.190 Diagrama de corte y momento del sistema real 73

Figura.191 Estructura mezzanina con biela interna 73

Figura.192 Estructura modificada por su voladizo 73

Figura.193 Idealización de mezzanina de nave industrial 74

Figura.194 Sistemas estructurales estables posibles 74

Figura.195 Despiece biela interna, lado derecho 74

Figura.196 Despiece biela interna, lado izquierdo 75

Figura.197 Diagrama de corte y momento del sistema principal 75

Figura.198 Sistema virtual 1, con cortes globales 75

Figura.199 Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1 76

Figura.200 Sistema virtual 2, con cortes globales 76

Figura.201 Diagrama de corte y momento del sistema virtual 2 76

Figura.202 Despiece biela interna, lado derecho 78

Figura.203 Despiece biela interna, lado izquierdo 78

Figura.204 Diagrama de corte y momento del sistema real 78

Figura.205 Idealización estructura con biela externa e interna 79

Figura.206 Sistemas estructurales estables posibles 79

Figura.207 Despiece biela interna, lado izquierdo 80

Figura.208 Despiece biela interna, lado derecho 80

Figura.209 Isostatización de la estructura, sistema principal 80

Figura.210 Linealización de fuerzas internas 80

Figura.211 Linealización de fuerzas internas 81

Figura.212 Linealización de carga distribuida 81

Figura.213 Diagrama de corte y momento del sistema principal 81

Figura.214 Sistema virtual 1, con cortes globales 82





Método de las fuerzas:

Figura.215 Linealización de fuerza interna	82
Figura.216 Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1	82
Figura.217 Sistema virtual 1, con cortes globales	83
Figura.218 Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1	83
Figura.219. Sección transversal de vigas y columnas	83
Figura.220. Estructura con reacciones obtenidas	86
Figura.221. Diagrama de corte y momento sistema real	87
Figura.222 Idealización de estructura con biela interna y vigas inclinadas	87
Figura.223. Sistemas estructurales estables posibles	88
Figura.224. Despiece, biela lado derecho	88
Figura.225. Sistema estructural equivalente	88
Figura.226. Despiece, biela lado izquierdo	89
Figura.227. Isostatización de la estructura, sistema principal	89
Figura.228. Linealización de reacción externa	89
Figura.229. Linealización de fuerza interna	89
Figura.230. Diagrama de corte y momento del sistema principal	90
Figura.231. Sistema virtual 1, con cortes globales	90
Figura.232. Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1	90
Figura.233. Sistema virtual 2, con cortes globales	91
Figura.234. Diagrama de corte y momento del sistema virtual 2	91
Figura.235. Sección transversal de vigas y columnas	91
Figura.236. Despiece, biela lado izquierdo	94
Figura.237. Despiece, biela lado derecho	94
Figura.238. Linealizando reacciones externas e internas	95
Figura.239. Diagrama de corte y momento del sistema real	95
Figura.240 Idealización de estructura con biela interna y externa con vigas rectangulares	96
Figura.241. Sistemas estructurales estables posibles	96
Figura.242. Despiece, biela interna hacia abajo	97
Figura.243. Despiece, biela interna hacia arriba	97
Figura.244. Diagrama de corte y momento sistema principal	97
Figura.245 Sistema virtual 1, con cortes globales	98
Figura.246 Diagrama de corte y momento sistema virtual 1	98
Figura.247 Sistema virtual 2, con cortes globales	98
Figura.248 Diagrama de corte y momento sistema virtual 2	99
Figura.249 Sección transversal de vigas y columnas	99
Figura.250 Sistema real con reacciones obtenidas	101
Figura.251 diagramas de corte y momento del sistema real	101

Métodos de rotaciones:

Figura.252 Ecuaciones generales para rotaciones	102
Figura.253 Rotación de una barra con rotaciones en los extremos y giro como cuerpo rígido	102
Figura.254 Sistema de viga hiperestática	103
Figura.255 Deformación por rotación en B	103
Figura.256 Momento de empotramiento AB	103
Figura.257. Equilibrio en la Junta B	104
Figura.258 Diagrama de corte y momento	104
Figura.259 Idealización estructura con biela interna	105
Figura.260 Posibles grados de libertad	105
Figura.261 Deformada por rotación	105
Figura.262 Deformada por desplazamiento vertical	105
Figura.263 Deformada por desplazamiento vertical	105
Figura.264 Momento de empotramiento A-B	105
Figura.265 Momento de empotramiento B-C	106
Figura.266 Momento en los extremos A-B	106
Figura.267 Momento en los extremos B-C	106
Figura.268 Biela interna B	106
Figura.269 Traslación de momento M_p	106
Figura.270 Traslación de momento M_r	107
Figura.271 Diagrama de corte y momento	107
Figura.272 Idealización pórtico con empotramiento móvil interno	108
Figura.273 Posibles grados de libertad	108
Figura.274 Deformación por giro en B	108



Métodos de rotaciones:

Figura.275 Deformación por giro en C 108

Figura.276 Deformación por giro en D 108

Figura.277 Deformación por desplazamiento vertical izquierdo en C 109

Figura.278 Deformación por desplazamiento vertical derecho en C 109

Figura.279 Deformación por desplazamiento horizontal en B 109

Figura.280 Momento de empotramiento A-B 109

Figura.281 Momento de empotramiento B-C 109

Figura.282 Momento de empotramiento C-D 110

Figura.283 Momento de empotramiento D-E 110

Figura.284 Momentos generales A-B 110

Figura.285 Momentos generales B-C 110

Figura.286 Momentos generales C-D 110

Figura.287 Momentos generales D-E 110

Figura.288 Momentos en los extremos junta B 111

Figura.289 Momento en los extremos junta C 111

Figura.290 Momento en los extremos junta D 111

Figura.291 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento Xb 111

Figura.292 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento vertical 111

Figura.293 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento vertical 112

Figura.294 Diagrama de corte y momento 113

Figura.295 Idealización de sistema estructural con biela interna 113

Figura.296 Posibles grados de libertad 113

Figura.297 Deformación por rotación en A 113

Figura.298 Deformación por rotación en B 114

Figura.299 Deformación por desplazamiento vertical 114

Figura.300 Deformación por desplazamiento vertical 114

Figura.301 Linealización de fuerza distribuida 114

Figura.302 Momento de empotramiento de A-B 114

Figura.303 Momento de empotramiento de B-C 115

Figura.304 Momento generales de A-B 115

Figura.305 Momento generales de B-C 115

Figura.306 Junta A 115

Figura.307 Biela interna B 115

Figura.308 Trabajo virtual por desplazamiento vertical 115

Figura.309 Diagrama de corte y momento 116

Figura.310 Idealización estructura con empotramiento móvil externo 117

Figura.311 Grados de libertad posibles 117

Figura.312 Deformación por rotación en B 117

Figura.313 Deformación por rotación en C 117

Figura.314 Deformación por desplazamiento en Xb 117

Figura.315 Relación triangular por desplazamiento Xb 118

Figura.316 Deformación por desplazamiento en Xa 118

Figura.317 Momento de empotramiento A-B 118

Figura.318 Momento de empotramiento B-C 118

Figura.319 Detalle sección transversal vigas y columnas 119

Figura.320 Deformación por temperatura de alargamiento 119

Figura.321 Momentos de empotramiento en las juntas B y D 119

Figura.322 Momentos de empotramiento por temperatura en C-D 120

Figura.323 Momentos de empotramiento totales A-B 120

Figura.324 Momentos de empotramiento totales B-C 120

Figura.325 Momentos de empotramiento totales C-D 120

Figura.326 Momentos en los extremos A-B 120

Figura.327 Momentos en los extremos B-C 121

Figura.328 Momentos en los extremos C-D 121

Figura.329 Momentos generales en la Junta B 121

Figura.330 Momentos generales en la Junta C 121

Figura.331 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento Xb 121

Figura.332 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento Xa 122

Figura.333 Diagrama de fuerza cortante y momento 123

Figura.334 Diagrama de fuerza cortante y momento 123

Figura.335 Idealización de grados de libertad 123





Métodos de rotaciones:

Figura.336 Deformación por rotación en B	123
Figura.337 Deformación por rotación en C	124
Figura.338 Deformación por rotación en D	124
Figura.339 Deformación por desplazamiento en Xb	124
Figura.340 Deformación por desplazamiento en C izquierda	124
Figura.341 Deformación por desplazamiento en C derecha	125
Figura.342 Linealización de fuerza	125
Figura.343 Empotramiento para carga distribuida y momento	125
Figura.344 Empotramiento B-C	125
Figura.345 Empotramiento C-D	125
Figura.346 Empotramiento D-E	126
Figura.347 Momentos generales A-B	126
Figura.348 Momentos generales B-C	126
Figura.349 Momentos generales C-D	126
Figura.350 Momentos generales D-E	126
Figura.351 Nodo B	126
Figura.352 Biela interna C	126
Figura.353 Junta D	127
Figura.354 Trabajo virtual por desplazamiento en C izquierdo	127
Figura.355 Trabajo virtual por desplazamiento en C derecho	127
Figura.356 Trabajo virtual por desplazamiento en Xb	127
Figura.357 Diagrama de Corte y Momento	127
Figura.358 Idealización de Galpón con biela interna	129
Figura.359 Idealización de Galpón con biela interna simplificada	129
Figura.360 Grados de Libertad	129
Figura.361 Rotación en Biela B	129
Figura.362 Rotación en Junta C	130
Figura.363 Desplazamiento en biela B Lado izquierdo	130
Figura.364 Desplazamiento en biela B lado derecho	130
Figura.365 Momento de empotramiento A-B	130
Figura.366 Momento de empotramiento B-C	130
Figura.367 Momento de empotramiento C-D	131
Figura.368 Momento en el extremo A-B	131
Figura.369 Momento en el extremo B-C	131
Figura.370 Momento en el extremo C-D	131
Figura.371 Biela B	131
Figura.372 Junta C	131
Figura.373 Trabajo virtual desplazamiento en B izquierdo	132
Figura.374 Trabajo virtual desplazamiento en B derecho	132
Figura.375 Diagramas de corte y momento	133
Figura.376 Idealización de estructura con empotramiento móvil interno y externo	133
Figura.377 Grados de libertad	133
Figura.378 Rotación en Junta B	133
Figura.379 Rotación en Biela C	134
Figura.380 Rotación en junta D	134
Figura.381 Desplazamiento en Xb	134
Figura.382 Desplazamiento en biela C izquierdo	134
Figura.383 Desplazamiento en biela C derecho	134
Figura.384 Linealización de fuerza	135
Figura.385 Momento de empotramiento A-B	135
Figura.386 Momento de empotramiento B-C	135
Figura.387 Momento de empotramiento C-D	135
Figura.388 Momento de empotramiento D-E	135
Figura.389 Momento general A-B	136
Figura.390 Momento general B-C	136
Figura.391 Momento general C-D	136
Figura.392 Momento general D-E	136
Figura.393 Junta B	136
Figura.394 Biela C	136
Figura.395 Nodo o Junta D	137
Figura.396 Trabajo virtual para desplazamiento en Xb	137
Figura.397 Trabajo virtual para desplazamiento en C izquierdo	137





Métodos de rotaciones:

Figura.398 Trabajo virtual para desplazamiento en C derecho 137

Figura.399 Diagrama de corte y momento 138

Figura.400 Idealización estructura simétrica con biela interna y vigas inclinadas 139

Figura.401 Grados de libertad 139

Figura.402 Rotación en junta B 139

Figura.403 Desplazamiento en A y relaciones triangulares de desplazamientos 139

Figura.404 Rotación en biela interna C 140

Figura.405 Desplazamiento en biela interna C izquierdo 140

Figura.406 Desplazamiento en biela interna C derecho 140

Figura.407 Rotación en junta D 140

Figura.408 Momentos de empotramiento A-B 141

Figura.409 Momentos de empotramiento B-C 141

Figura.410 Momentos de empotramiento C-D 141

Figura.411 Momentos de empotramiento D-E 141

Figura.412 Momentos generales A-B 141

Figura.413 Momentos generales B-C 142

Figura.414 Momentos generales C-D 142

Figura.415 Momentos generales D-E 142

Figura.416 Junta B 142

Figura.417 Biela interna C 142

Figura.418 Junta D 142

Figura.419 Trabajo virtual para desplazamiento en Xb 143

Figura.420 Trabajo virtual para desplazamiento en C izquierda 143

Figura.421 Trabajo virtual para desplazamiento en C derecha 143

Figura.422 Diagrama de corte y momento 144

Figura.423 Idealización estructura con biela interna 145

Figura.424 Deformación por rotación en B 145

Figura.425 Deformación por rotación en C 145

Figura.426 Deformación por rotación en D 145

Figura.427 Deformación por desplazamiento en Yb 146

Figura.428 Deformación por desplazamiento en Yc abajo 146

Figura.429 Deformación por desplazamiento en Yc arriba 146

Figura.430 Momento de empotramiento A-B 147

Figura.431 Momento de empotramiento A-B 147

Figura.432 Momento de empotramiento C-D 147

Figura.433 Momento de empotramiento D-E 147

Figura.434 Momentos generales A-B 147

Figura.435 Momentos generales B-C 147

Figura.436 Momentos generales C-D 148

Figura.437 Momentos generales D-E 148

Figura.438 Trabajo virtual para el desplazamiento Yb 148

Figura.439 Trabajo virtual para el desplazamiento Yc abajo 148

Figura.440 Trabajo virtual para el desplazamiento Yc arriba 149

Figura.441 Diagrama de corte y momento del sistema real 150





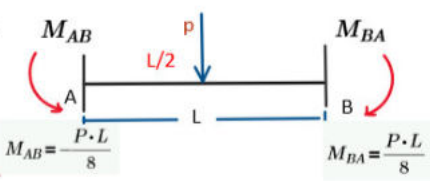
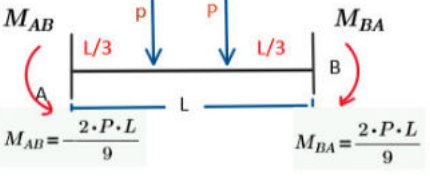
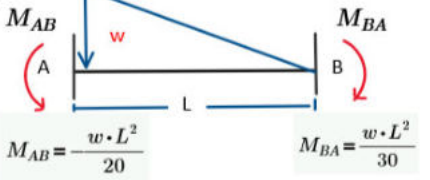
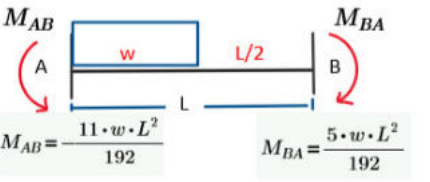
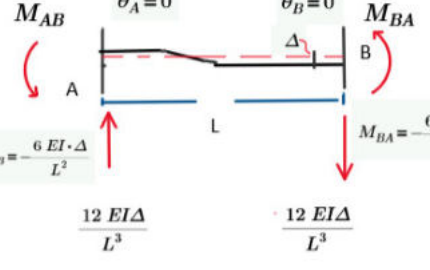
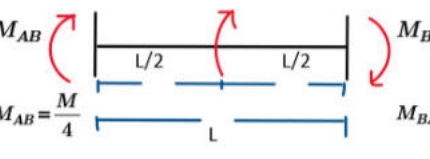
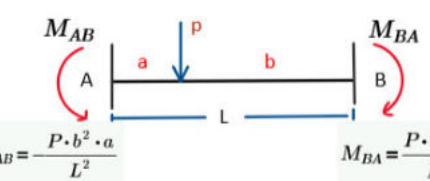
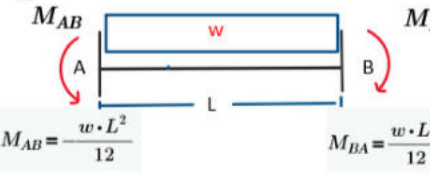
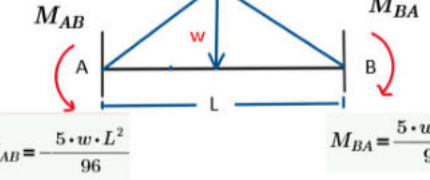
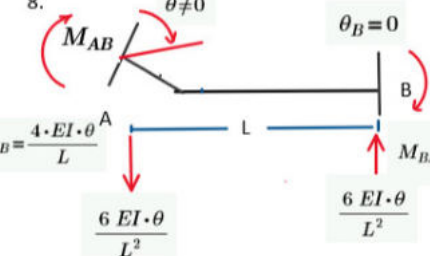
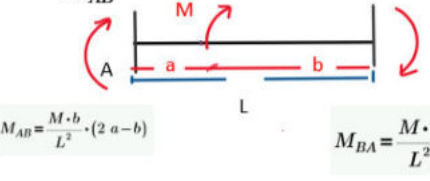
Propiedades de áreas:

Nombre:	Figura:	Área	Distancia Centroidal \bar{X}
A) Triángulo		$B \times h / 2$	$(b \times c) / 3$
B) Triángulo recto		$B \times h / 2$	$(b/3)$
C) Parábola		$(2 \times h \times b) / 3$	$(3b/8)$
D) Parábola		$(b \times h) / 3$	$(b/4)$
E) Parábola de tercer grado		$(b \times h) / 4$	$(0.2 b)$
F) Rectángulo		$(b \times h)$	$(b/2)$
G) Trapecio		$[(b + B)/2] \times h$	$\frac{h \cdot (2 \cdot b + B)}{3 (b + B)}$





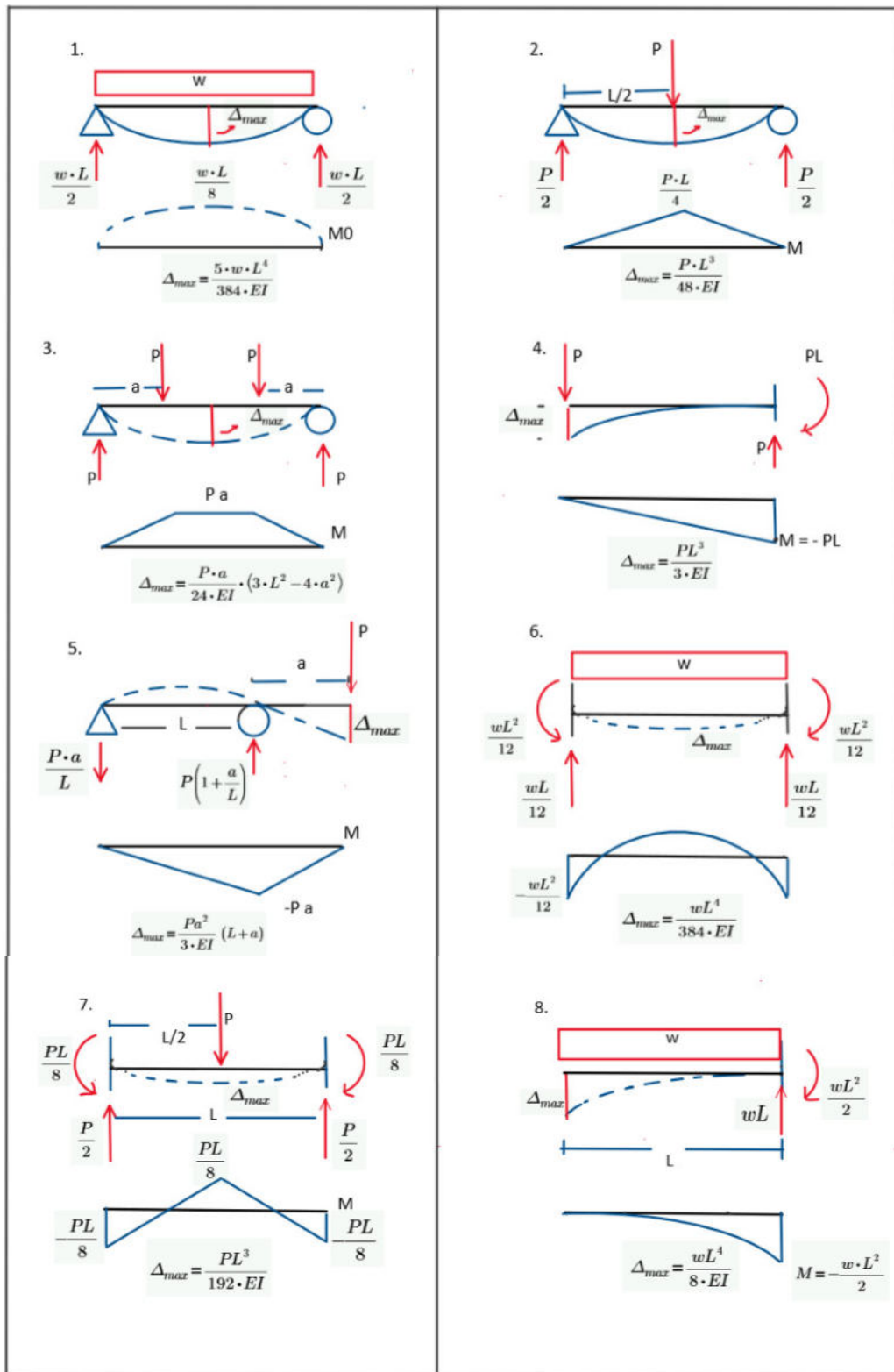
Momentos de empotramiento:

<p>1.  $M_{AB} = \frac{P \cdot L}{8}$ $M_{BA} = \frac{P \cdot L}{8}$</p> <p>3.  $M_{AB} = \frac{2 \cdot P \cdot L}{9}$ $M_{BA} = \frac{2 \cdot P \cdot L}{9}$</p> <p>5.  $M_{AB} = \frac{w \cdot L^2}{20}$ $M_{BA} = \frac{w \cdot L^2}{30}$</p> <p>7.  $M_{AB} = \frac{11 \cdot w \cdot L^2}{192}$ $M_{BA} = \frac{5 \cdot w \cdot L^2}{192}$</p> <p>9.  $M_{AB} = \frac{6 \cdot EI \cdot \Delta}{L^2}$ $M_{BA} = -\frac{6 \cdot EI \cdot \Delta}{L^2}$ $\frac{12 \cdot EI \Delta}{L^3}$ $\frac{12 \cdot EI \Delta}{L^3}$</p> <p>11.  $M_{AB} = \frac{M}{4}$ $M_{BA} = \frac{M}{4}$</p>	<p>2.  $M_{AB} = \frac{P \cdot b^2 \cdot a}{L^2}$ $M_{BA} = \frac{P \cdot b \cdot a^2}{L^2}$</p> <p>4.  $M_{AB} = \frac{w \cdot L^2}{12}$ $M_{BA} = \frac{w \cdot L^2}{12}$</p> <p>6.  $M_{AB} = \frac{5 \cdot w \cdot L^2}{96}$ $M_{BA} = \frac{5 \cdot w \cdot L^2}{96}$</p> <p>8.  $M_{AB} = \frac{4 \cdot EI \cdot \theta}{L}$ $M_{BA} = \frac{2 \cdot EI \cdot \theta}{L}$ $\frac{6 \cdot EI \cdot \theta}{L^2}$ $\frac{6 \cdot EI \cdot \theta}{L^2}$</p> <p>10.  $M_{AB} = \frac{M \cdot b}{L^2} \cdot (2a - b)$ $M_{BA} = \frac{M \cdot a}{L^2} \cdot (2b - a)$</p>
---	---





Diagramas de momento y expresiones para la deflexión máxima:





Diagramas y ecuaciones para el método de tres momentos:

Caso N°	Tipo de Carga Sobre el tramo	6Aa/L	6Ab/L
1.		$\frac{P \cdot a}{L} \cdot (L^2 - a^2)$	$\frac{P \cdot b}{L} \cdot (L^2 - b^2)$
2.		$\frac{w \cdot L^3}{4} = \frac{w \cdot L^2}{4}$	$\frac{w \cdot L^3}{4} = \frac{w \cdot L^2}{4}$
3.		$\frac{8}{60} w \cdot L^3 = \frac{8}{30} \cdot w \cdot L^2$	$\frac{7}{60} w \cdot L^3 = \frac{7}{30} \cdot w \cdot L^2$
4.		$\frac{7}{60} w \cdot L^3 = \frac{7}{30} \cdot w \cdot L^2$	$\frac{8}{60} w \cdot L^3 = \frac{8}{30} \cdot w \cdot L^2$
5.		$\frac{w}{4 \cdot L} [b^2 \cdot (2 \cdot L^2 - b^2) - a^2 \cdot (2 \cdot L^2 - a^2)]$	$\frac{w}{4 \cdot L} [d^2 \cdot (2 \cdot L^2 - d^2) - c^2 \cdot (2 \cdot L^2 - c^2)]$
6.		$\frac{5}{32} \cdot w \cdot (L^3) = \frac{5}{16} \cdot w \cdot L^2$	$\frac{5}{32} \cdot w \cdot L^3 = \frac{5}{16} \cdot w \cdot L^2$
7.		$\frac{-M}{L} \cdot (3 \cdot a^2 - L^2)$	$\frac{M}{L} \cdot (3 \cdot b^2 - L^2)$





Vínculos de una Estructura

1.1 Vínculos.

Los vínculos son los pilares que sostienen a una super estructura, se los conoce como cimientos, apoyos o un lenguaje más técnico como vínculos estructurales. Estos elementos tienen la característica de tener una interacción directa con el suelo y son capaces de transmitir grandes cargas del sistema estructural.

Los apoyos cumplen la función de:

1. Impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura.
2. Limitar la deformación que sufre la estructura.
3. Transmitir las cargas que soporta la estructura al medio de sustentación.

1.2 Clases de Vínculos.

En el estudio de las estructuras, el proyectista puede realizar la idealización de los diferentes tipos de cimientos de la super estructura, dependiendo de las características los vínculos pueden clasificarse en externos e internos.

1.2.1 Vínculos externos que restringen un desplazamiento o de primera especie.

Apoyo simple o rodillo: Restringe la traslación en dirección del vínculo, pero permite la rotación y la traslación en dirección perpendicular al vínculo.

Balancín: El vínculo restringe la traslación vertical, pero está permitido la traslación horizontal y la rotación.

Neopreno: El vínculo restringe la traslación vertical, pero si permite la traslación perpendicular al vínculo y la rotación.

Resorte: El vínculo restringe su traslación longitudinal, y permite la rotación y el desplazamiento perpendicular al resorte.

Empotramiento Libre: El vínculo restringe la rotación, pero permite la traslación vertical y horizontal.

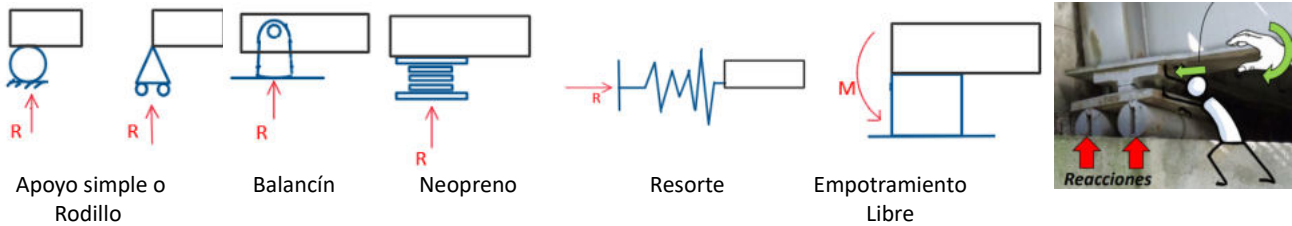


Figura.1 Vínculos externos de primera especie.

1.2.2 Vínculos externos que restringen dos desplazamientos o de segunda especie.

Apoyo articulado o articulación plana: El vínculo restringe la traslación horizontal y vertical, pero si permite la rotación.

Empotramiento móvil o Biela externa: El vínculo restringe la rotación y la traslación perpendicular al empotramiento móvil, pero si permite la traslación en dirección de su abertura móvil.

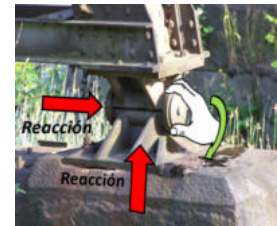
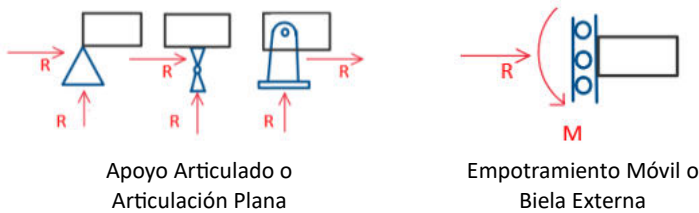


Figura.2 Vínculos externos de segunda especie.

1.2.3 Vínculos externos que restringen tres desplazamientos o de tercera especie.

Empotramiento: El vínculo restringe rotación, traslación horizontal y vertical, no permite movimiento.

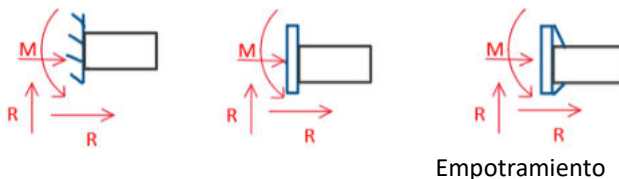


Figura.3 Vínculos externos de tercera especie.





1.2.4 Vínculos internos.

Los vínculos internos permiten la conexión con dos o más elementos, para formar la super estructura, así como los vínculos externos, estos vínculos poseen condicionamientos que incide su comportamiento en la estructura, dependiendo de la vinculación.

Biela interna: La biela interna o empotramiento móvil interno, condiciona la rotación y la traslación perpendicular al vínculo, posee movimiento independiente en dirección de la abertura respecto a sus elementos vigas o columnas conectadas, mientras mantenga su estado de abertura interna.

Perno interno: El perno interno condiciona la traslación vertical y horizontal, si permite la rotación, por tanto, no hay momento flector y es independiente la rotación de los elementos conectados a este, así, puede existir dos movimientos de rotación en cada miembro.

Junta rígida: El vínculo condiciona la rotación, traslación vertical y horizontal, por tanto, al desplazar uno de ellos, los demás se desplazan de igual manera, para mantener su estado rígido.

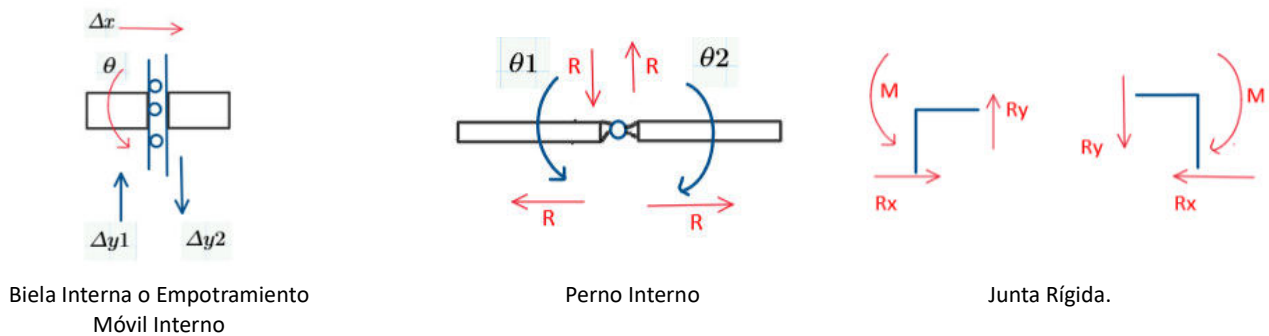


Figura.4 Vínculos Internos.

1.3 Reacciones o Solicitaciones

Son fuerzas que se tornan debido a las cargas de la estructura, éstas son las que se deben identificar haciendo uso de las distintas metodologías para el cálculo estructural, de acuerdo con el tipo de sistema estructural, los vínculos reaccionan ante estas cargas, mostrando desplazamiento vertical (Δy), desplazamiento horizontal (Δx) o rotación (ϑ).

Se puede considerar para saber cuando se tiene desplazamientos y reacciones en los siguientes casos:

- Cuando no hay desplazamiento horizontal (Δx) Se genera Fuerza interna o reacción horizontal (F_x)
- Cuando no hay desplazamiento vertical (Δy) Se genera Fuerza interna o reacción vertical (F_y)
- Cuando no hay rotación (ϑ) Se genera momento flector (M_o)

1.4 Condición de signos para diagramas Axial, Cortante y Momento.

La condición para los diagramas de fuerza axial, cortante y momento se toma de acuerdo al criterio de resistencia de materiales:

Para el diagrama de axial, será positivo cuando exista tracción y negativo cuando exista compresión.

Para el diagrama de cortante, será positivo en un sistema local hacia arriba y negativo hacia abajo.

Para el diagrama de momento flector, será anti horario positivo y negativo horario.

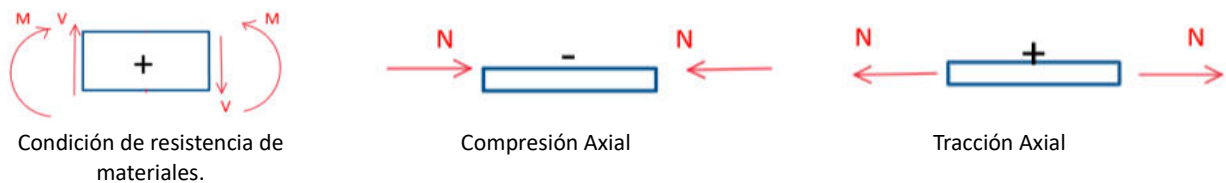


Figura.5 Convención de resistencia de materiales.





2.1 Clases de estructuras.

En el estudio de las estructuras, el proyectista debe tener la habilidad de conocer que tipo de estructura va a emplear en su proyecto, estos tipos de estructuras pueden variar de acuerdo al uso, diseño ,costo y condiciones climáticas, dentro de la rama estructural existen las siguientes estructuras con grado de indeterminación tenemos:

Hipostáticas: Poseen grados de libertad menores que cero y son inestables a la hora de construirlas [GL < 0]

Isostáticas: Poseen grados de libertad iguales a cero y llegan a mantener su equilibrio [GL = 0]

Hiperestáticas: Poseen grados de libertad mayores que cero y son mayormente utilizadas en la vida real. [GL > 0]

2.2 Grado de indeterminación

Las Estructuras Hipostáticas son inestables, debido a que al tener menor cantidad de reacciones existen infinitas soluciones que satisfacen las ecuaciones de equilibrio.

Para conocer el grado de indeterminación el número de ecuaciones de la estática debe ser mayor que el número de reacciones internas más las externas: $E_c > (R_{ext} + R_{int})$.

Las Estructuras Isostáticas son estables, y las reacciones se pueden obtener utilizando únicamente las ecuaciones de la estática. Siempre y cuando las reacciones No sean paralelas ni concurrentes.

Para conocer el grado de estaticidad se emplea la ecuación: $E_c = (R_{ext} + R_{int})$.

Las Estructuras hiperestáticas son estables, pero para obtener las reacciones, hay que incluir ecuaciones de compatibilidad de deformaciones. Al número de ecuaciones adicionales que se necesitan, se les denomina grado de indeterminación. Para conocer el grado de hiperestaticidad se emplea la ecuación: $E_c < (R_{ext} + R_{int})$.

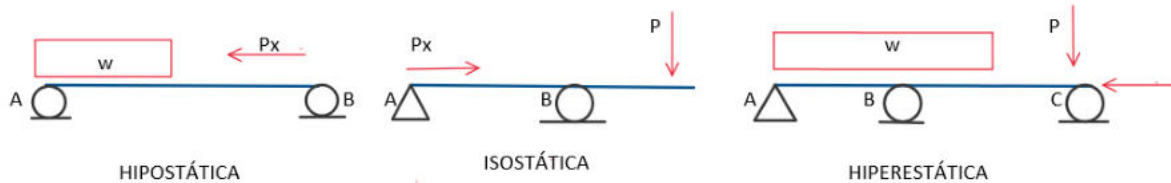


Figura.6 Tipos de estructuras hipostática - Isostática - Hiperestática.

2.3 Grado de indeterminación de una estructura Viga - Pórtico - Cercha

Para determinar el grado de indeterminación o grado de hiperestaticidad de una estructura sea viga, pórtico o cercha se debe utilizar la siguiente ecuación: $[GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 n]$

En donde:

GH: Grado de indeterminación

R_{ext}: Reacciones externas de acuerdo al tipo de vinculación:

R_{int}: Reacciones internas, éstas son condiciones de acuerdo a la vinculación en las juntas.

n: Número de cuerpos o barras.

Cuando se va a determinar las reacciones internas se debe considerar lo siguiente:

Para unión simple $R_{int} = 1 \cdot (n - 1)$

Para unión articulada $R_{int} = 2 \cdot (n - 1)$

Para unión rígida $R_{int} = 3 \cdot (n - 1)$

Siendo [n] el número de cuerpos o barras que llegan al vínculo interno.





2.4 Ejemplos de grado de indeterminación de una estructura

Se ilustra a continuación una serie de estructuras para identificar el grado de indeterminación.

1. Cálculo de grados de indeterminación:

Junta A y B rígida simple: $R_{int} = 1 \cdot (0 - 1) = 0$

Cálculo de reacciones externas: $R_{ext} = 4$

$GH = (4 + 0) - 3 \cdot (1) = 1$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 1 (Hiperestática).



Figura.7 Estructura hiperestática grado 1.

2. Cálculo de grados de indeterminación:

Junta B rígida: $R_{int} = 3 \cdot (n - 1) = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

Cálculo de reacciones externas: $R_{ext} = 7$

$GH = (7 + 3) - 3 \cdot (2) = 4$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 4 (Hiperestática).

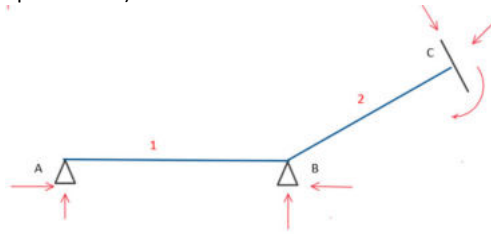


Figura.8 Estructura hiperestática grado 4.

3. Dada la estructura en el extremo A con junta rígida, calcular los grados de indeterminación, al tener 2 reacciones (A_y y A_x) como en el extremo E un rodillo. Se muestra en la figura 9.

Cálculo de reacciones internas:

Junta A rígida: $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

Junta B rígida: $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

Junta C rígida: $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

Junta D rígida: $R_{int} = 3 \cdot (3 - 1) = 6$

Junta E simple: $R_{int} = 1 \cdot (n - 1) = 0$

Cálculo de reacciones externas:

$R_{ext} = 3$

Cálculo de grados de indeterminación:

$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$

$GH = (3 + 15) - 3 \cdot (5) = 3$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 3 (Hiperestática).

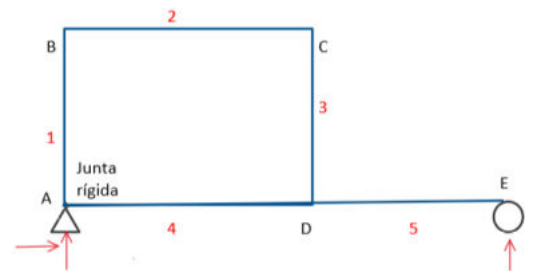


Figura.9 Pórtico hiperestático grado 3.

4. Dada la estructura en el extremo A con junta articulada, calcular los grados de indeterminación, al tener 2 reacciones (A_y y A_x) como en el extremo E un rodillo. Se muestra en la figura 10.

Cálculo de reacciones internas:

Junta A articulada: $R_{int} = 2 \cdot (2 - 1) = 1$

Junta B rígida: $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

Junta C rígida: $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

Junta D rígida: $R_{int} = 3 \cdot (3 - 1) = 6$

Junta E simple: $R_{int} = 1 \cdot (n - 1) = 0$

Cálculo de reacciones externas:

$R_{ext} = 4$

Cálculo de grados de indeterminación:

$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$

$GH = (4 + 13) - 3 \cdot (5) = 16 - 15 = 1$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 1 (Hiperestática).

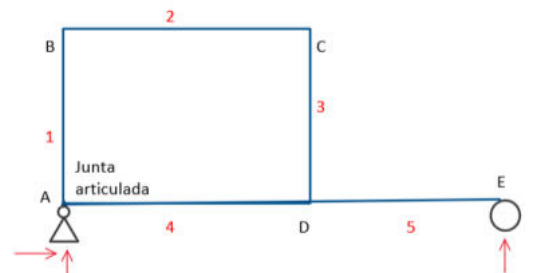


Figura.10 Pórtico hiperestático grado 1 con junta articulada en A.





5. Dada la estructura tipo cercha conocer el grado de indeterminación. Se tiene reacciones externas en A B C y D, mientras que articulación en A B C D E F G, como se muestra en la figura 11.

Análisis Completo:

Junta A y D articulado: $R_{int} = 2(2 - 1) = 2(2) = 4$

Junta E y G articulado: $R_{int} = 2(3 - 1) = 4 \cdot (2) = 8$

Junta B, C y F articulado: $R_{int} = 2(4 - 1) = 6(3) = 18$

Cálculo de reacciones externas: $R_{ext} = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$

Cálculo de grados de indeterminación: $GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$
 $GH = (5 + 30) - 3 \cdot (11) = 2$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 2 (Hiperestática).

Análisis Externo:

Para el análisis se considera la armadura como un elemento, por tanto, no posee reacciones internas y solo posee reacciones externas en A, B, C y D.

Cálculo de reacciones externas: $R_{ext} = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$

Cálculo de grados de indeterminación: $GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$

$GH = (5) - 3 \cdot (1) = 2$

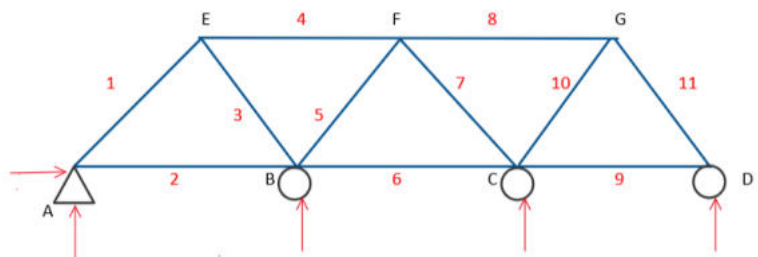


Figura.11 Cercha hiperestática externa grado 2.

La estructura es estable con grado de indeterminación 2 (Hiperestática externa).

6. Dada la estructura tipo cercha conocer el grado de indeterminación. Para este caso en tenemos reacciones externas en A E y F, mientras que tenemos articulación en A B C D E F, como se muestra en la figura 12.

Análisis Completo:

Cálculo de reacciones internas:

Junta A y f articulado: $R_{int} = 2(2 - 1) = 2(2) = 4$

Cálculo de reacciones externas:

$R_{ext} = 2 + 1 + 1 = 4$

Cálculo de grados de indeterminación:

$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$

$GH = (4 + 20) - 3 \cdot (8) = 0$

Junta B, C, D y E articulado: $R_{int} = 2(3 - 1) = 4 \cdot (4) = 16$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 0 (Isostática).

Análisis Externo:

Para este análisis se considera la armadura como un elemento. Por tanto, no posee reacciones internas y solo posee reacciones externas en A, E, y F.

Cálculo de reacciones externas: $R_{ext} = 2 + 1 + 1 = 4$

Cálculo de grados de indeterminación: $GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$

$GH = (4) - 3 \cdot (1) = 1$

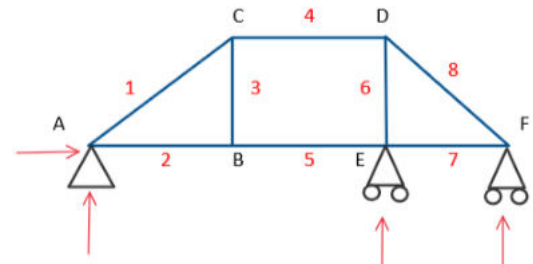


Figura.12 Cercha hiperestática externa grado 1.

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación externa 1 (Hiperestática externa).



7. Dada la estructura con empotramiento móvil, y biela interna encontrar los grados de hiperestaticidad o de indeterminación.

Cálculo de reacciones internas:

Junta B y E articulado y biela: $R_{int} = 2 (2 - 1) = 2 (2) = 4$

Junta A y F simple: $R_{int} = 1 \cdot (n - 1) = 0$

Junta C y D rígida: $R_{int} = 3 (2 - 1) = 3 \cdot (2) = 6$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 1 (Hiperestática).

Cálculo de reacciones externas:

$$R_{ext} = 2 + 1 + 3 = 6$$

Cálculo de grados de indeterminación:

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$$

$$GH = (6 + 10) - 3 \cdot (5) = 1$$

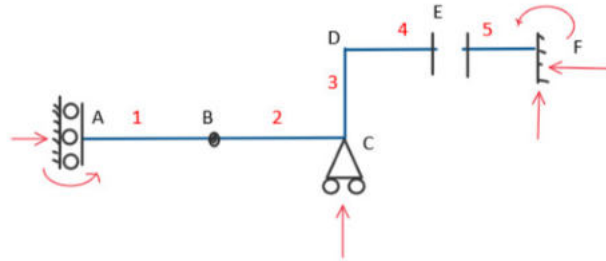


Figura.13 Sistema estructural hiperestática grado 1, con biela interna y empotramiento móvil externo.

8. Dada la estructura con empotramiento móvil, y biela interna encontrar los grados de hiperestaticidad o de indeterminación.

Cálculo de reacciones internas:

Junta B biela: $R_{int} = 2 (2 - 1) = 2$

Junta A y C simple: $R_{int} = 1 \cdot (n - 1) = 0$

Cálculo de reacciones externas: $R_{ext} = 2 + 2 = 4$

Cálculo de grados de indeterminación: $GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$

$$GH = (4 + 2) - 3 \cdot (2) = 0$$

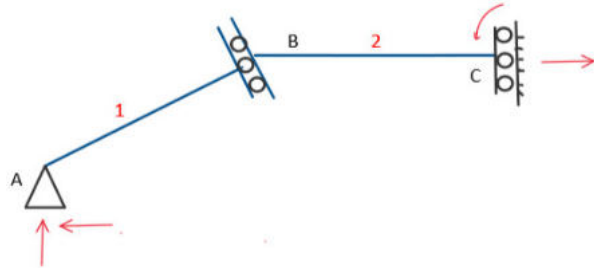


Figura.14 Sistema estructural isostática con biela interna y externa.

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 0 (Isostática).

9. Dada la estructura con empotramiento, y articulación interna encontrar los grados de hiperestaticidad o de indeterminación.

Cálculo de reacciones internas:

Junta B Articulación: $R_{int} = 2 (2 - 1) = 2$

Junta A y C simple: $R_{int} = 1 \cdot (n - 1) = 0$

Cálculo de reacciones externas: $R_{ext} = 2 + 1 = 3$

Cálculo de grados de indeterminación: $GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$

$$GH = (3 + 3) - 3 \cdot (2) = 0$$

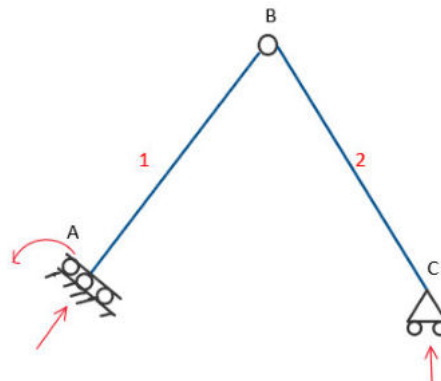


Figura.15 Estructura isostática grado 0, con perno interno.

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 0 (Isostática).





Estructuras estáticas vigas

3.1 Introducción elementos estructurales - vigas

Las vigas son consideradas como elementos estructurales para soportar cargas, pueden conectar grandes luces, su función es de transmitir las cargas hacia las columnas, se puede idealizar el sistema de vigas de una vivienda como simplemente apoyadas, en la cual, las cargas hacia las vigas se las obtienen por el método de área tributaria. A continuación se muestra varios sistemas hiperestáticos y sus distintos usos, en la vida real.

Las cargas sobre las vigas pueden ser puntuales, distribuidas, rectangulares, triangulares, trapezoidales y curvas. Dependerá de la condición de uso en la obra.

Por tanto, es importante conocer sus aplicaciones, propiedades mecánicas, condiciones de uso, que pueden tornarse en las vigas a lo largo de la vida profesional.

3.2 Sistemas de vigas en la vida real

Viga de acero aligerada



Figura.16. Vigas de acero en San Diego.

Viga de madera en sección variable



Figura.17. Viga de madera.

Viga de acero tipo Cercha



Figura.18 Cercha de madera en los Andes.

Viga de madera tradicional



Figura.19. Vigas de madera en Valencia.

Viga con empotramiento móvil o biela.



Figura.20 Sistema estructural con biela interna o empotramiento móvil.





3.3 Ejercicios.

Ejercicio 3.2.1

A continuación, se idealiza un ejercicio de carga trapezoidal, que se puede encontrar en la vida real.

Dado el siguiente sistema de viga simplemente apoyada, determinar:

- Grado estático de estructura.
- Cálculo de reacciones del sistema estructural.
- Cálculo de las ecuaciones de cortante y momento flector.
- Puntos de inflexión del sistema o puntos críticos.
- Cálculo de los diagramas Fuerza axial, cortante y momento flector.

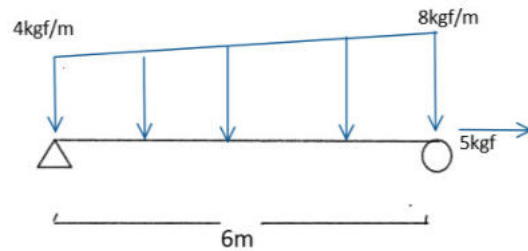


Figura.21 Idealización de estructura con carga trapezoidal.

Solución primera forma:

Se utiliza dos planteamientos, la primera, consiste en una separación entre la carga rectangular y triangular, lo cual implica poseer dos cargas puntuales, ubicadas en sus centros de gravedad. La otra forma será utilizando la carga trapezoidal de forma directa.

Para conocer el grado estructural del sistema, podemos hacer uso de la ecuación: $[GH = 3 \cdot n - (V_{int} + V_{ext})]$ se tiene:

$$GL = [3 \cdot 1 - ((0) + 3)] = 3 - 3 = 0$$

Cálculo de reacciones:

$$\text{"anti horario "+" } \sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot (6 \text{ m}) - P_{rec} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (6 \text{ m})\right) - P_{tria} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (6 \text{ m})\right) = 0$$

$$B_y = \frac{24 \text{ kgf} \cdot (3 \text{ m}) + 12 \text{ kgf} \cdot (4 \text{ m})}{6 \text{ m}} = 20 \text{ kgf}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x - B_x = 0$$

$$A_x = 5 \text{ kgf}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - P_{rec} - P_{tria} = 0$$

$$A_y = P_{rec} + P_{tria} - B_y = 16 \text{ kgf}$$

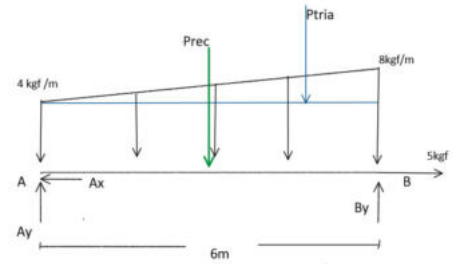


Figura.22 Sistema de cargas equivalentes de carga trapezoidal.

Cargas puntuales rectangular y triangular

Carga rectangular: $P_{rec} = h \cdot b = \left(4 \frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right) \cdot (6 \text{ m}) = 24 \text{ kgf}$

Carga triangular: $P_{tria} = \frac{h \cdot b}{2} = \frac{\left(4 \frac{\text{kgf}}{\text{m}}\right) \cdot (6 \text{ m})}{2} = 12 \text{ kgf}$

Cortes:

Cuando el sistema se encuentra en equilibrio, se realizan cortes a criterio del estudiante, al poseer una carga trapezoidal que se extiende a lo largo del miembro, se genera un corte, por tanto, la ecuación interna será la misma en todo el tramo.

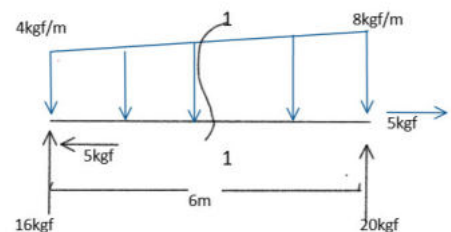


Figura.23 Sección de corte 1-1 en carga y viga.



$$\sum F_x = 0 \quad A_{x,1} = 5 \text{ kgf}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = 16 \text{ kgf} - A_{rec} - A_{tria}$$

$$V_1 = 16 \text{ kgf} - 4x - \frac{(x) \cdot (y)}{2}$$

$$\sum M_o = 0 \quad M_1 = 16 \text{ kgf} \cdot (x) - A_{rec} \cdot \left(\frac{x}{2}\right) - A_{tria} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)$$

$$M_1 = 16 \text{ kgf} (x) - 4x \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{(x) (y)}{2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)$$

$$M_1 = 16 \text{ kgf} \cdot (x) - 2x^2 - \frac{x^2 \cdot y}{6}$$

Comprobación de ecuaciones:

Es importante comprobar si las ecuaciones están correctas. Se deriva la ecuación de momento en función de δ_x , al derivar la ecuación de momento se obtiene la ecuación de cortante. Comprobando se tiene:

Diagramas:

Los diagramas de cortante, se genera con un sistema de referencia en la viga de estudio (x,y), verificando los puntos críticos o de inflexión, se caracteriza por intersecar la diagonal con la horizontal.

Diagrama de cortante.

Para encontrar el punto de inflexión basta con igualar a cero, la ecuación de cortante, se debe despejar el valor de la variable (x) generando el punto crítico.

El valor en longitud se reemplaza en la ecuación de momento, obteniendo los puntos críticos.

Si se tiene una ecuación cuadrática se toma el valor positivo y que este en el rango del tramo de estudio.

Para graficar los diagramas de momento flector, vamos a seguir la condición de:

1. Si el diagrama de corte son secciones rectangulares - el diagrama de momento son secciones inclinadas.
2. Si el diagrama de corte son secciones con inclinaciones- el diagrama de momento son secciones curvas de segundo grado.
3. Si el diagrama de corte son secciones curvas - el diagrama de momento son secciones curvas de tercer grado.

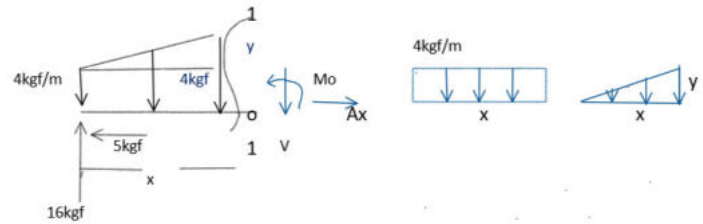


Figura.24 Discretización de carga trapezoidal.

Carga rectangular: $A_{rec} = 4x$

Carga rectangular: $A_{tria} = \frac{(x) \cdot (y)}{2}$

Relación triangular de y: $\frac{y}{x} = \frac{4}{6} \text{ m} \quad y = \frac{2}{3} x$

$$\frac{d}{d_x} (M_1) = 16 \text{ kgf} \cdot (x) - 2x^2 - \frac{x^2 \cdot y}{6}$$

$$\frac{d}{d_x} (M_1) = 16 \text{ kgf} - 4x - \frac{(x) \cdot (y)}{2}$$

Para graficar el diagrama, procedemos a reemplazar los valores de distancia en la ecuación de cortante, para conocer la fuerza en ese punto.

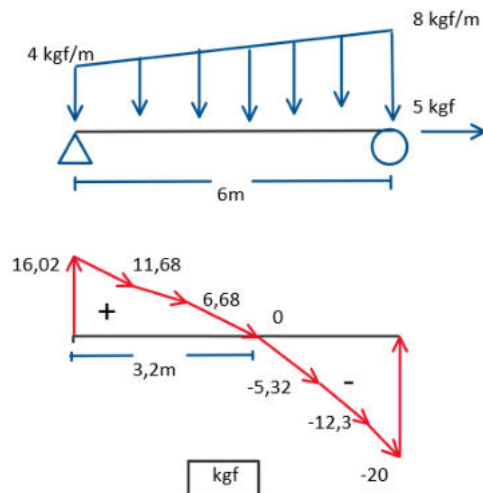


Figura.25 Diagrama de cortante, carga trapezoidal.



Diagrama de Momento flector.

El diagrama de momento se considera una curva de segundo grado a lo largo del elemento, debido al diagrama de fuerza cortante.

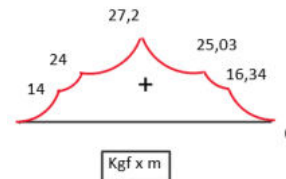


Figura.26 Diagrama de Momento de carga trapezoidal.

Diagrama de fuerza axial.

El diagrama de fuerza axial se genera por la convención:
Positivo cuando sus fuerzas internas generen tracción.
Negativo cuando sus fuerzas internas generen compresión.



Figura.27 Diagrama de fuerza axial de carga trapezoidal.

Solución segunda forma:

Se considera de forma directa la carga trapezoidal, por tanto, el proceso será el mismo, pero el cálculo será más práctico, por utilizar el centro de gravedad y su carga puntual.

Análisis de la carga trapezoidal.

$$\text{Carga trapezoidal: } P = \frac{b+B}{2} \cdot h = \frac{4+8}{2} \cdot (6) = 36 \text{ kgf}$$

$$\text{Distancia hasta el centro de gravedad: } \hat{x} = \frac{h \cdot (2 \cdot b + B)}{3 \cdot (b + B)} = 2.67 \text{ m}$$

$$\text{Distancia hacia la reacción A } d = 6 \text{ m} - 2.67 \text{ m} = 3.33 \text{ m}$$

Cálculo de la pendiente trapezoidal

Se halla la pendiente de la recta con la ecuación $y = mx + b$.
Para conocer la pendiente basta con conocer dos puntos.
La fuerza del sistema en coordenadas: P1 (0 ; 4) y P2 (6 ; 8).

$$\text{Pendiente de la recta: } m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(8 - 4)}{6} = 0.67$$

$$\begin{aligned} \text{Valor de altura total (y) en cualquier punto de la carga trapezoidal.} \\ y = mx + b \\ y = 0.67 \cdot (x) + 4 \text{ kgf} \end{aligned}$$

Ecuaciones de fuerza axial, cortante y momento flector.

Corte 1-1

$$0 \leq (x) \leq 6 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 = 5 \text{ kgf}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = 16 \text{ kgf} - P_{trap} = 16 \text{ kgf} - \left(2x + \frac{xy}{2} \right)$$

$$\sum M_o = 0 \quad M_1 = 16 \text{ kgf} \cdot (x) - P_{trap} \cdot (\hat{x}) = 16 \text{ kgf} \cdot (x) - P_{trap} \cdot \left(\frac{8 \cdot x + xy}{12 + 3 \cdot y} \right)$$

$$\text{Carga Trapezoidal: } P = \text{área.trapezoidal} = \frac{(4+y)}{2} \cdot x = 2x + \frac{xy}{2}$$

$$\text{Ecuación de la recta trapezoidal } y = 0.67x + 4 \text{ kgf}$$

$$\text{Distancia al centro de gravedad } \hat{x} = \frac{h \cdot (2 \cdot b + B)}{3 \cdot (b + B)} = \frac{x \cdot (2 \cdot 4 + y)}{3 \cdot (4 + y)} = \frac{8 \cdot x + xy}{12 + 3 \cdot y}$$

Carga trapezoidal

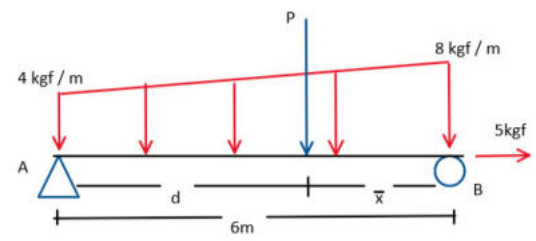


Figura.28 Fuerza puntual equivalente en el centro de gravedad.

Carga trapezoidal

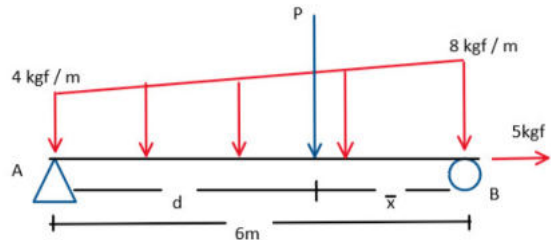


Figura.29. Sistema de referencia, carga trapezoidal.

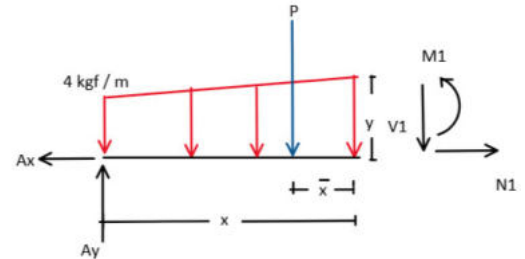


Figura.30. Corte 1-1 en carga trapezoidal.



Diagramas:

Diagrama de cortante.

Con valores de alturas (y) definidas por la ecuación, como las distancias (x) a lo largo de la viga, se puede conocer las fuerzas puntuales de cada valor trapezoidal, así, los valores se deben remplazar en la ecuación de cortante $[V_1]$ para graficar el diagrama de fuerza cortante, identificando el punto crítico o de inflexión a 3,2m. Se puede visualizar en la tabla 1.

Distancia	$Y = mx + b = 0.67x + 4 \text{ kgf}$	$P_{trap} = 2x + \frac{xy}{2}$	$V_1 = 16 \text{ kgf} - P_{trap}$
$x=1$	$y = 4.667$	$P_{trap} = 4,33 \text{ kgf}$	$V = 11,68$
$x=2$	$y = 5.334$	$P_{trap} = 9,33 \text{ kgf}$	$V = 6,68$
$x=3$	$y = 6$	$P_{trap} = 15 \text{ kgf}$	$V = 1,02$
$x=4$	$y = 6.668$	$P_{trap} = 21,33 \text{ kgf}$	$V = -5,31$
$x=5$	$y = 7.335$	$P_{trap} = 28.338 \text{ kgf}$	$V = -12,31$
$x=6$	$y = 8$	$P_{trap} = 36 \text{ kgf}$	$V = -20$
$x=3.2$	$y = 6.134$	$P_{trap} = 16,2 \text{ kgf}$	$V = 0$

tabla.1 Valores de distancia- pendiente - carga puntual y cortante.

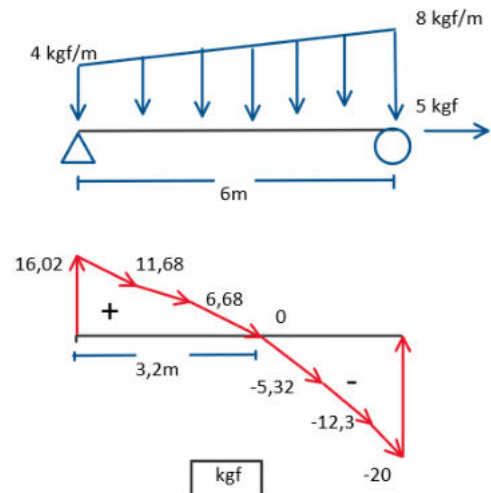


Figura.31. Diagrama de cortante de carga trapezoidal.

Diagrama de Momento flector.

Para los valores de momento, en cada tramo de la viga, se debe calcular los valores de distancia, hacia el centro de gravedad de la carga trapezoidal \bar{x} , además, se remplaza el valor en la ecuación de momento. Es recomendable hacer una tabla en la que se den valores de distancia y evaluar los momentos flectores en esos puntos, como se puede ver en la tabla 2, así:

Distancia	$P_{trap} = 2x + \frac{xy}{2}$	$\bar{x} = \frac{8 \cdot x + xy}{12 + 3 \cdot y}$	$M = 16 \text{ kgf} \cdot (x) - P_{trap} \cdot \left(\frac{8 \cdot x + xy}{12 + 3 \cdot y}\right)$
$x=1$	$P_{trap} = 4,33 \text{ kgf}$	$\bar{x} = 0,48 \text{ m}$	$M = 14 \text{ kgfxm}$
$x=2$	$P_{trap} = 9,33 \text{ kgf}$	$\bar{x} = 0,86 \text{ m}$	$M = 24 \text{ kgfxm}$
$x=3$	$P_{trap} = 15 \text{ kgf}$	$\bar{x} = 1,4 \text{ m}$	$M = 27,06 \text{ kgfxm}$
$x=4$	$P_{trap} = 21,33 \text{ kgf}$	$\bar{x} = 1,48 \text{ m}$	$M = 27,28 \text{ kgfxm}$
$x=5$	$P_{trap} = 28.338 \text{ kgf}$	$\bar{x} = 1,83 \text{ m}$	$M = 25,03 \text{ kgfxm}$
$x=6$	$P_{trap} = 36 \text{ kgf}$	$\bar{x} = 2,25 \text{ m}$	$M = 16,34 \text{ kgfxm}$
$x=3.2$	$P_{trap} = 16,2 \text{ kgf}$	$\bar{x} = 2,66 \text{ m}$	$M = 0 \text{ kgfxm}$

tabla.2 Valores de distancia - carga puntual - distancia al centro de gravedad y momento flector

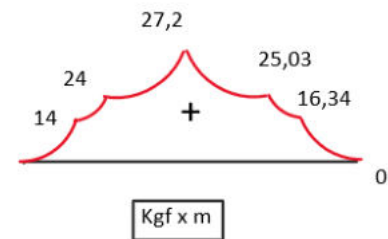


Figura.32. Diagrama de momento flector de carga trapezoidal.

Diagrama de fuerza axial.

Para conocer el diagrama de fuerza axial, será positivo cuando las fuerzas internas sean a tracción, y negativo cuando sean a compresión.



Figura.33. Diagrama de fuerza axial de carga trapezoidal.



Ejercicio 3.3.2

Dado el siguiente sistema de viga simplemente apoyada con biela interna o empotramiento móvil interno, determinar:

- Grado de indeterminación de la estructura.
- Cálculo de reacciones del sistema estructural.
- Cálculo de las ecuaciones de axial, cortante y momento flector.
- Puntos de inflexión del sistema.
- Cálculo de los diagramas Fuerza axial, cortante y momento flector.

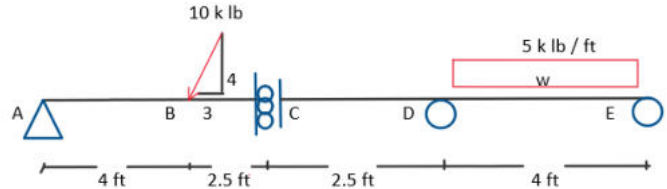


Figura.34 Idealización de sistema estructural con biela interna.

Solución:

Se tiene una biela interna o empotramiento móvil interno, se puede idealizar para el análisis de puentes grúas, a la hora de realizar la construcción de puentes. Iniciaremos realizando el análisis de grados de indeterminación.

Cálculo de grados de indeterminación:

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$$

Reacciones externas: $R_{ext} = 4$

Reacciones internas: $R_{int} = 2(n - 1) = 2$

$$GH = (4 + 3) - 3 \cdot (2) = 0$$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 0 (Isostática).

Linealizando la fuerza puntual:

$$P = 10 \text{ k lb}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \quad \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) = 53.13^\circ$$

$$\sin(\alpha) = \frac{P_y}{P} \quad \cos(\alpha) = \frac{P_x}{P}$$

$$P_y = P \sin(\alpha) = 8 \text{ k lb} \quad P_x = 6 \text{ k lb}$$

Sistema inicial fuerzas y reacciones.

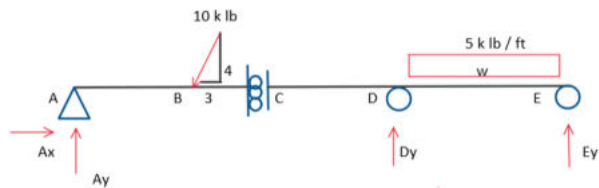


Figura.35 Reacciones del sistema estructural con biela interna.

Isostatización de la viga

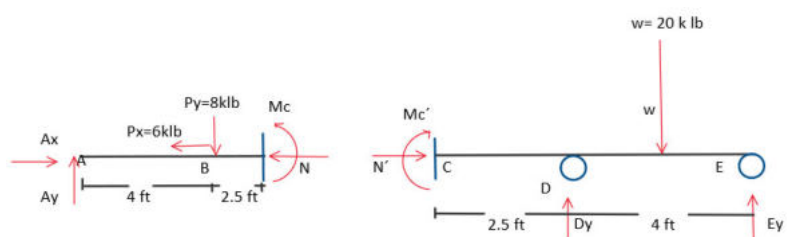


Figura.36 Discretización del sistema de viga con biela interna.

Cálculo de reacciones del sistema:

Para el cálculo de reacciones, aplicamos estática de fuerzas en todo el sistema $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum M_o$, para este tipo de planteamiento es recomendable hacer el despiece de la viga.

Ecuaciones generales del sistema.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ A_x - P_x &= 0 \\ A_x &= 6 \text{ kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ A_y + D_y + E_y - 20 \text{ k lb} - 8 \text{ k lb} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{"anti horario "+" } \sum M_c = 0$$

$$-A_y \cdot (6.5 \text{ ft}) + P_y \cdot (2.5 \text{ ft}) + D_y \cdot (2.5 \text{ ft}) + E_y \cdot (6.5 \text{ ft}) = 0$$



Despiece del sistema:

El despiece de la viga, se realiza a partir de la biela con el despiece de la biela izquierda y derecha, como se muestra en la figura.37. La biela posee condicionamiento para la rotación y permite el desplazamiento en la abertura del vínculo, por tanto, se generan reacciones internas perpendiculares a la abertura.

Lado izquierdo:

El vínculo permite el desplazamiento vertical por el sentido de la abertura de la biela, por tanto, las reacciones que intervienen son A_y y la fuerza puntual P_y .

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ A_y - P_y &= 0 \\ A_y &= 8 \text{ klb} \end{aligned}$$

“anti horario +” $\sum M_c = 0$

La ecuación de momento interno, se idealiza considerando momento en cualquier punto de la viga, es recomendable tomarlo en la biela.

$$-A_y \cdot (6.5 \text{ ft}) + P_y \cdot (2.5 \text{ ft}) + M_c = 0$$

$$M_c = 8 \text{ klb} \cdot (6.5 \text{ ft}) - 8 \text{ klb} \cdot (2.5 \text{ ft})$$

$$M_c = 32 \text{ klb} \cdot \text{ft}$$

Lado derecho:

Se debe calcular las reacciones del lado derecho de la biela, al conocer las reacciones internas, mediante la estática se calcula las reacciones restantes.

“anti horario +” $\sum M_c = 0$

$$-M_c' - w \cdot (2 \cdot \text{ft}) + E_y \cdot (4 \text{ ft}) = 0$$

$$E_y = \frac{32 \text{ klb} \cdot \text{ft} + 20 \text{ klb} \cdot (2 \text{ ft})}{4 \text{ ft}} = 18 \text{ klb}$$

Realizando una sumatoria de fuerzas vertical, se identifica el valor de la reacción D_y .

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 & F_x &= 0 \\ D_y + E_y - w &= 0 & N' &= 0 \\ D_y &= 20 \text{ klb} - 18 \text{ klb} = 2 \text{ klb} \end{aligned}$$

Analizando la parte izquierda se tiene:

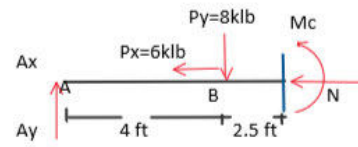


Figura.37 Sección discretizada de viga, lado izquierdo.

Analizando la parte derecha se tiene:

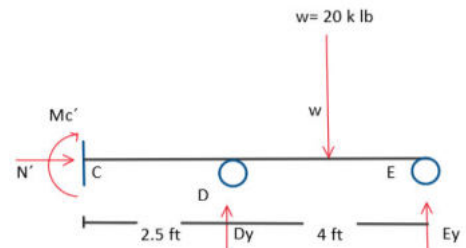


Figura.38 Sección discretizada de viga, lado derecho.

Ecuaciones de fuerza axial, cortante y momento flector.

Sección de viga con cortes

El estudiante, puede hacer los cortes donde los considere oportunos para su análisis. Para conocer las ecuaciones de axial, cortante y momento flector se realizan cortes en el sistema de viga, 1-1, 2-2, 3-3 y 4-4.

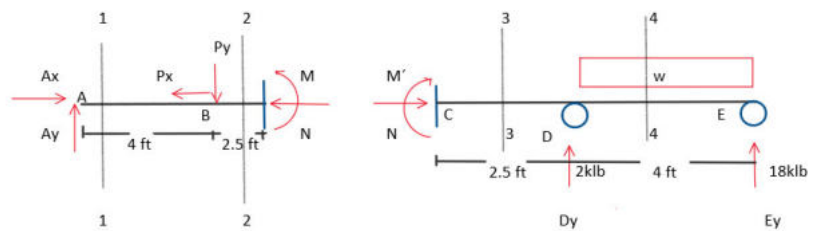


Figura.39 Cortes en el sistema idealizado con fuerzas externas e internas.

Corte 1-1

Para conocer las ecuaciones en el corte 1-1, se aplica la estática de forma vertical y horizontal, además, se realiza un momento en el punto del corte. De tal forma, se conocen las fuerzas internas de la viga.

$$0 \leq (x) \leq 4 \text{ ft}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 = -6 \text{ klb} \quad \text{“Sentido contrario”}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = 8 \text{ klb}$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_1 = 8 \text{ klb} \cdot (x)$$

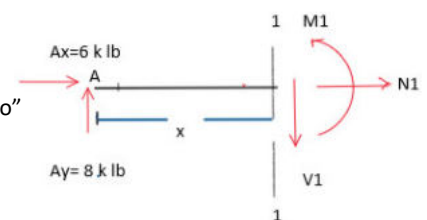


Figura.40 Sección de corte 1-1 con fuerzas externas e internas.



Corte 2-2

$$4 \text{ ft} \leq (x) \leq 6.5 \text{ ft}$$

Para el corte 2-2, se incorpora el siguiente tramo, por tanto, el rango de análisis aumenta y se considera la fuerza linealizada.

$$\sum F_x = 0 \quad N_2 + 6 \text{ klb} - 6 \text{ klb} = 0 \quad N_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 8 \text{ klb} - 8 \text{ klb} - V_2 = 0 \quad V_2 = 0$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_2 = 8 \text{ klb} \cdot (x) - 8 \text{ klb} (x - 4)$$

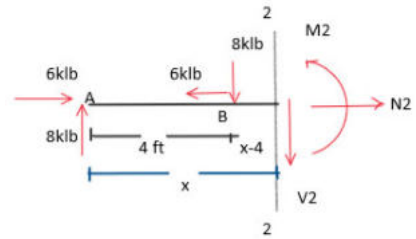


Figura.41 Sección de corte 2-2 con fuerzas externas e internas.

Corte 3-3

$$0 \text{ ft} \leq (x) \leq 2.5 \text{ ft}$$

Para el corte 3-3, se evalúa el lado derecho de la biela, al conocer las fuerzas internas M' y N , el análisis permite conocer las ecuaciones de fuerzas internas, corte, axial y momento flector.

$$\sum F_x = 0 \quad N_3 = 0 \text{ klb}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_3 = 0 \text{ klb}$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_3 = 32 \text{ klb} \cdot \text{ft}$$

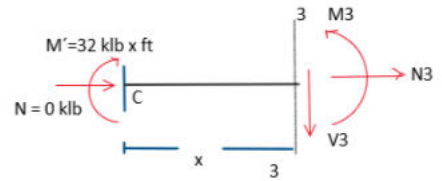


Figura.42 Sección de corte 3-3 con fuerzas externas e internas.

Corte 4-4

Para el corte 4-4, las fuerzas internas, serán en función de las ecuaciones obtenidas de la figura 42. Note que se toma la carga distribuida en función de la distancia del corte.

$$2.5 \text{ ft} \leq (x) \leq 6.5 \text{ ft}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_3 = 0 \text{ klb}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_3 = 2 \text{ klb} - 5 \frac{\text{klb}}{\text{ft}} (x - 2.5)$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_3 = 32 \text{ klb} \cdot \text{ft} + 2 \text{ klb} \cdot (x - 2.5) - \frac{5 (x - 2.5)^2}{2}$$

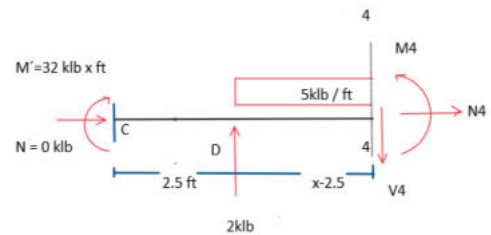


Figura.43. Sección de corte 4-4 con fuerzas externas e internas.

Punto de inflexión o punto crítico.

El punto crítico, se torna en el diagrama de corte, al poseer una intersección con el eje horizontal de la viga, el tramo, se debe calcular, debido a que genera el momento máximo del sistema. Para calcular este punto crítico, se iguala la ecuación de corte a cero, y se despeja la variable (x).

“Ecuación de cortante”

$$2 - 5 (x - 2.5) = 0$$

$$-5 x = -12.5$$

$$x = 2.5 \text{ ft}$$

Diagramas:

Las ecuaciones en los distintos tramos, permite conocer los diagramas de fuerza cortante, axial y momento flector. Como se muestra en la figura 45 ,46 y 47.

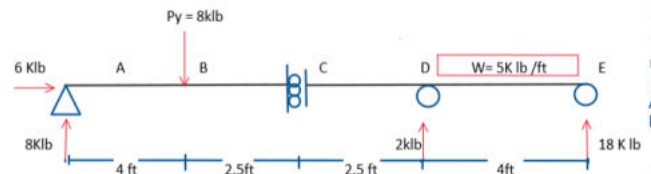


Figura.44. Sistema de fuerzas y reacciones externas.

Diagrama de cortante. (V)

El diagrama de fuerza cortante, se conoce dando valor a la variable (x) en el rango establecido, además, se verifica la distancia del punto crítico, esta distancia debe generar el corte con la viga, para este caso a una distancia de 2,5 pies (ft).

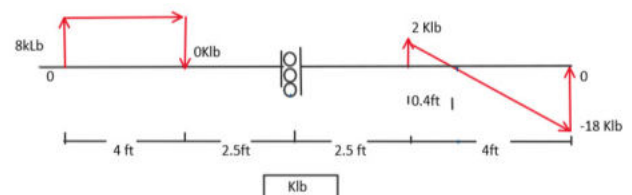


Figura.45. Diagrama de cortante de sistema de viga con biela interna.



Diagrama de Momento Flector. (Mo)

Para el diagrama de momento flector (Mo), se da valores a la variable (x) en el rango establecido, y se verifica las unidades, para el ejemplo, serán kilo-libras fuerza (klb) por pies (ft), además, el punto máximo de momento será a la distancia de 2.5 pies (ft) en el tramo del corte 4-4.

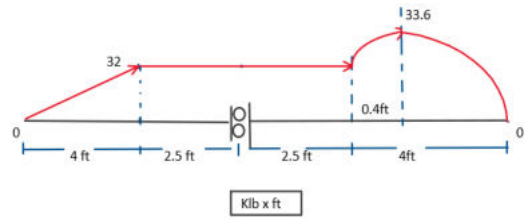


Figura.46. Diagrama de momento flector sistema de viga con biela interna.

Diagrama de Fuerza Axial. (N).

Para el diagrama de fuerza axial (N), se da valores a la variable (x) en el rango establecido, se genera una fuerza de compresión, en el lado izquierdo de la biela, y es negativo.

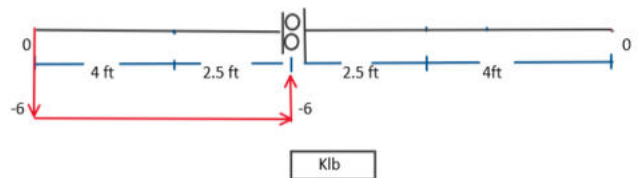


Figura.47. Diagrama de fuerza axial sistema de viga con biela interna.

Ejercicio 3.3.3

Dado el siguiente sistema de viga con biela externa o empotramiento móvil externo, determinar:

- Grado de indeterminación de la estructura.
- Cálculo de reacciones del sistema estructural.
- Cálculo de las ecuaciones de axial, cortante y momento flector.
- Puntos de inflexión del sistema.
- Cálculo de los diagramas Fuerza axial, cortante y momento flector.

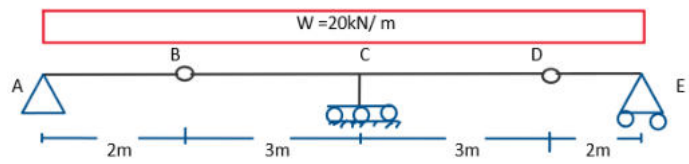


Figura.48 Idealización de estructura con empotramiento móvil externo.

Solución:

Se tiene una biela empotrada o externa, este vínculo se caracteriza por tener restringida la rotación y el desplazamiento perpendicular a su abertura, se puede deslizar en dirección de su abertura, mientras cumpla con los criterios de resistencia de materiales, el vínculo se emplea al idealizar el análisis de armaduras grúas, que se emplean en naves industriales.

Cálculo de grados de indeterminación:

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$$

Reacciones externas: $R_{ext} = 5$

Reacciones internas $R_{int} = 2(n - 1) = 2 \cdot 2 = 4$
Articulado en B y C:

$$GH = (5 + 4) - 3 \cdot (3) = 0$$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 0 (Isostática).

Sistema inicial fuerzas y reacciones.

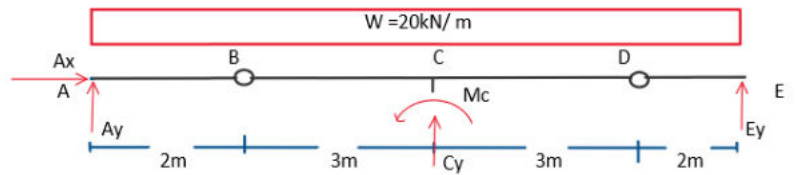


Figura.49 Fuerzas y reacciones externas de estructura con empotramiento móvil externo.



Cálculo de reacciones del sistema:

Para resolver el sistema, se realiza un análisis general, se aplica la estática de fuerzas, generando las ecuaciones de $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$.

Despiece del sistema:

El despiece se genera, debido a que no se puede resolver por las ecuaciones de la estática de forma general, por tanto, el despiece será en tres secciones sección (A - B), sección (B - D), y la sección (D - E).

Analizando la sección A - B

Para conocer la reacción A_y , se aplica momento en B, el valor de fuerza axial al no tener fuerza horizontal, será nula y las fuerzas en el punto donde se genera momento se cancelan.

$$\begin{aligned} \text{"anti horario "+" } \sum M_B &= 0 \\ A_y \cdot (2 \text{ m}) - \frac{20 (2 \text{ m})^2}{2} &= 0 \\ A_y = V_1 &= 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

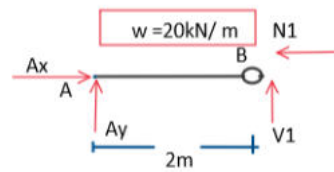


Figura.50. Discretización sección A-B

Analizando la sección D-E

Para conocer la reacción E_y , se genera momento en D, al ser simétrico, el valor será el mismo que la reacción A_y previamente calculada.

$$\begin{aligned} \text{"anti horario "+" } \sum M_D &= 0 \\ E_y \cdot (2 \text{ m}) - \frac{20 (2 \text{ m})^2}{2} &= 0 \\ E_y = V_2' &= 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

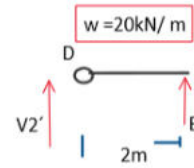


Figura.51. Discretización sección D-E

Analizando la sección B - D

Para conocer la reacción C_y , se aplica la estática de fuerzas de forma vertical, y se puede encontrar el momento M_c , al aplicar momento en B.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ C_y - V_1' - V_2 - w &= 0 \\ C_y = w (6 \text{ m}) + V_1' + V_2 &= 160 \text{ kN} \end{aligned}$$

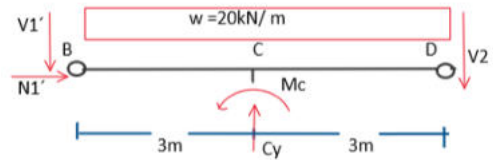


Figura.52. Discretización sección B-D

El momento se realiza en B, en sentido anti horario positivo, por la convención de resistencia de materiales.

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ C_y \cdot (3 \text{ m}) + M_c - 120 \text{ kN} \cdot (3 \text{ m}) - V_2 \cdot (6 \text{ m}) &= 0 \\ M_c = -160 \text{ kN} \cdot (3 \text{ m}) + 120 \text{ kN} \cdot (3 \text{ m}) + 20 \text{ kN} \cdot (6 \text{ m}) &= 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Ecuaciones de fuerza axial, cortante y momento flector.

El estudiante, puede hacer los cortes donde los considere oportunos para su análisis. Para conocer las ecuaciones de axial, cortante y momento flector se realizan cortes en la viga, 1-1, 2-2, 3-3 y 4-4.

Sección de viga con cortes

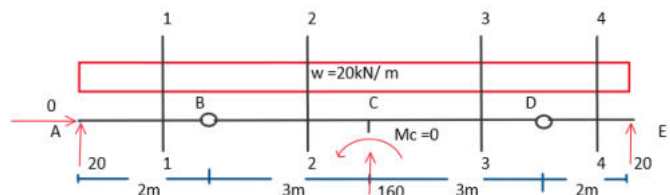


Figura.53. Sistema estructural global con cortes totales.



Corte 1-1

Para conocer las ecuaciones del corte 1-1, se aplica la estática de forma vertical y horizontal, además, se genera un momento en el punto del corte, para conocer el momento interno M1 como las reacciones internas. V1 y N1

$$0 \leq (x) \leq 2 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 = 0 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = 20 \text{ kN} - 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (x)$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_1 = 20 \text{ kN} \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2}$$

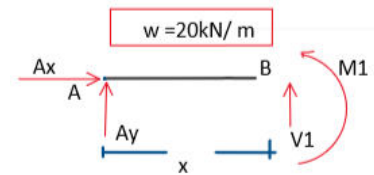


Figura.54. Corte 1-1 sistema de viga con empotramiento móvil externo.

Corte 2-2

Para conocer las ecuaciones del corte 2-2, después del perno, las reacciones internas serán vertical y horizontal, así, se establece el nuevo rango para evaluar las fuerzas internas V2 y M2.

$$0 \leq (x) \leq 3 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_2 = 0 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_2 = -20 \text{ kN} - 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (x)$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_2 = -20 \text{ kN} \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2}$$

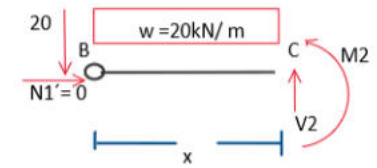


Figura.55. Corte 2-2 sistema de viga con empotramiento móvil externo.

Corte 3-3

Para conocer las ecuaciones del corte 3-3, continuamos en el tramo anterior, pero se incorpora, las nuevas fuerzas, para este caso la fuerza vertical, ya que el momento en B es cero.

$$3 \text{ m} \leq (x) \leq 6 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_3 = 0 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_3 = -20 \text{ kN} - 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (x) + 160 \text{ kN}$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_3 = -20 \text{ kN} \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} + 160 \text{ kN} (x - 3)$$

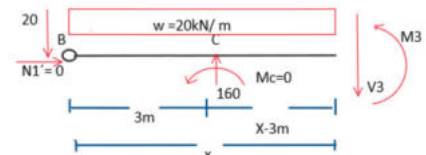


Figura.56. Corte 3-3 sistema de viga con empotramiento móvil externo.

Corte 4-4

Finalmente, para conocer las ecuaciones del corte 4-4, se toma el borde final, para el análisis, o se evalúa después del perno, se debe considerar el sentido de resistencia conocido como la caja de valores.

$$0 \text{ m} \leq (x) \leq 2 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_4 = 0 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_4 = 20 \text{ kN} - 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (x)$$

$$\sum M_0 = 0 \quad M_4 = 20 \text{ kN} \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2}$$

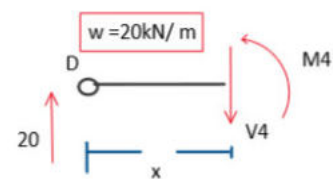


Figura.57. Corte 4-4 sistema de viga con empotramiento móvil externo

Punto de inflexión o punto crítico.

El punto crítico se genera cuando el diagrama de cortante, posee un corte con el eje horizontal de la viga. Se debe calcular la distancia del tramo, ya que genera el momento máximo del sistema.

Para el ejemplo, se genera dos momentos máximos, de acuerdo al diagrama de cortante, al ser simétrico, la distancia del punto crítico, se evalúa con las ecuaciones de cortante de los tramos que cortan con el eje horizontal, despejando la variable (x).

Ecuación cortante tramo A-B

$$20 - 20x = 0$$

$$x = \frac{20}{20} = 1 \text{ m}$$

Ecuación cortante tramo D-E

$$20 - 20x = 0$$

$$x = \frac{20}{20} = 1 \text{ m}$$



Diagramas:

Diagrama de cortante. (V)

El diagrama de cortante representa el punto más propenso donde la viga genera un mayor daño por corte, para el ejemplo, será de 80 kN a 5m de la longitud, al momento de diseñar en concreto armado, se debe tomar en cuenta el cortante máximo.

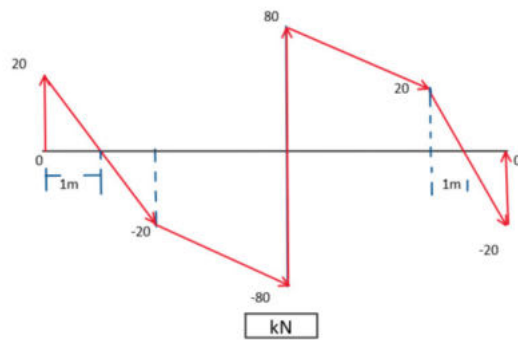


Figura.58. Diagrama de fuerza cortante, viga con empotramiento móvil externo.

Diagrama de Momento Flector. (Mo)

En el diagrama de momento, permite identificar el momento positivo y negativo.

Se utiliza para su diseño en acero o concreto armado, para el ejemplo, el momento máximo será de 150 kN x m, como se muestra en la figura 59. Un momento positivo de 10 kN, en el tramo donde la fuerza cortante es nula.

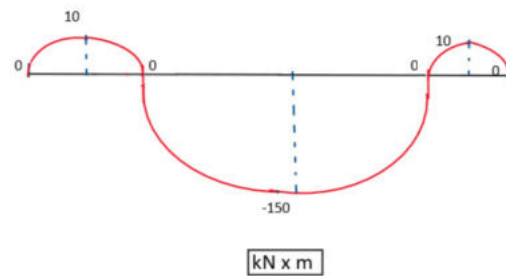


Figura.59. Diagrama de momento flector, viga con empotramiento móvil externo.

Diagrama de Fuerza Axial. (N).

En el diagrama de fuerza axial (N), será nulo, debido a que no genera ninguna fuerza a compresión ni a tracción en la viga. Como se muestra en la figura 60.

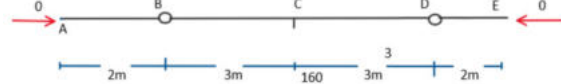


Figura.60. Diagrama de momento flector, viga con empotramiento móvil externo.





Estructuras estáticas pórticos

4.1 Introducción elementos estructurales - pórticos

Los pórticos son el conjunto de juntas rígidas, pernos o articulaciones internas, bielas o empotramientos móviles, vigas, columnas y cimientos, que se idealizan al representar una estructura funcional según la condición de uso, permite comprender la desplazabilidad y deformaciones que se generan por las cargas externas o internas y facilitan el entendimiento de casos reales, este tipo de estructuras son hiperestáticas, por lo cual, se necesita comprender conocimientos previos para resolver este tipo de estructuras de forma manual, se pueden emplear diferentes métodos, estos métodos son: Fuerzas, desplazamientos, rotaciones, Cross y tres momentos.

Estos métodos se han ido perfeccionando, dando un análisis más preciso con softwares de cálculo estructural, sin embargo, es de importancia conocer como se efectúa un correcto análisis, para mejorar la comprensión en las etapas iniciales de cálculo estructural, por tanto, el análisis se puede idealizar en un sistema bidimensional.

En el apartado se explicará como resolver pórticos isostáticos, desde la obtención de reacciones, despiece, interpretación de diagramas, axial, cortante, momento flector, puntos críticos, con la finalidad de ayudar al lector en los conceptos básicos de análisis estructural y resistencia de materiales.

4.2 Condición axialmente infinitos.(A_{∞}).

Ahora, existen estructuras que se las idealiza como axialmente infinito (A_{∞}) significa que son restricciones asociadas a las coordenadas locales, estos elementos estructurales al poseer esta condición no pueden alargarse o acortarse su eje axial, ya sean columnas o vigas, pero, se puede generar torsión, es importante considerar la idealización de axialmente infinito, debido al tipo de vinculación interna en el método de rotaciones.

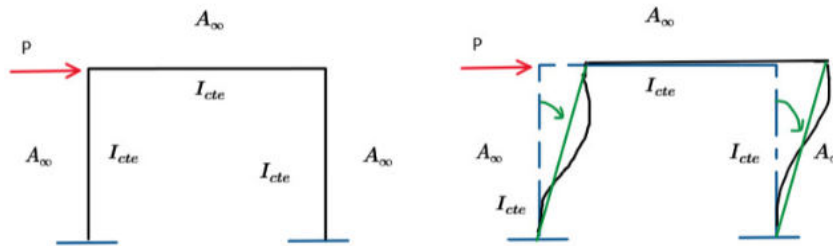


Figura.61. Deformada de un pórtico, condición Axialmente infinito.

4.3 Condición inercialmente infinitos.(I_{∞}).

De igual forma, existen estructuras que se idealizan como inercialmente infinito (I_{∞}) significa que se pueden alargar en su eje longitudinal o axial, ya sean columnas o vigas, pero no se genera torsión en su propio eje, es importante considerar la idealización de inercialmente infinito, debido al tipo de vinculación interna, es importante considerar la idealización de inercialmente infinito, debido al tipo de vinculación interna en el método de rotaciones.

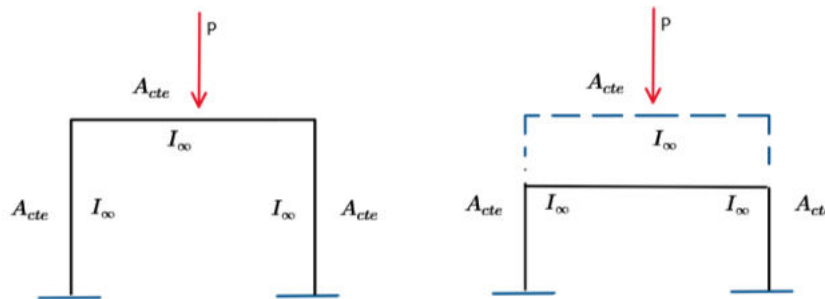


Figura.62. Deformada de un pórtico, condición Inercialmente infinito.





4.4 Pórticos Isostáticos.

Los pórticos isostáticos son sistemas que se encuentran en equilibrio es posible determinar todas las fuerzas internas conociendo únicamente las ecuaciones de la estática. Según la condición de uso y la rigidez se emplea distintos sistemas que permitan la posición y armado de una estructura como se muestra en la figura 63. Los sistemas, son idealizados, para determinar los puntos críticos, y dimensionar en materiales que resistan a estos.



Figura.63. Sistema de pórticos vigas y columnas de acero.



Figura.64. Sistema estructural de pórtico de concreto armado.



Figura.65. Sistema estructural pórtico de madera.

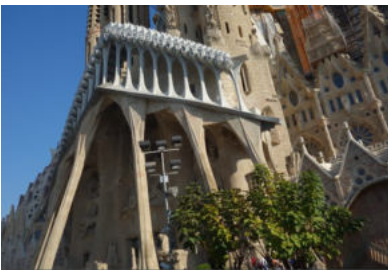


Figura.66. Sistema estructural pórtico de concreto con columnas y vigas inclinadas.



Figura.67. Pórtico de vigas y columnas inclinadas de concreto armado.



Figura.68. Pórtico con cercha de madera.

4.5 Ejercicios.

Ejercicio 4.5.1

Dado el siguiente sistema de pórtico, idealizado determinar:

- Grado de indeterminación de la estructura.
- Cálculo de reacciones del sistema estructural.
- Cálculo de las ecuaciones de axial, cortante y momento flector.
- Puntos de inflexión del sistema.
- Cálculo de los diagramas Fuerza axial, cortante y momento flector.

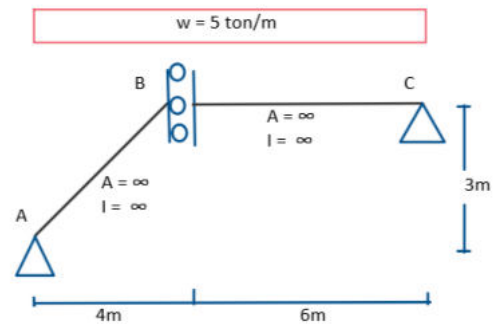


Figura.69 Idealización de sistema estructural con columnas inclinadas.

Solución:

El ejemplo tiene una biela interna o empotramiento móvil interno, se debe realizar el cálculo de los grados de indeterminación para clasificar su estructura.





Cálculo de grados de indeterminación:

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 \cdot n$$

Reacciones externas: $R_{ext} = 3$

Reacciones internas: $R_{int} = 3 (2 - 1) = 3$

$$GH = (3 + 3) - 3 \cdot (2) = 0$$

Por tanto, la estructura es estable con grado de indeterminación 0 (Isostática).

Despiece de la estructura.

Para el despiece, se conoce que la biela interna genera dos condicionamientos, la rotación y el desplazamiento perpendicular a la abertura, por tanto, la estructura discretizada se muestra en la figura 71.

Cálculo de las reacciones.

Para conocer las reacciones del sistema, se aplica momento en la articulación A, y se transforma la carga distribuida en una carga puntual, para el análisis estático.

$\Sigma M_c = 0$ "anti horario +"	$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma F_x = 0$
$-M_1' + 30 \text{ ton} (3 \text{ m}) = 0$	$C_y - 30 \text{ ton} = 0$	$N_1' = C_x$
$M_1' = 90 \text{ ton} \cdot \text{m}$	$C_y = 30 \text{ ton}$	

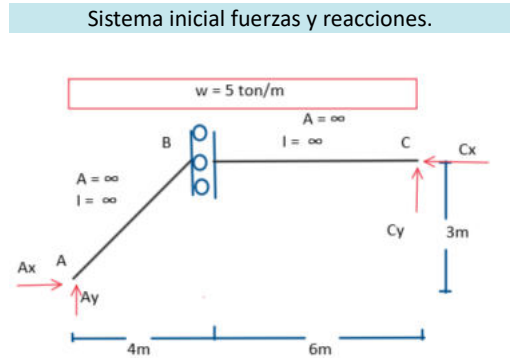


Figura.70. Estructura con biela interna y columna inclinada.

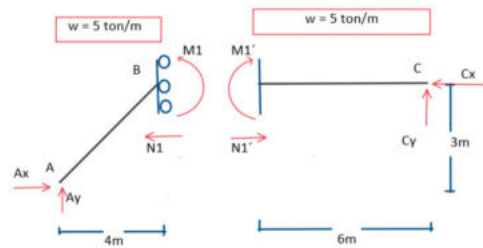


Figura.71. Discretización de estructura con biela interna y columna inclinada.

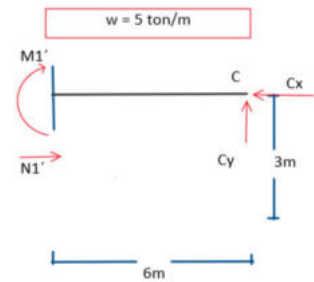


Figura.72. Discretización lado derecho de la biela interna.

Analizando el lado derecha de la biela interna, podemos aplicar momento en el vínculo de A

$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma F_x = 0$
$A_y - 20 \text{ ton} = 0$	$A_x - N_1 = 0$
$A_y = 20 \text{ ton}$	$A_x = 16.667 \text{ ton}$
$\Sigma M_A = 0$	
$M_1 + N_1 \cdot (3 \text{ m}) - 20 \text{ ton} \cdot (2 \text{ m}) = 0$	
$N_1 = \frac{-90 \text{ ton} \cdot \text{m} + 20 \text{ ton} \cdot (2 \text{ m})}{3} = -16.667 \text{ ton}$	

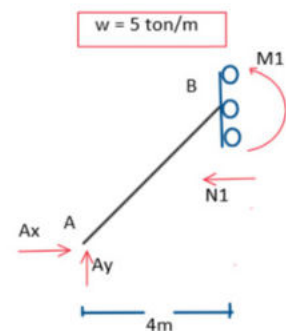


Figura.73. Discretización lado izquierdo de la biela interna.





Para conocer el ángulo de inclinación se aplica las identidades trigonométricas que relacionan el lado opuesto y adyacente del triángulo.

Cálculo del ángulo:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ$$

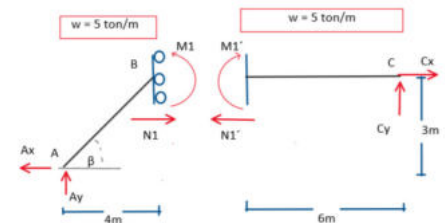


Figura.74. Discretización reacciones externas e internas.

Linealizando la reacción horizontal Ax respecto a la viga inclinada

Se realiza la linealización de la reacción $[A_x]$, con la finalidad de encontrar las ecuaciones de cortante. Por tanto, se genera dos componentes perpendicular a la viga y paralela a ella.

$$A_{x,x} = A_x \cdot \cos(\beta) \quad A_{x,y} = A_x \cdot \sin(\beta)$$

$$A_{x,x} = 16.667 \cos(36.87^\circ) \quad A_{x,y} = 16.667 \sin(36.87^\circ)$$

$$A_{x,x} = 13.333 \text{ ton} \quad A_{x,y} = 10 \text{ ton}$$

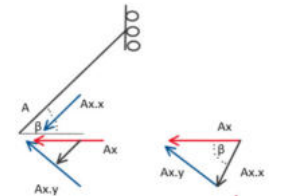


Figura.75. Linealización de reacción Ax.

Linealizando la reacción vertical Ay respecto a la viga inclinada

Se realiza la linealización de la reacción $[A_y]$, con la finalidad de encontrar las ecuaciones de cortante. Así, tenemos dos componentes perpendicular a la viga y paralela a ella.

$$A_{y,x} = A_y \cdot \sin(\beta) \quad A_{y,y} = A_y \cdot \cos(\beta)$$

$$A_{y,x} = 20 \sin(36.87^\circ) \quad A_{y,y} = 20 \cos(36.87^\circ)$$

$$A_{y,x} = 12 \text{ ton} \quad A_{y,y} = 16 \text{ ton}$$

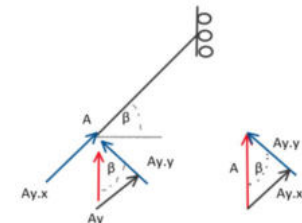


Figura.76. Linealización de reacción Ay.

Calculando la reacción resultante en A vertical y horizontal en la viga inclinada.

Ahora, se debe conocer la resultante, dependiendo de la posición del vector se suma o se resta, si se encuentra en la misma dirección será suma, de lo contrario se resta.

$$A_{x,r} = A_{x,x} + A_{x,y} \quad A_{y,r} = A_{x,y} + A_{y,y}$$

$$A_{x,r} = 12 \text{ ton} - 13.333 \text{ ton} \quad A_{y,r} = 10 \text{ ton} + 16 \text{ ton}$$

$$A_{x,r} = -1.33 \text{ ton} \quad A_{y,r} = 26 \text{ ton}$$

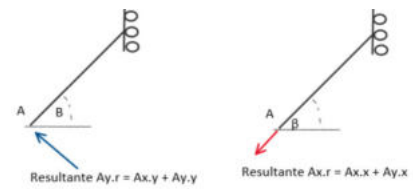


Figura.77. Fuerza resultante vertical y horizontal.

Linealizando la carga distribuida hacia la viga inclinada

Por ser una viga inclinada, se debe calcular la fuerza distribuida en dirección perpendicular de la viga, por tanto, se linealiza la fuerza.

$$P = w \cdot (4 \text{ m}) = 20 \text{ ton}$$

$$\cos\beta = \frac{P_y}{P} \quad \sin\beta = \frac{P_x}{P}$$

$$P_y = P \cos(\beta) \quad P_x = P \sin(\beta)$$

$$P_y = 20 \cos(36.87^\circ) = 16 \text{ ton} \quad P_x = 20 \sin(36.87^\circ) = 12 \text{ ton}$$

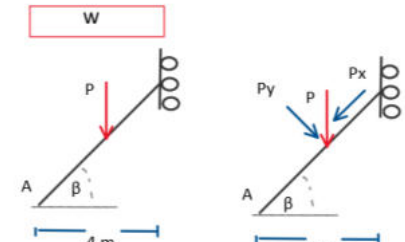


Figura.78. Linealización de carga distribuida.

Sistema de viga inclinada con cargas distribuidas

El valor de las fuerzas distribuidas, perpendiculares y paralelas a la viga inclinada se debe considerar para las ecuaciones de fuerza axial, cortante y momento flector.

$$w_y = \frac{P_y}{5 \text{ m}} = \frac{16 \text{ ton}}{5 \text{ m}} = 3.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

$$w_x = \frac{P_x}{5 \text{ m}} = \frac{12 \text{ ton}}{5 \text{ m}} = 2.4 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

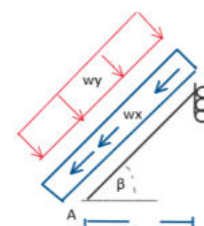


Figura.79. Carga distribuida perpendicular a la columna.



Ecuaciones de fuerza axial, cortante y momento flector.

El estudiante, puede hacer los cortes donde los considere oportunos para su análisis. Para conocer las ecuaciones de axial, cortante y momento flector, se realiza dos cortes en el sistema 1-1 y 2-2.

Sección de viga con cortes

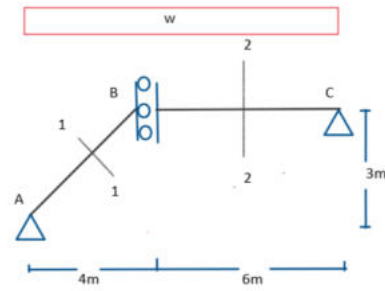


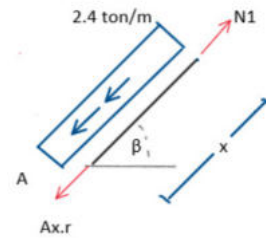
Figura.80. Cortes globales de estructura con biela interna y columna inclinada.

Corte 1-1

El corte 1-1, genera la fuerza interna axial, para conocer la ecuación, se aplica la estática de forma longitudinal, considerando todas las fuerzas paralelas a la viga.

$$0 \leq (x) \leq 5 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 = 1.333 \text{ ton} + 2.4 (x)$$



El corte 1-1, genera la fuerza cortante y momento flector, así, se debe evaluar respecto a las fuerzas perpendiculares a la viga.

$$0 \leq (x) \leq 5 \text{ m}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = 26 \text{ ton} - 3.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (x)$$

$$\sum M_o = 0 \quad M_1 = 26 \text{ ton} \cdot (x) - \frac{3.2 \cdot (x)^2}{2}$$

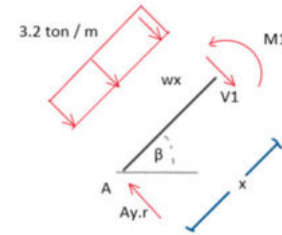


Figura.81. Sección de corte 1-1 columna inclinada

Corte 2-2

En el corte 2-2, se aplica la estática para conocer la fuerza axial, cortante y momento flector, además, el momento generado en el corte 1-1 se transmite por la junta rígida a la sección.

$$0 \leq (x) \leq 6 \text{ m}$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_2 = 16.667$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_2 = -5 (x)$$

$$\sum M_o = 0 \quad M_2 = 90 \text{ ton} \cdot \text{m} - \frac{5 (x)^2}{2}$$

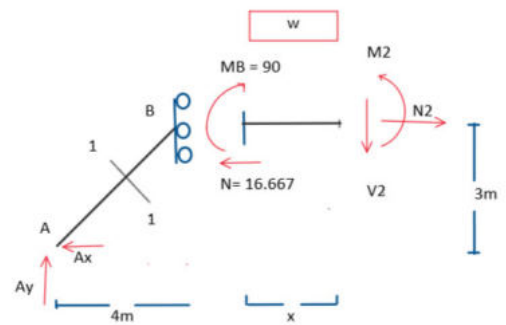


Figura.82. Sección de corte 2-2 columna inclinada y viga.

Diagramas:

Diagrama de cortante. (V)

El diagrama representa el daño por corte que será propenso a generar la viga, para el ejemplo será de 30 toneladas (Ton) en su extremo (C), así, al realizar un predimensionado de concreto armado o acero, se debe tomar en cuenta el corte máximo.

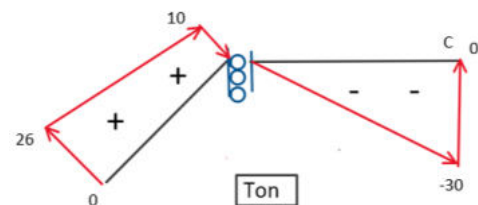


Figura.83. Diagrama de fuerza cortante de estructura con biela interna y columna inclinada.



Diagrama de Momento Flector. (Mo)

De igual forma, el diagrama de momento, genera los puntos más desfavorables, para el ejemplo, será de 90 toneladas por metro (Ton x m), además, el empotramiento móvil interno, genera el traslado de momento flector, como se muestra en la figura 84.

Una forma de conocer si está correcto el diagrama de momento, es la transmisión de momento que se genera entre una viga a columna, o entre una viga a otra viga conectadas por el vínculo.

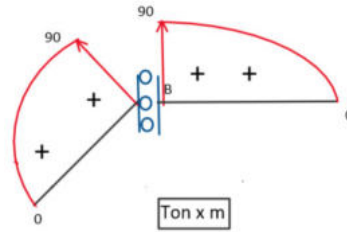


Figura.84. Diagrama de momento flector de estructura con biela interna y columna inclinada.

Diagrama de Fuerza Axial. (N).

El diagrama de fuerza axial (N), representa las fuerzas longitudinales en la viga y columna, estas fuerzas serán las linealizaciones en sentido longitudinal a la viga o columna.

El diagrama muestra las fuerzas que interactúan en la columna, como las fuerzas en la viga.

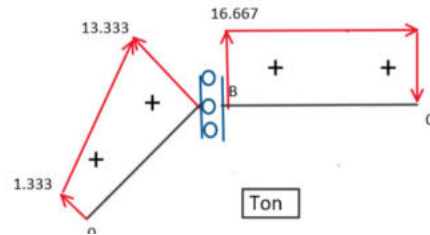


Figura.85. Diagrama de fuerza axial de estructura con biela interna y columna inclinada.





5.1 Método de las fuerzas

El método de las fuerzas o deformaciones coherentes, es un método desarrollado para la resolución de estructuras estáticamente indeterminadas, el cual consiste en la supresión de restricciones, tanto externas como internas, para transformar la estructura real en un sistema isostático con la aplicación de fuerzas redundantes equivalentes, a las restricciones suprimidas. A través del principio de superposición, principios energéticos y conceptos de rigidez y flexibilidad, es posible realizar un planteamiento para la resolución general de estructuras estáticamente indeterminadas.

5.2 Principio de Superposición

El principio señala que " Si los desplazamientos y esfuerzos en todos los puntos de una estructura son proporcionales a las cargas que los causan, los desplazamientos y los esfuerzos totales que resultan de la aplicación simultánea de varias cargas son la suma de los desplazamientos y esfuerzos causados por dichas cargas, aplicadas separadamente." Esto quiere decir, para que pueda aplicarse la superposición es necesario que exista una relación lineal entre cargas, esfuerzos y deflexiones. Debe cumplir la ley de Hooke.

El sistema isostático equivalente se conoce como sistema primario. Se puede discretizar las cargas del sistema, para cada sistema de carga, lo que causará sus deformaciones correspondientes del sistema primario, se explica en la figura 86.

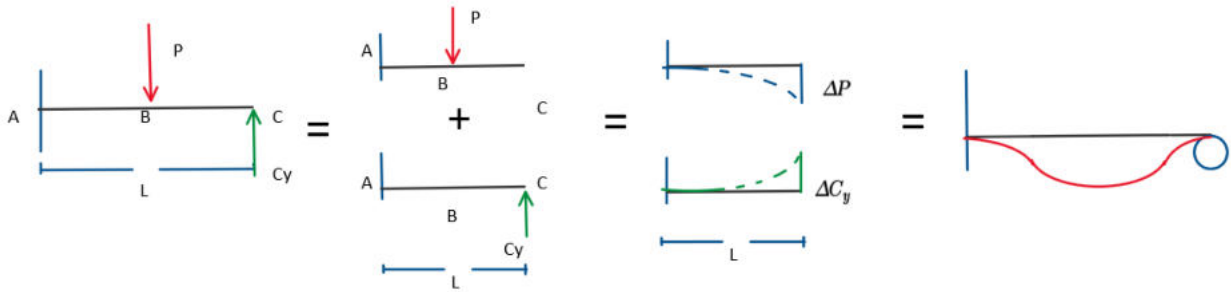


Figura.86. Principio de superposición.

Debido a que se trabaja con estructuras en el rango elástico - lineal, donde es válido el principio de superposición, por lo tanto, la ley de proporcionalidad de la ley de Hooke es válida, es decir, las deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas. Mediante esta definición podemos plantear la siguiente relación como se muestra en la figura 87. A partir de estos conceptos, las deformaciones o desplazamientos obtenidos en el sistema primario pueden reescribirse en función de la flexibilidad para las fuerzas redundantes.

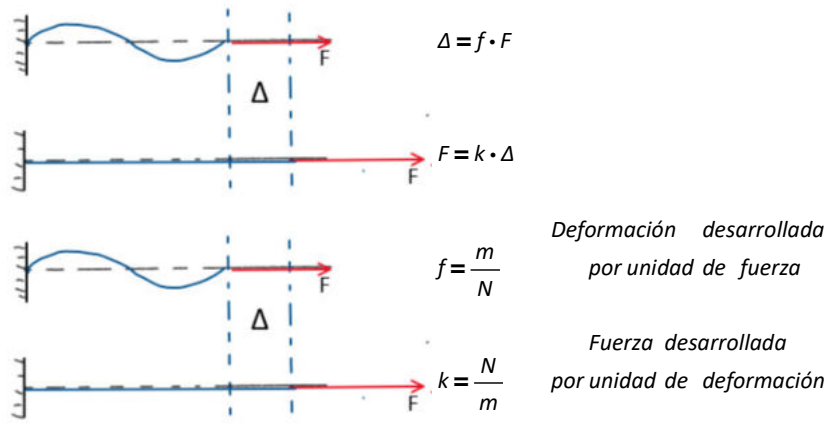


Figura.87. Desplazamientos para cada fuerza.

La flexibilidad en un punto se determina a partir de su definición; "deformación por unidad de fuerza", es decir, con la aplicación de una fuerza unitaria en dirección del desplazamiento. De esta forma, se puede mediante las ecuaciones de compatibilidad, determinar el valor de la fuerza redundante evidenciada a través de la superposición de la vinculación.

$$\Delta_{C_y}^P + f_{C_y}^{C_y} \cdot C_y = 0 \qquad C_y = \frac{-\Delta_{C_y}^P}{f_{C_y}^{C_y}}$$





5.3 Fuerzas redundantes o estados complementarios.

Es importante recordar que, las vinculaciones o restricciones son una representación gráfica de condiciones estáticas y cinemáticas en el punto de aplicación de las mismas, al sustituir las reacciones redundantes (cambios en la vinculación) por sus respectivas cargas unitarias se debe asegurar el equilibrio estático del sistema es decir que la estructura modificada o virtual sea estable.

Por tanto, se cambiará el vínculo de manera tal que, solo la reacción redundante seleccionada, se libere.

5.4 Ley de Hooke

La ley de Hooke, establece que las deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas, el análisis de esta condición da lugar a dos conceptos fundamentales en el cálculo estructural la rigidez y la flexibilidad, ya que habrá distribución de fuerzas internas en función a ellas.

5.5 Flexibilidad

La flexibilidad es la deformación, giro o desplazamiento desarrollada por la aplicación de una fuerza, se la conoce como el inverso de la rigidez.

$$f = \frac{\Delta}{F} \quad \text{Coeficiente de flexibilidad}$$

5.6 Rigidez

La rigidez es la fuerza desarrollada por unidad de deformación, es decir, la resistencia de la estructura a deformarse bajo un determinado estado de carga.

$$k = \frac{F}{\Delta} \quad \text{Coeficiente de rigidez}$$

5.7 Ecuaciones de Compatibilidad

Las ecuaciones de compatibilidad, permiten conocer el valor de las reacciones del sistema real, dependiendo del grado de hiperestaticidad será el número de ecuaciones de compatibilidad, y se puede representar de forma matricial.

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + \Delta_{10} = 0$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + \Delta_{20} = 0$$

$$X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} + \Delta_{30} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{bmatrix}$$

En donde:

- $[f]$ Matriz de flexibilidad
- $[F]$ Matriz de fuerzas redundantes
- $[\Delta^0]$ Matriz de desplazamientos del sistema primario.

$$[f] \cdot [F] = -[\Delta^0]$$

Figura.88. Matriz de compatibilidad

5.8 Matriz de flexibilidad

La matriz de flexibilidad de un sistema estructural, representa las características de deformabilidad, independiente al sistema de carga y es única para cada sistema, sin embargo, para un sistema estructural, la matriz de flexibilidad varía en función de las fuerzas redundantes liberadas o evidenciadas, aunque en términos de comportamiento representan lo mismo.

Entre las características de la matriz de flexibilidad están:

- Diagonal principal es definida positiva.
- Es simétrica con respecto a la diagonal principal (teorema de Maxwell).
- Determinante distinta de cero, por lo tanto, es invertible.
- No existe en estructuras inestables.

5.9 Ley de Maxwell

La ley de James Maxwell o ley de reciprocidad de deformaciones, es una característica fundamental para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas y enuncia lo siguiente:

"La deformación determinada en un punto (i) y causada por una carga unitaria en el punto (j) será exactamente igual que la deformación en el punto (j) causada por una carga unitaria en el punto (i)."

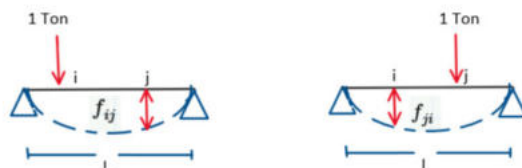


Figura.89. Idealización de la ley de Maxwell





La ley puede evidenciarse mediante la obtención de los coeficientes de flexibilidad:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix} \quad \delta_{12} = \delta_{21}$$

Figura.90. Coeficientes de flexibilidad.

5.10 Asentamientos en los apoyos

Los asentamientos en los apoyos se pueden idealizar, debido a la carga de la superestructura, ya que, puede generar estos asentamientos en los apoyos, es importante que el proyectista pueda considerar los mismos, en las estructuras indeterminadas, ya que, desarrollan deformaciones en los miembros estructurales, dicho desplazamiento interviene durante cualquier proceso para la determinación de solicitaciones y deformaciones de la estructura.

Asentamiento externo en el apoyo B:

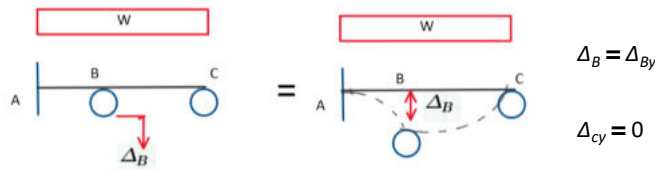


Figura.91. Idealización de asentamientos en una estructura.

Por tanto, para este caso las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{10} &= \Delta_1 & \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix} \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{20} &= 0 & [f] \cdot [F] &= [\Delta] - [\Delta^0] \end{aligned}$$

Figura.92. Ecuaciones de compatibilidad.

5.11 Variación de temperatura

Cuando tenemos una estructura que presenta cambios de temperatura se producen deformaciones de la estructura, en el caso de las estructuras hiperestáticas también se producen solicitaciones.

Si tenemos la barra i (con vínculos isostáticos que le permiten deformarse libremente) sometida a un gradiente de temperatura $[\Delta_{Ti}]$, sabemos que la deformación producida es :

$$\varepsilon_i = \alpha_i \cdot \Delta_{Ti}$$

Donde: α_i es el coeficiente de dilatación térmica de la barra i.

El estiramiento δ_i de la barra i será entonces:

$$\delta_i = \varepsilon_i \cdot L_i = \alpha \cdot \Delta_{Ti} \cdot L_i$$

La estructura fundamental por ser isostática permite que se produzcan libremente las deformaciones causadas por la variación térmica de las barras. En la deformación libre solo se producen estiramientos o retracciones de la barra, y no se producen tensiones o solicitaciones en la estructura.

Para resolver la estructura, se puede suponer el efecto como un estado de desplazamiento más de la estructura, que se puede denominar estado T.

Para el caso, se somete a la estructura fundamental a los desplazamientos producidos por las cargas (Estado 0) y a continuación a las deformaciones producidas por la temperatura.

Las fuerzas incógnitas (x) tendrán que ser tales, que su efecto, sumado con las dos anteriores (Estado 0 y Estado T), anulan los desplazamientos en los apoyos.

En este caso la ecuación canónica la podemos expresar agregándole el término de la temperatura, quedando:

$$\delta_0 + \delta_T + F_{xx} \cdot X = 0$$





5.12 Ejercicios.

Ejercicio 5.12.1

Dada el siguiente sistema estructural de sección (EI) constante calcular:

- Los grados de indeterminación
- reacciones del sistema.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento flector
- Utilizar el método de las fuerzas.

Grados de indeterminación

Se aplica la ecuación de grado de hiperestaticidad, para conocer el número de ecuaciones del sistema estructural.

$$GH = \left(\sum R_{ext} + \sum R_{int} \right) - 3n$$

$$\text{Nodo A} = \text{Nodo B} \quad 1(n-1) = 0$$

Ya que el sistema es hiperestático de grado 1, se libera un vínculo.

$$GH = (4 + 0) - 3(1) = 1 \quad \text{Por tanto, es Hiperestática de grado 1}$$

Sistemas estructurales posibles

Los sistemas estructurales que se generan son:
 El sistema principal y el sistema virtual.
 El sistema principal, no posee el vínculo liberado.
 El sistema virtual, no posee las cargas reales, solo la fuerza redundante.

El sistema principal, posee las cargas del sistema real, pero no posee la fuerza virtual.

El sistema virtual posee las fuerzas redundantes, y la vinculación del sistema principal, para el ejemplo será la articulación y el rodillo.

Sistema inicial o real

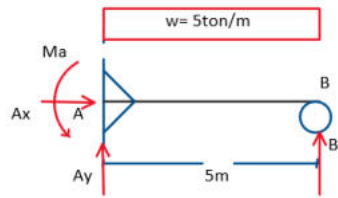


Figura.94. Sistema de viga real.

Sistema principal

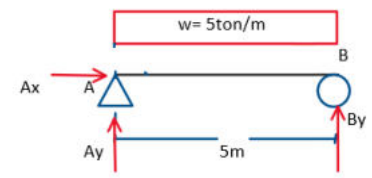


Figura.95 Sistema de viga principal.

Sistema virtual

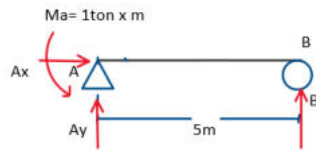


Figura.96. Sistema de viga virtual.

Analizando el sistema virtual (V1)

Cálculo de las reacciones del sistema virtual.

$$\sum M_A = 0 \quad 1 \text{ ton} \cdot m + B_y \cdot (5 \text{ m}) = 0 \quad B_y = -\frac{1}{5} \text{ ton} = -0.2 \text{ ton} \quad \text{"sentido opuesto"}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y = B_y = \frac{1}{5} \text{ ton} = 0.2$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

Sistema virtual

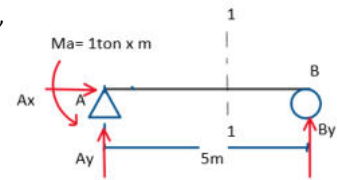


Figura.97. Reacciones externas sistema virtual.

Corte 1-1 Sistema Virtual

Ecuaciones de cortante y momento para el sistema virtual.

$$0 \leq x \leq 5$$

Se debe aplicar el despiece a la sección, para conocer las fuerzas internas.

$$\sum F_{y,v1} = 0 \quad V_1 = 0.2 \text{ ton}$$

$$\sum M_{v1} = 0 \quad M_1 = 0.2 \text{ ton} \cdot (x) - 1 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 1-1 Virtual

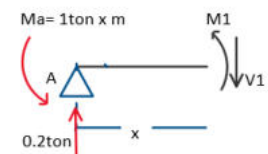


Figura.98. Corte 1-1 viga hiperestática.



Analizando el sistema principal (P)

Sistema principal

Cálculo de las reacciones del sistema principal.

$$\sum M_A = 0 \quad B_y \cdot (5 \text{ m}) - 5 \text{ ton} \cdot \left(\frac{(5 \text{ m})^2}{2} \right) = 0 \quad B_y = 12.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - 25 \text{ ton} = 0 \quad A_y = 12.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

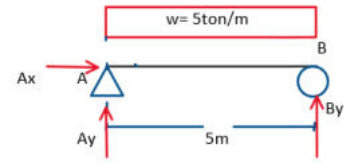


Figura.99. Reacciones externas sistema principal.

Corte 1-1 Sistema Principal

Ecuaciones de cortante y momento para el sistema virtual. (v1)

$$0 \leq x \leq 5$$

$$\sum F_{y,v1} = 0 \quad V_1 = 12.5 \text{ ton} - 5 \text{ ton} \cdot (x)$$

$$\sum M_{v1} = 0 \quad M_1 = 12.5 \text{ ton} \cdot (x) - \frac{5 \cdot (x)^2}{2}$$

Corte 1-1 Principal

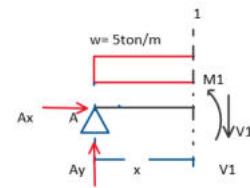


Figura.100. Corte 1-1 viga hiperestática.

Cálculo de los desplazamientos $[\Delta]$:

Para conocer el valor de los desplazamientos, se debe considerar las ecuaciones de momentos establecidas previamente, estarán evaluados en el tramo de la longitud de cada viga o columna.

Se resuelve aplicando las propiedades de las integrales definidas, el proceso se debe llevar a cabo con cuidado, para evitar alterar el resultado del desplazamiento, se puede ayudar de algún software para conocer el valor de las integrales.

Para los próximos ejercicios se empleará en el proceso de solución, un software, facilitando el cálculo.

El desplazamiento que se obtiene será Δ_{10} , será resultado de integrar la ecuación de momento del sistema virtual (V1) con el sistema principal (E0).

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_o \cdot M_1}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{5m} (0.2 \text{ ton} \cdot (x) - 1 \text{ ton} \cdot m) \cdot \left(12.5 \text{ ton} \cdot (x) - \frac{5 \text{ ton} \cdot (x)^2}{2} \right) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{5m} \left(\frac{5}{2} \text{ ton}^2 x^2 - \frac{1}{2} \text{ ton}^2 x^3 - 12.5 \text{ ton}^2 m \cdot x + \frac{5}{2} \text{ ton}^2 m \cdot x^2 \right) dx \right)$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{2} \text{ ton}^2 \left(\int_0^{5m} x^2 dx \right) - \frac{1}{2} \text{ ton}^2 \int_0^{5m} x^3 dx - 12.5 \text{ ton}^2 m \int_0^{5m} x dx + \frac{5}{2} \text{ ton}^2 m \cdot \int_0^{5m} x^2 dx \right)$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5^4}{4} \right) - 12.5 \cdot \left(\frac{5^2}{2} \right) + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5^3}{3} \right) \right)$$

$$\Delta_{10} = \frac{-625}{24 \cdot EI}$$

Cálculo de los desplazamientos $[\delta]$:

El desplazamiento que se obtiene será δ_{11} , será el resultado de integrar la ecuación de momento del sistema virtual (V1) multiplicado por sí mismo.

De igual manera, se aplica el proceso de las integrales definidas para conocer el valor de desplazamiento.

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx \quad M_1 = \frac{1}{5} \text{ ton} \cdot (x) - 1 \text{ ton} \cdot m$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{5m} \left(\frac{1}{5} \text{ ton} \cdot (x) - 1 \text{ ton} \cdot m \right) \cdot \left(\frac{1}{5} \text{ ton} \cdot (x) - 1 \text{ ton} \cdot m \right) dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\int_0^5 \left(\frac{1}{25} \cdot x^2 - \frac{2}{5} x - 1 \right) dx \right)$$





El resultado será en función de la flexibilidad (EI), por ser constante se mantiene hasta la solución de ecuaciones.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{25} \int_0^5 x^2 dx - \frac{2}{5} \int_0^5 x dx - \int_0^5 1 dx \right)$$

$$\delta_{11} = \frac{5}{3 \cdot EI}$$

Ecuación canónica de compatibilidad $[X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{10} = 0]$:

Las ecuaciones de compatibilidad serán el número de fuerzas redundantes, para el ejemplo será de grado 1, así, se genera una ecuación canónica.

$$[X_1] = [M_1]$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{11} \cdot M_1 + \Delta_{10} = 0$$

Realizamos el despeje de la fuerza (M1), será el valor de momento que se considero del sistema virtual.

$$M_1 = \frac{-\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-\left(\frac{-625}{24 \cdot EI}\right)}{\frac{5}{3 \cdot EI}} = \frac{625 \cdot (3)}{24 \cdot 5} = \frac{125}{8} = 15.625 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Cálculo del Sistema inicial o real

Cálculo de las reacciones del sistema real por estática.

$$\sum M_A = 0 \quad B_y \cdot (5 \text{ m}) - 5 \text{ ton} \cdot \left(\frac{(5 \text{ m})^2}{2}\right) + 15.625 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0 \quad B_y = 9.375 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - 25 \text{ ton} = 0 \quad A_y = 15.625 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

Sistema Real

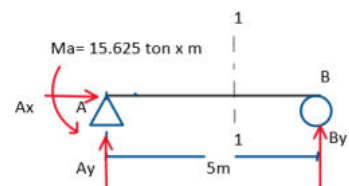


Figura.101. Reacciones externas sistema real.

Cálculo de las reacciones del sistema real por ecuación de compatibilidad.

Se conoce las reacciones por estática, además, se puede calcular por principio de trabajo virtual, se muestra a continuación:

$$A_y = A_{y,principal} + A_{y,virtual} \cdot (X) \quad A_y := 12.5 + 0.2 \cdot (15.625) = 15.625$$

$$B_y = B_{y,principal} + B_{y,virtual} \cdot (X) \quad B_y := 12.5 + -0.2 \cdot (15.625) = 9.375$$

Corte 1-1 Sistema Real

Ecuaciones de cortante y momento para el sistema virtual.

$$0 \leq x \leq 5$$

Ahora, se puede calcular las ecuaciones de corte y momento realizando el corte en 1-1 y evaluando con la convención de resistencia de materiales o de la caja de signos.

$$\sum M_A = 0 \quad M_1 = 15.625 \text{ ton} \cdot (x) - 5 \cdot \frac{(x)^2}{2} - 15.625 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = 15.625 \text{ ton} - 5 \cdot (x)$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 = 0 \text{ ton}$$

Corte 1-1 Sistema Real

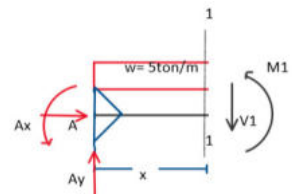


Figura.102. Corte 1-1 viga hiperestática.

Diagramas de fuerza cortante y Momento flector del sistema real :

Diagrama de cortante

Diagrama de Momento

Para conocer los puntos críticos, como se mostró en capítulos anteriores, se puede encontrar igualando la ecuación de cortante y despejando la variable x.

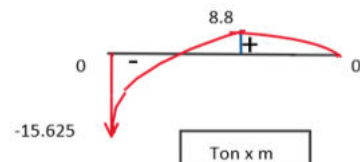
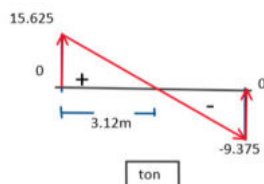


Figura.103. Diagramas de corte y momento del sistema real.



Ejercicio 5.12.2

Para el siguiente caso se considera el mismo ejercicio anterior pero se libera la reacción en B_y , para comprobar que el método se puede emplear mientras la estructura sea estable.

Dado el siguiente sistema con sección (EI) constante calcular:

- Los grados de indeterminación
- reacciones del sistema.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento flector
- Utilizar el método de las fuerzas.

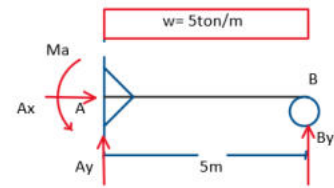


Figura.104. Viga hiperestática.

Grados de indeterminación

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

Para conocer los grados de hiperestaticidad, aplicamos la ecuación antes vista.

$$\text{Nodo A} = \text{Nodo B} \quad 1(n - 1) = 0$$

$$GH = (4 + 0) - 3(1) = 1 \quad \text{Por tanto, es Hiperestática de grado 1}$$

Sistemas estructurales posibles

Los sistemas estructurales que vamos a generar son el sistema principal (E_0) y el sistema virtual (V_1).

El sistema virtual (V_1) no posee las fuerzas reales, solo la fuerza redundante.

El sistema principal, posee las cargas del sistema real, pero no posee la fuerza redundante.

Sistema inicial o real

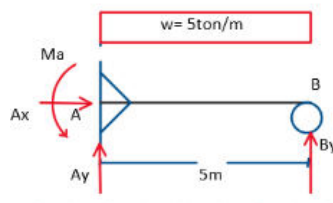


Figura.105 Sistema de viga real

Sistema principal

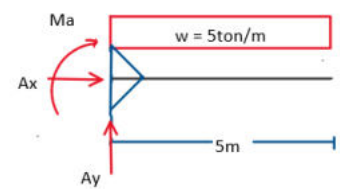


Figura.106 Sistema de viga principal.

Sistema virtual (V_1)

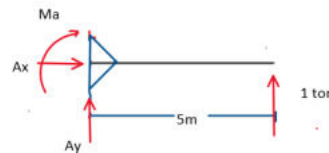


Figura.107. Sistema de viga virtual.

Analizando el sistema virtual (V_1)

Cálculo de las reacciones del sistema virtual.

$$\sum M_A = 0 \quad 1 \text{ ton} \cdot (5 \text{ m}) - M_A = 0 \quad M_A = 5 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y = -1 \text{ ton} \quad \text{"sentido opuesto"}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

Sistema virtual

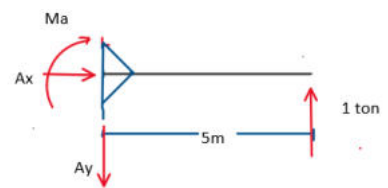


Figura.108. Viga hiperestática sistema virtual.

Corte 1-1 Sistema virtual (V_1)

Ecuaciones de cortante y momento.

$$0 \leq x \leq 5$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_1 = 5 \text{ ton} \cdot \text{m} - 1 \text{ ton} (x)$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = -1 \text{ ton}$$

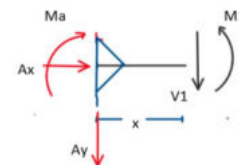


Figura.109. Corte 1-1 viga hiperestática.



Diagramas de Cortante y Momento sistema virtual

Para comprobar el proceso, se realiza los diagramas de corte y momento flector, si los diagramas cierran en cero, las ecuaciones son correctas, por tanto, el resultado de las integrales definidas serán correctas.

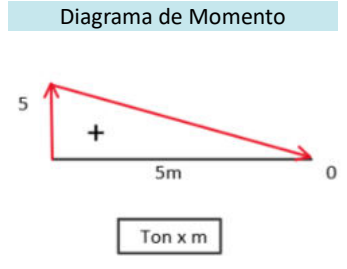
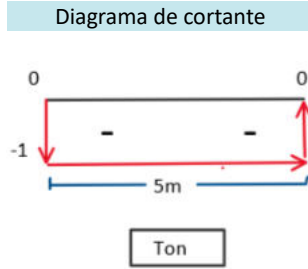


Figura.110. Diagrama de corte y momento sistema virtual.

Analizando el sistema principal 0

Cálculo de las reacciones del sistema virtual.

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A - \frac{5 \text{ ton} (5)^2}{2} = 0 \quad M_A = -62.5 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad \text{"sentido opuesto"}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y = 25 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

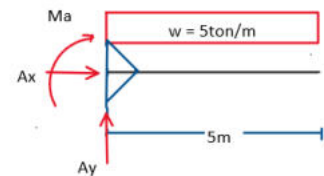


Figura.111. viga hiperestática sistema principal.

Ecuaciones de cortante y momento. $0 \leq x \leq 5$

$$\sum M_A = 0 \quad M_1 = 25 \cdot (x) - \frac{5 \cdot (x)^2}{2} - 62.5 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V_1 = 25 - 5x$$

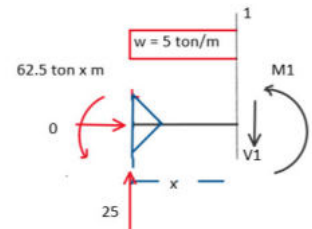


Figura.112. Corte 1-1 sistema principal.

Diagramas de Cortante y Momento sistema principal

Diagrama de cortante

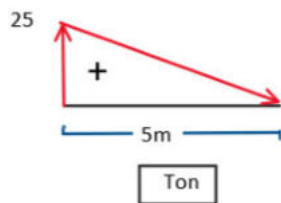


Diagrama de Momento

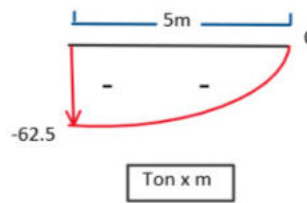


Figura.113. Diagrama de corte y momento sistema principal.

Cálculo de los desplazamientos $[\delta]$:

El valor de los desplazamientos, se obtiene al aplicar el teorema de integrales definidas.

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx \quad M_1 = 5 \text{ ton} \cdot \text{m} - 1 \text{ ton} (x)$$

El desplazamiento δ_{11} , se obtiene por la integral definida, considerando la longitud de la viga, que contiene a la ecuación de momento del sistema virtual (V1).

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^5 (5-x)^2 dx = \frac{41.667}{EI}$$

Cálculo de los desplazamientos $[\Delta]$:

$$\Delta_{01} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} dx \quad M_0 = 25 \cdot (x) - \frac{5 \cdot (x)^2}{2} - 62.5 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_1 = 5 \text{ ton} \cdot \text{m} - 1 \text{ ton} (x)$$

$$\Delta_{01} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^5 \left(25 \cdot (x) - \frac{5 \cdot (x)^2}{2} - 62.5 \right) \cdot (5-x) dx = \frac{-390.625}{EI}$$





Ecuación canónica de compatibilidad $[X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{10} = 0]$:

Las ecuaciones de compatibilidad serán el número de fuerzas redundantes, por tanto, será de una fuerza redundante, el valor de (X1) correspondiente al valor de la reacción en (By).

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{10} = 0$$

$$B_y = \frac{-\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-\left(\frac{-390.625}{EI}\right)}{\frac{41.667}{EI}} = 9.375 \text{ ton}$$

Cálculo del Sistema inicial o real

Cálculo de las reacciones del sistema real por estática.

$$\sum M_A = 0 \quad M_A + 9.375 \text{ ton} \cdot (5 \text{ m}) - \frac{5 \text{ ton} \cdot (5 \text{ m})^2}{2} = 0 \quad M_A = 15.625 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - 25 \text{ ton} = 0 \quad A_y = 15.625 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

Sistema Real

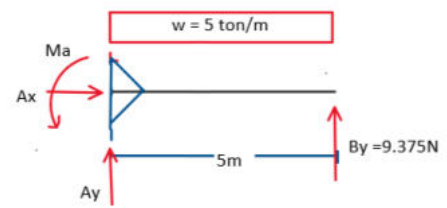


Figura.114. viga hiperestática sistema real.

Diagramas de fuerza cortante y Momento flector:

Para el ejercicio inicial, obtenemos el mismo resultado, así, se comprueba que se puede emplear la fuerza redundante a consideración del estudiante, siempre que la estructura sea estable, y cumpla con las propiedades de estabilidad.

Diagrama de cortante

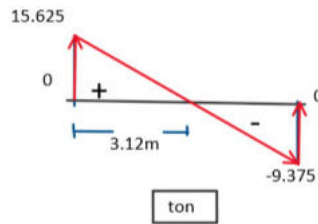


Diagrama de Momento

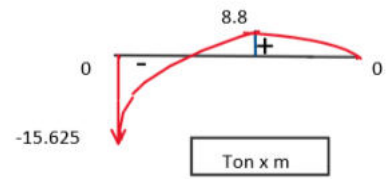


Figura.115. Diagrama de corte y momento sistema real.

Ejercicio 5.12.3

Resolver la siguiente estructura estáticamente indeterminada mediante el método de las fuerzas, de miembros de sección (EI) constantes en todos sus miembros, determinar:

- Los grados de indeterminación
- reacciones del sistema.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

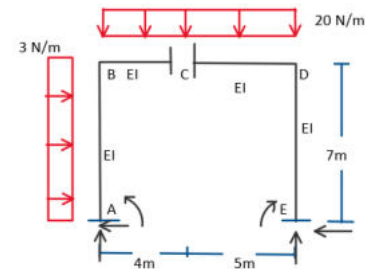


Figura.116. Pórtico hiperestática con biela interna.

Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

Para conocer los grados de hiperestaticidad, se debe aplica la ecuación vista, la cual proporciona el análisis de las reacciones externas como internas de la estructura.

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

Junta A = Junta E $R_{int} = 1(n - 1) = 0$

Junta B = Junta D $R_{int} = 3 \cdot (n - 1) = 3 \cdot (2 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$

Biela interna C $R_{int} = 2 \cdot (n - 1) = 2$

$$GH = (6 + 8) - 3 \cdot (4) = 14 - 12 = 2 \quad \text{Hiperestático Grado (2)}$$

Se puede concluir que al tener dos grado de hiperestaticidad (2), se genera dos ecuaciones canónicas.



Identificado los grados de hiperestaticidad, se libera 2 reacciones externas o externas, manteniendo la estabilidad de la estructura, para el ejercicio, se libera el momento (M_e) y la reacción horizontal (E_x).

Así, se genera un sistema principal con las solicitaciones reales.

Se genera un sistema virtual (V1), compuesto por la fuerza de (1 N) de forma horizontal, y el sistema virtual (V2), compuesto por el momento de (1N x m).

Los sistemas generados, serán de orden isostático, por lo que, se puede conocer las reacciones externas e internas, como las ecuaciones de cortante y momento flector aplicando la estática de fuerzas.

Sistema inicial o real

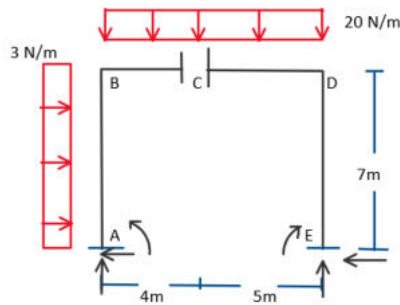


Figura.117 Sistema real pórtico.

Sistema principal

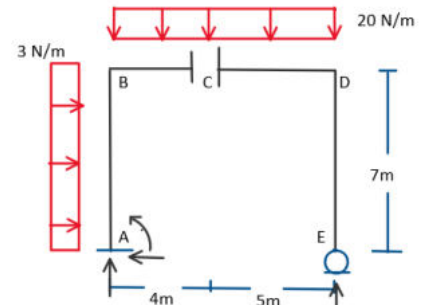


Figura.118 Sistema principal pórtico.

Sistema virtual 1

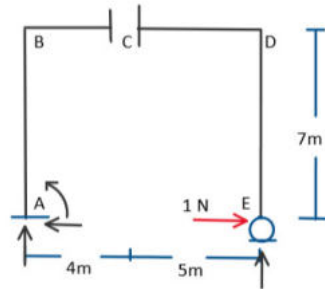


Figura.119. Sistema virtual (1) pórtico .

Sistema virtual 2

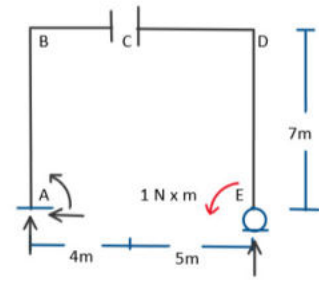


Figura.120. Sistema virtual (2) pórtico .

Analizando el sistema principal 0

Cálculo de reacciones del sistema principal.

Despiece (lado izquierdo de la biela)

Para conocer el valor de las reacciones se emplea el despiece de la biela hacia la derecha y por estática calculamos las reacciones internas y externas del sistema.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 100 \text{ N} \quad N_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-M_1 - \frac{20 \cdot (5 \text{ m})^2}{2} + 100 \text{ N} \cdot (5 \text{ m}) = 0$$

$$M_1 = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

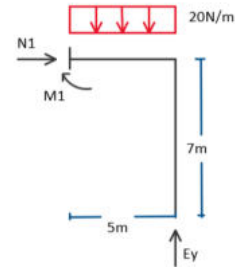


Figura.121. Discretización (Biela a la derecha).

Despiece (lado derecho de la biela)

Para conocer el valor de las reacciones se aplica la estática realizando un despiece del lado opuesto de la biela, y conociendo las reacciones internas que involucra el vínculo.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 80 \text{ N} \quad A_x = 21 \text{ N}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$M_1 + \frac{20 \cdot (4)^2}{2} + \frac{3 \cdot (7)^2}{2} - 80 \cdot (4) - M_o - 21 \cdot (7) = 0$$

$$M_o = 16.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

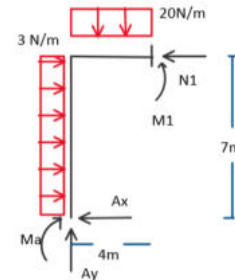


Figura.122. Discretización (Biela a la izquierda).





Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = 21 - 3(x)$$

$$M_1 = 21 \cdot (x) - \frac{3}{2} (x)^2 + 16.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 80 - 20 \cdot (x)$$

$$M_2 = 80 \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} + 90 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = -20 \cdot (x)$$

$$M_3 = \frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = 0 \text{ N}$$

$$M_4 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

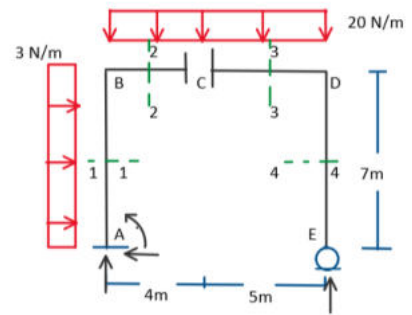


Figura.123. Sistema global de cortes en el pórtico.

Diagrama de corte y momento del sistema principal.

Para graficar los diagramas de corte y momento en un pórtico, se aplica el sistema local para cada elemento estructural, así, se puede conocer los valores positivos y negativos en todo el sistema.

Una forma de comprobar los diagramas, es identificando los valores de momento interno en las juntas, lo cuál, se transmiten en las juntas rígidas.

Diagrama de cortante

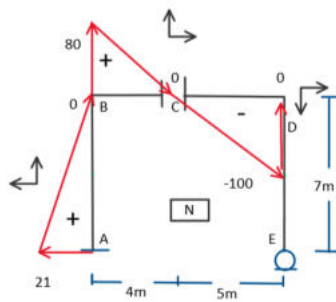


Diagrama de Momento

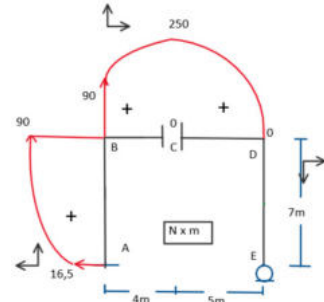


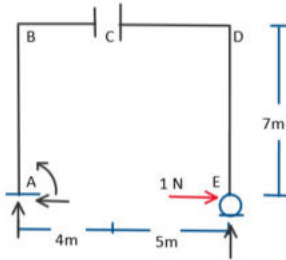
Figura.124. Diagrama de corte y momento flector, sistema principal.

Analizando el sistema virtual 1

Cálculo de reacciones del sistema virtual 1.

El sistema virtual, posee la fuerza redundante y mantiene el sistema de reacciones del sistema principal.

Para resolver el sistema, se aplica momento en la vinculación con mayor cantidad de fuerzas.



$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ N} \quad A_x = 1 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_o = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Figura.125. Reacciones sistema virtual (1) pórtico .

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual 1.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = 1 \text{ N}$$

$$M_1 = 1 \text{ N} \cdot (x)$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ N}$$

$$M_2 = 7 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \cdot \text{N}$$

$$M_3 = 7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = -1 \text{ N}$$

$$M_4 = -1(x) + 7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

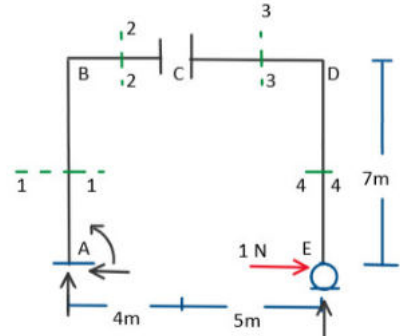


Figura.126. Sistema virtual (1) cortes globales.



Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1.

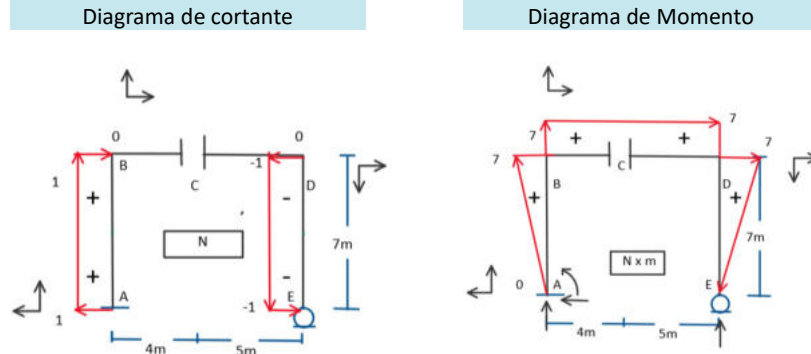


Figura.127. Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (1).

Analizando el sistema virtual 2

Cálculo de reacciones del sistema virtual 2.

El sistema virtual 2, considera la fuerza redundante, para el ejercicio, será el momento en E (M_e).

Con las reacciones, se obtiene las ecuaciones de corte y momento, realizando cortes en la columna A-B, viga B-C, viga C-D y columna D-E.

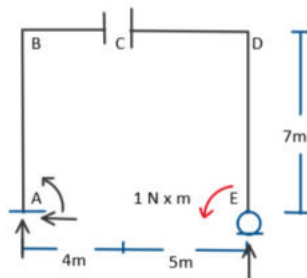


Figura.128. Reacciones sistema virtual (2) pórtico .

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual 2.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = 0 \text{ N}$$

$$M_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ N}$$

$$M_2 = 1 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \cdot \text{N}$$

$$M_3 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = 0 \text{ N}$$

$$M_4 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

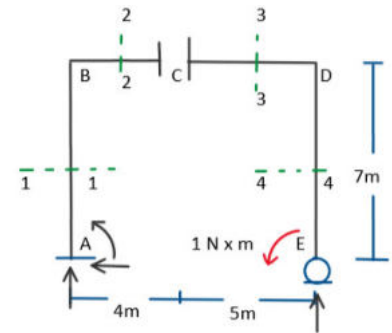


Figura.129. Sistema virtual (2) cortes globales.

Diagrama de corte y momento del sistema virtual 2.

Diagrama de cortante

El diagrama de cortante será cero, debido a que solo actúa el momento flector.

El diagrama de momento flector será de forma rectangular, por la convención vista anteriormente.

Diagrama de Momento

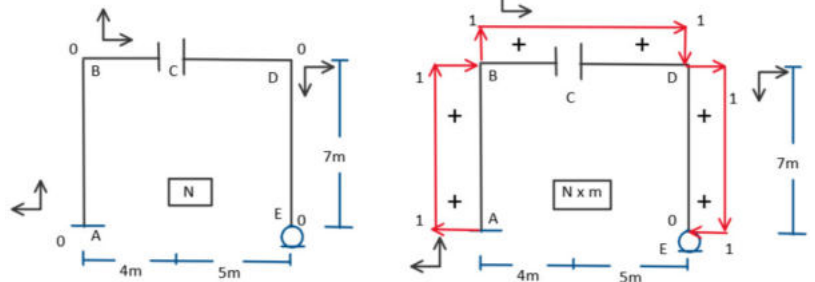
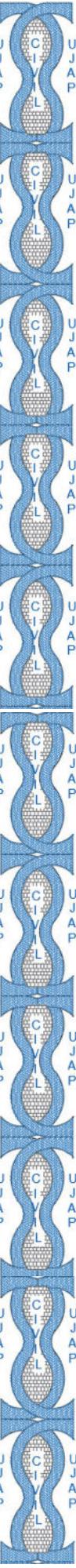


Figura.130. Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (2).





Para conocer los desplazamientos establecemos las ecuaciones canónicas de compatibilidad para este caso serán:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{10} = 0$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{20} = 0$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{10}]$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^{7m} \left(21 \cdot (x) - \frac{3}{2} (x)^2 + 16.5 \right) \cdot (1 \cdot (x)) dx + \int_0^{4m} \left(80 \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} + 90 \right) \cdot (7) dx + \int_0^{5m} \left(\frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 250 N \cdot m \right) \cdot (7) dx + \int_0^{7m} (0) \cdot (-1 (x) + 7) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{13244.875}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{20}]$

$$\Delta_{20} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M_2}{EI} dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \int_0^{7m} \left(21 \cdot (x) - \frac{3}{2} (x)^2 + 16.5 \right) \cdot (1) dx + \int_0^{4m} \left(80 \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} + 90 \right) \cdot (1) dx + \int_0^{5m} \left(\frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 250 \right) \cdot (1) dx + \int_0^{7m} (0) \cdot (1) dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{2078.5}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{11}]$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{7m} (x)^2 dx + \int_0^{4m} (7)^2 dx + \int_0^{5m} (7)^2 dx + \int_0^{7m} (-1 (x) + 7)^2 dx$$

$$\delta_{11} = \frac{669.667}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{22}]$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^{7m} (1)^2 dx + \int_0^{4m} (1)^2 dx + \int_0^{5m} (1)^2 dx + \int_0^{7m} (1)^2 dx$$

$$\delta_{22} = \frac{23}{EI}$$





Cálculo del desplazamiento $[\delta_{12} = \delta_{21}]$

$$\delta_{12} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \int_0^{7m} (x) \cdot (1) dx + \int_0^{4m} (7) \cdot (1) dx + \int_0^{5m} (7) \cdot (1) dx + \int_0^{7m} (-x+7) \cdot (1) dx$$

$$\delta_{12} = \frac{112}{EI}$$

Resolviendo el sistema de matrices de desplazamientos

Debido a la condición que se planteó inicialmente en el sistema virtual 1 y 2, la relación será:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ M_e \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema, podemos aplicar el método de matrices por Gauss, o simplemente un sistema de ecuaciones.

$$X_1 \cdot \left(\frac{669.667}{EI}\right) + X_2 \cdot \left(\frac{112}{EI}\right) + \left(\frac{13244.875}{EI}\right) = 0$$

$$X_1 \cdot \left(\frac{112}{EI}\right) + X_2 \cdot \left(\frac{23}{EI}\right) + \left(\frac{2078.5}{EI}\right) = 0$$

Al ser una ecuación, los términos de módulo de elasticidad (E) como, la inercia (I) se simplifica.

$$\frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} 669.667 & 112 \\ 112 & 2078.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 13244.875 \\ 2078.5 \end{bmatrix}$$

Se considera como sentido correcto, al obtener un resultado positivo (+), y como sentido opuesto, si obtenemos un resultado negativo (-).

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.133 \\ 32.019 \end{bmatrix}$$

Analizando el sistema real

Cálculo de reacciones del sistema real.

Las reacciones obtenidas por matrices, serán las reacciones del sistema real.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$E_y = 100 \text{ N}$$

$$N_1 = 25.133 \text{ N}$$

Se aplica la estática para conocer las reacciones faltantes, o se realizara la discretización del sistema, para facilitar el cálculo.

$$\sum M_1 = 0$$

$$-M_1 - \frac{20 \cdot (5)^2}{2} + 100 \cdot (5) + 32.019 - 25.133 \cdot (7) = 0$$

Si se desea comprobar el resultado de los valores obtenidos, se reemplaza en las ecuaciones de la estática, el resultado debe ser cero.

$$M_1 = 106.088 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Despiece (Lado derecho de la biela)

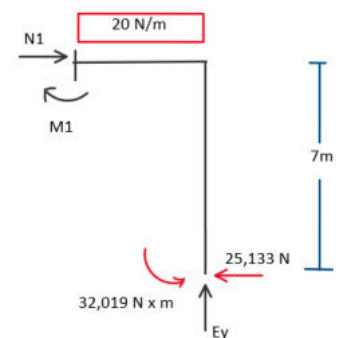
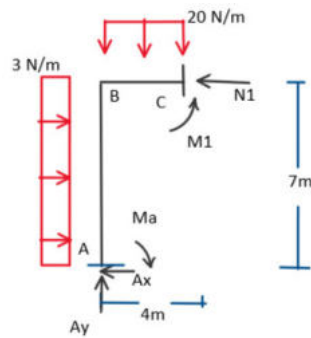


Figura.131. Discretización sistema real (biela lado derecho)



Despiece (Lado izquierdo de la biela)

Al conocer los valores internos de (N1) y (M1), se puede obtener los valores de las reacciones.



$$\sum F_y = 0$$

$$A_y = 80 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-N_1 - A_x + 21 \text{ N} = 0$$

$$A_x = -4.133$$

$$\sum M_a = 0$$

$$-M_a - \frac{3 \cdot (7)^2}{2} - \frac{20 \cdot (4)^2}{2} + 106.088 + 25.133 \cdot (7) = 0$$

$$M_a = 48.519 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Figura.132. Discretización sistema real (biela lado izquierdo)

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema real

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = -4.133 - 3(x)$$

$$M_1 = -4.133 \cdot (x) - \frac{3 \cdot (x)^2}{2} + 48.519 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 80 - 20 \cdot (x)$$

$$M_2 = 80(x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} - 53.912 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = -20 \cdot (x)$$

$$M_3 = \frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 106.088 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = 25.133 \text{ N}$$

$$M_4 = 25.133 \cdot (x) - 143.912 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Las ecuaciones de cortante y momento representan el valor en cada tramo de la de columna y viga.

Se deben evaluar en el rango de la longitud de los miembros estructurales.

Diagrama de corte y momento del sistema real

Para los diagramas, reemplazamos la distancia del rango previamente obtenido, en la ecuación de corte, así, obtenemos el valor de corte en ese punto.

Para graficar los valores de momento reemplazamos la distancia del rango en la ecuación de momento, así obtenemos el valor en dicho punto.

Finalmente, se aplica un sistema de referencia local para cada viga y columna de acuerdo al criterio de resistencia de materiales.

Diagrama de cortante

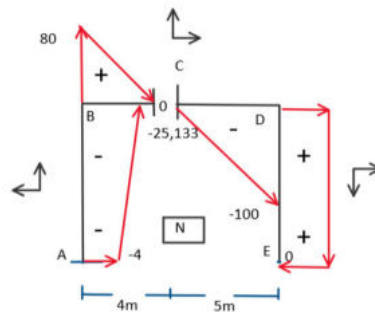


Diagrama de Momento

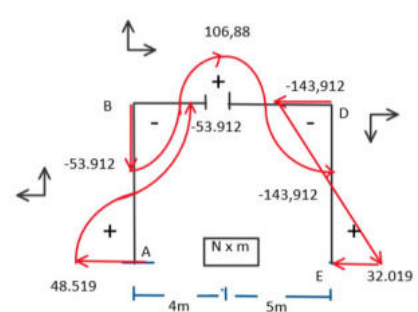


Figura.133. Diagrama de corte y momento flector, sistema real.

Ejercicio 5.12.4

Resolver la siguiente estructura estáticamente indeterminada mediante el método de las fuerzas, de miembros de sección $EI = \text{constantes}$ en todos sus miembros y determinar:

- Los grados de indeterminación
- reacciones del sistema.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento

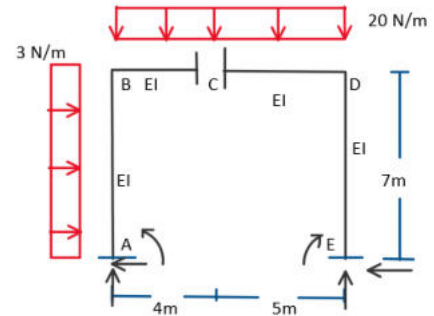


Figura.134. Pórtico hiperestático con biela interna



Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

Los grados de indeterminación o de hiperestaticidad, se obtienen con la ecuación vista anteriormente, conociendo que para cada junta posee una ecuación, para el ejercicio, el grado de hiperestaticidad será de 2, así, se genera dos ecuaciones canónicas.

Junta A = Junta E

$$R_{int} = 1(n - 1) = 0$$

Junta B = Junta D

$$R_{int} = 3 \cdot (n - 1) = 3 \cdot (2 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$$

Biela interna C

$$R_{int} = 2 \cdot (n - 1) = 2$$

$$GH = (6 + 8) - 3 \cdot (4) = 14 - 12 = 2 \quad \text{Hiperestático} = 2$$

Sistemas estructurales posibles

Se debe liberar 2 reacciones externas o internas, manteniendo la estabilidad de la estructura, así, se libera el momento en A (M_A) como la reacción horizontal (A_x)

Por tanto, se genera un sistema principal, que posee las solicitaciones reales, pero no las fuerzas redundantes.

Se genera un sistema virtual (V1), compuesto por la fuerza de (1 N) de forma horizontal, y un sistema virtual (V2), por el momento de (1N x m).

Los sistemas generados, serán de orden isostático, por lo que, se puede conocer las reacciones externas e internas aplicando la estática.

Al liberar las reacciones externas y siempre que la estructura sea estable, el resultado debe ser el mismo, cumpliendo con las propiedades de flexibilidad y desplazamiento.

Sistema inicial o real

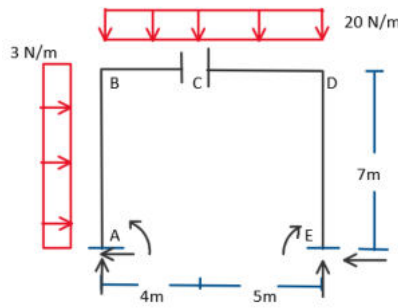


Figura.135 Sistema real pórtico

Sistema principal

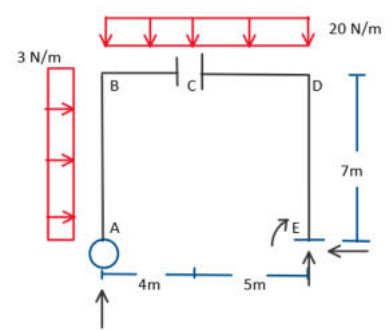


Figura.136 Sistema principal pórtico.

Sistema virtual 1

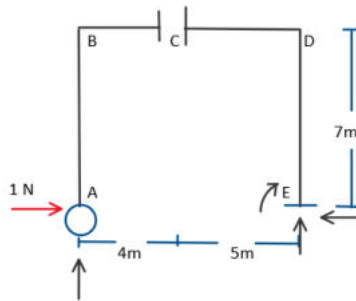


Figura.137. Sistema virtual (1) pórtico .

Sistema virtual 2

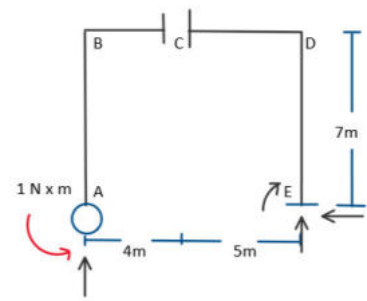


Figura.138. Sistema virtual (2) pórtico .

Analizando el sistema principal 0

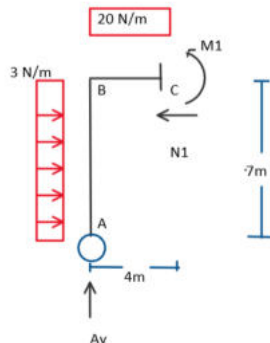
Cálculo de reacciones del sistema principal.

Las reacciones se obtiene por estática y se calcula las reacciones internas y externas del sistema.

Aplicando momento en (C) podemos conocer el valor de momento interno (M1) que será el mismo para el tramo derecho de la biela interna.

Para conocer el valor de las reacciones externas, se realiza el despiece en el tramo derecho de la biela, se aplica la estática conociendo previamente los valores de momento interno (M1) y la fuerza axial interna (N1)

Despiece (Lado izquierdo de la biela)



$$\sum F_y = 0$$

$$A_y = 80 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0$$

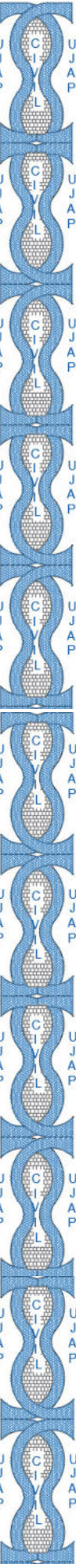
$$N_1 = 21 \text{ N}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$M_1 - \frac{20 \cdot (4 \text{ m})^2}{2} - \frac{3 \cdot (7 \text{ m})^2}{2} + N_1 \cdot (7 \text{ m}) = 0$$

$$M_1 = 86.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Figura.139. Discretización pórtico (biela lado derecho).



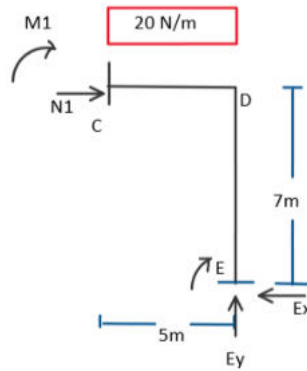


Despiece (Lado derecho de la biela)

El corte debe ser cero en el punto de la biela interna, ya que al ser empotramiento móvil permite el desplazamiento vertical.

Al obtener los valores de las reacciones internas y las solicitaciones externas, aplicamos momento en cualquier punto para conocer los valores de las reacciones faltantes.

Si se desea comprobar, se reemplaza los valores en las ecuaciones, el resultado de ser cero.



$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 100 \text{ N} \quad E_x = 21 \text{ N}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-M_1 - \frac{20 \cdot (5)^2}{2} + 100 \cdot (5) - M_e - 21 \cdot (7) = 0$$

$$M_e = 16.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Figura.140. Discretización pórtico (biela lado izquierdo).

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = -3 \cdot (x)$$

$$M_1 = -\frac{3}{2} \cdot (x)^2$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 80 - 20 \cdot (x)$$

$$M_2 = 80 \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} + 73.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = -20 \cdot (x)$$

$$M_3 = \frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 86.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = 21 \text{ N}$$

$$M_4 = 21 \cdot (x) - 163.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

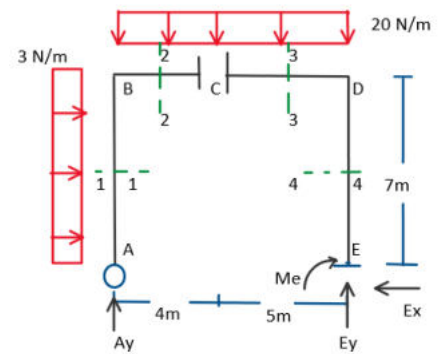


Figura.141. Sistema de cortes globales, sistema principal.

Diagrama de corte y momento del sistema principal.

Diagrama de cortante

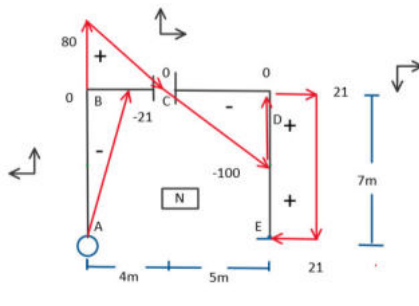


Diagrama de Momento

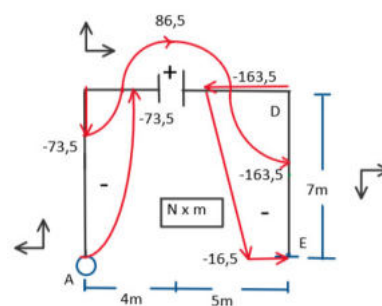


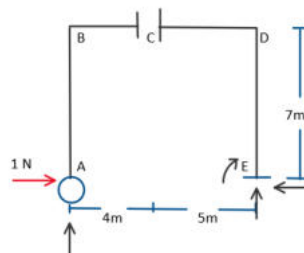
Figura.142. Diagrama de corte y momento flector, sistema principal.

Analizando el sistema virtual 1

Cálculo de reacciones del sistema virtual 1.

El sistema virtual (V1), posee la fuerza redundante de (1N), en el sentido de la reacción del sistema real.

Además, posee los vínculos del sistema principal, empotramiento y rodillo.



$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ N} \quad E_x = 1 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_e = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Figura.143. Sistema virtual (1) pórtico .



Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual 1.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = -1 \text{ N}$$

$$M_1 = -1 \text{ N} \cdot (x)$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \cdot N$$

$$M_3 = -7 \text{ N} \cdot m$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ N}$$

$$M_2 = -7 \cdot N \cdot m$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = 1 \text{ N}$$

$$M_4 = 1 (x) - 7 \text{ N} \cdot m$$

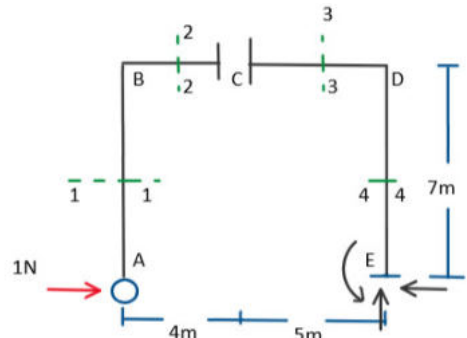


Figura.144. Sistema de cortes globales, sistema virtual (1)

Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1.

Diagrama de cortante

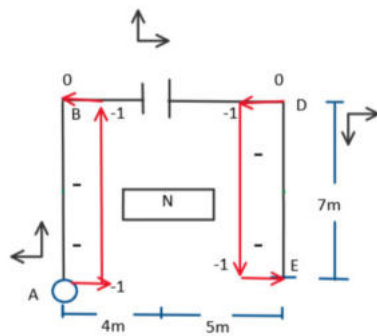


Diagrama de Momento

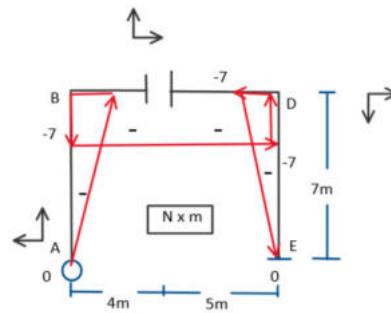
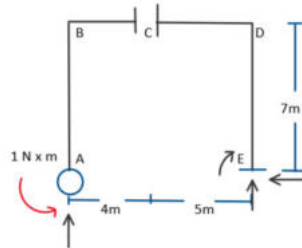


Figura.145. Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (1).

Analizando el sistema virtual 2

Cálculo de reacciones del sistema virtual 2.

El sistema virtual (V2), será la fuerza redundante, considerado como momento en A, el sentido se considera de acuerdo al criterio del estudiante, en el proceso de cálculo, el signo nos señalará si es correcto el sentido.



$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ N} \quad A_x = 0 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_e = 1 \text{ N} \cdot m$$

Figura.146. Sistema virtual (2) pórtico .

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual 2.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = 0 \text{ N}$$

$$M_1 = -1 \text{ N} \cdot m$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \cdot N$$

$$M_3 = -1 \text{ N} \cdot m$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ N}$$

$$M_2 = -1 \cdot N \cdot m$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = 0 \text{ N}$$

$$M_4 = -1 \text{ N} \cdot m$$

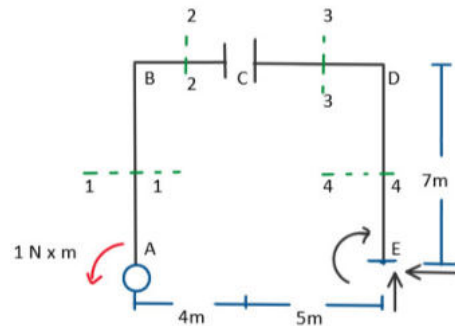


Figura.147. Sistema de cortes globales, sistema virtual (2)



Diagrama de corte y momento del sistema virtual 2.

Diagrama de cortante

Diagrama de Momento

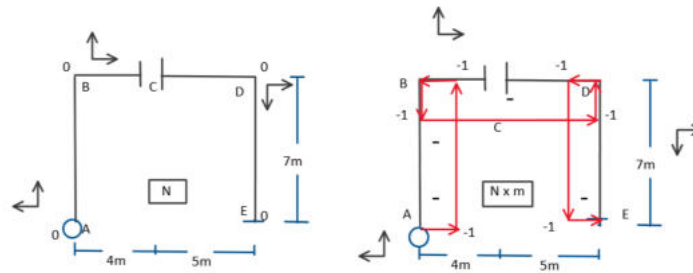


Figura.148. Diagrama de corte y momento flector, sistema virtual (2).

Cálculo de los desplazamientos $[\Delta]$ $[\delta]$

Los desplazamientos se establecen en las ecuaciones canónicas de compatibilidad, para el ejercicio serán:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{10} = 0$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{20} = 0$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{10}]$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^{7m} \left(-\frac{3}{2} (x)^2 \right) \cdot (-x) dx + \int_0^{4m} \left(80 \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} - 73.5 \right) \cdot (-7) dx + \int_0^{5m} \left(\frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 86.5 \right) \cdot (-7) dx + \int_0^{7m} (21 \cdot x - 163.5) \cdot (x - 7) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{2666.125}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{20}]$

$$\Delta_{20} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M_2}{EI} dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \int_0^{7m} \left(-\frac{3}{2} (x)^2 \right) \cdot (-1) dx + \int_0^{4m} \left(80 \cdot (x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} - 73.5 \right) \cdot (-1) dx + \int_0^{5m} \left(\frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 86.5 \right) \cdot (-1) dx + \int_0^{7m} (21 \cdot x - 163.5) \cdot (-1) dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{653}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{11}]$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{7m} (-x)^2 dx + \int_0^{4m} (-7)^2 dx + \int_0^{5m} (-7)^2 dx + \int_0^{7m} (x-7)^2 dx$$

$$\delta_{11} = \frac{669.667}{EI}$$

Para conocer los desplazamientos, se realiza la integración definida para los cortes 1-1, 2-2, 3-3 y 4-4, estos se encuentran evaluados de forma longitudinal, así, los rangos de la integral, serán los valores de distancia.

Para conocer los valores de las integrales definidas, se puede evaluar por algún software o mediante el cálculo manual, estas ecuaciones serán funciones dependiendo de la carga en la viga, si es puntual, rectangular, triangular o trapezoidal, se genera una función polinómica.





Cálculo del desplazamiento $[\delta_{22}]$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^{7m} (-1)^2 dx + \int_0^{4m} (-1)^2 dx + \int_0^{5m} (-1)^2 dx + \int_0^{7m} (-1)^2 dx$$

$$\delta_{22} = \frac{23}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{12} = \delta_{21}]$

$$\delta_{12} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \int_0^{7m} (-x) \cdot (-1) dx + \int_0^{4m} (-7) \cdot (-1) dx + \int_0^{5m} (-7) \cdot (-1) dx + \int_0^{7m} (x-7) \cdot (-1) dx$$

$$\delta_{12} = \frac{112}{EI}$$

Resolviendo el sistema de matrices de desplazamientos

Por la condición que se planteó inicialmente, el sistema virtual (V1) y virtual (V2), la relación será:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ M_a \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema, se puede aplicar la resolución de matrices por Gauss, o simplemente un sistema de ecuaciones.

$$X_1 \cdot \left(\frac{669.667}{EI} \right) + X_2 \cdot \left(\frac{112}{EI} \right) + \left(\frac{2666.125}{EI} \right) = 0$$

Al ser una ecuación, los términos de módulo de elasticidad (E) como, la inercia (I) se simplifica.

$$X_1 \cdot \left(\frac{112}{EI} \right) + X_2 \cdot \left(\frac{23}{EI} \right) + \left(\frac{653}{EI} \right) = 0$$

Se considera como sentido correcto, al obtener un resultado positivo (+), y como sentido opuesto, si obtenemos un resultado negativo (-).

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 669.667 & 112 \\ 112 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{EI} \begin{bmatrix} 2666.125 \\ 653 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 669.667 & 112 \\ 112 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2666.125 \\ 653 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.133 \\ -48.519 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ M_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.133 \text{ N} \\ -48.519 \text{ N} \cdot m \end{bmatrix}$$

Para conocer los desplazamientos, se puede extraer de la integral el valor constante de la elasticidad e inercia (EI), dejando solo la función dentro de la integral definida.





Cálculo de reacciones del sistema real.

Se realiza un despiece para conocer las reacciones de todo el sistema.

Para conocer el valor de la reacción (Ay), aplicamos la estática de forma vertical.

Para conocer el valor de las fuerzas internas, aplicamos momento en (C), obteniendo el momento (M1.)

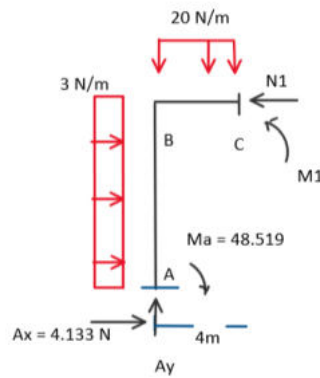


Figura.149. Discretización pórtico (biela a la derecha).

Despiece (Lado izquierdo de la biela)

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = 80 \text{ N} \quad N_1 = 25.133 \text{ N}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$\frac{20 \cdot (4)^2}{2} + \frac{3 \cdot (7)^2}{2} + M_1 - 48.519 \text{ N} \cdot \text{m} - 80 \cdot (4 \text{ m}) + 4.133 \cdot (7) = 0$$

$$M_1 = 106.088 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Al conocer las fuerzas internas, se genera los valores de las demás reacciones externas del sistema.

Se puede comprobar reemplazando los valores obtenidos en las ecuaciones generales del sistema, el resultado debe ser cero.

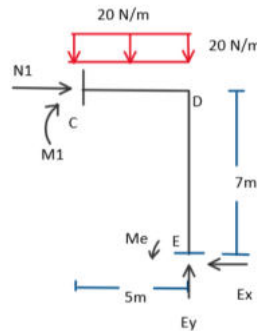


Figura.150. Discretización pórtico (biela a la izquierda).

Despiece (Lado derecho de la biela)

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 100 \text{ N} \quad E_x = 25.133 \text{ N}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-\frac{20 \cdot (5)^2}{2} - M_1 + M_e + 100 \cdot (5 \text{ m}) - E_x \cdot (7 \text{ m}) = 0$$

$$M_e = 32.019 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema real

Para conocer las ecuaciones de corte y momento, el estudiante puede considerar un corte donde considere correcto, para este ejemplo, será 1-1, 2-2, 3-3 y 4-4.

Los diagramas de corte y momento de los tramos de las columnas y vigas, se las grafica a partir de las ecuaciones, reemplazando la variable (x) por el valor de la longitud.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_1 = -4.133 - 3(x)$$

$$M_1 = -4.133 \cdot (x) - \frac{3 \cdot (x)^2}{2} + 48.519 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_3 = -20 \cdot (x)$$

$$M_3 = \frac{-20 \cdot (x)^2}{2} + 106.088 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 80 - 20 \cdot (x)$$

$$M_2 = 80(x) - \frac{20 \cdot (x)^2}{2} - 53.912 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 7 \text{ m}$

$$V_4 = 25.133 \text{ N}$$

$$M_4 = 25.133 \cdot (x) - 143.912 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Diagrama de corte y momento del sistema real

Para conocer los diagramas se aplica un sistema local (x,y), para conocer los valores positivos y negativos, como se muestra en la figura 151.

La observación, será en el punto de la biela interna, el corte es cero, debido a su característica de desplazamiento, mientras que el momento se transmite.

Diagrama de cortante

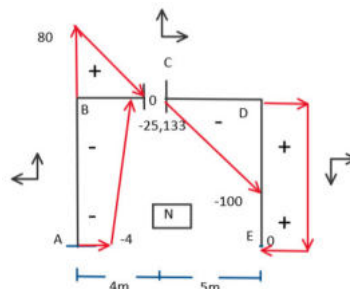


Diagrama de Momento

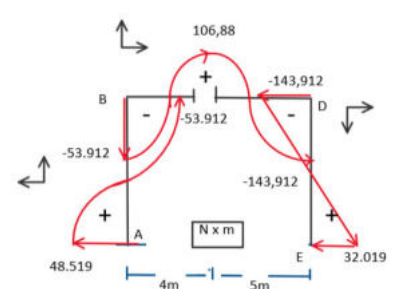


Figura.151. Diagrama de corte y momento flector, sistema real.



Ejercicio 5.12.5

Resolver la siguiente estructura estáticamente indeterminada mediante el método de las fuerzas, de miembros de sección (EI) constantes en todos sus miembros, determinar:

- Los grados de indeterminación
- reacciones del sistema.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento flector

Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

Para conocer los grados de indeterminación o de hiperestaticidad, se aplica la ecuación vista anteriormente, para cada junta posee una ecuación, por tanto, el grado de hiperestaticidad será de 2, así, se generan dos ecuaciones canónicas.

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

Junta A = Junta C $R_{int} = 1(n - 1) = 0$

Biela interna B $R_{int} = 2 \cdot (n - 1) = 2$

$$GH = (5 + 2) - 3 \cdot (2) = 7 - 6 = 1$$

Figura.152. Idealización de pórtico hiperestático con biela interna y columna inclinada.

Hiperestático = 1

Sistemas estructurales posibles

Ahora, que conocemos los grados de hiperestaticidad, se libera 2 reacciones externas o internas, manteniendo la estabilidad de la estructura, para este caso se libera el momento (M_a) y la reacción horizontal (A_x)

Sistema inicial o real

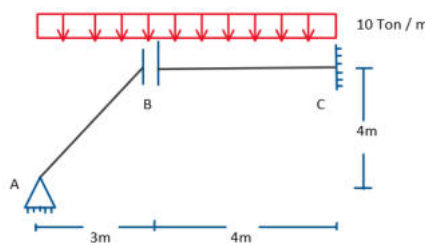


Figura.153 Sistema real pórtico con biela interna y columna inclinada.

Sistema principal

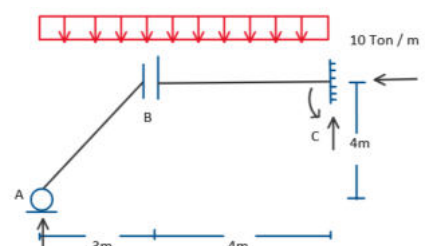


Figura.154 Sistema principal con biela interna y columna inclinada.

El sistema principal, posee las solicitaciones reales o fuerzas externas, pero no la fuerza redundante.

Sistema virtual 1

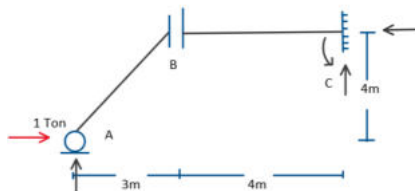


Figura.155. Sistema virtual (1) pórtico con biela interna y columna inclinada

El sistema virtual (V1), posee la fuerza unitaria o redundante, en sentido de la fuerza liberada.

Analizando el sistema principal 0

Cálculo de reacciones del sistema principal.

Para conocer las reacciones del sistema principal, se realiza una discretización o despiece, aplicando una sumatoria de fuerzas verticales podemos conocer la reacción A_y .

$$\sum F_y = 0 \quad A_y = 30 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad -A_y \cdot (3 \text{ m}) + \frac{10 \cdot (3 \text{ m})^2}{2} + M_1 = 0$$

$$M_1 = 45 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Para conocer las demás reacciones se aplica un momento general en 1.

$$\sum M_a = 0 \quad N_1 \cdot (4 \text{ m}) - \frac{10 \cdot (3 \text{ m})^2}{2} + M_1 = 0$$

$$N_1 = 0 \text{ N}$$

Despiece Izquierda de la biela.

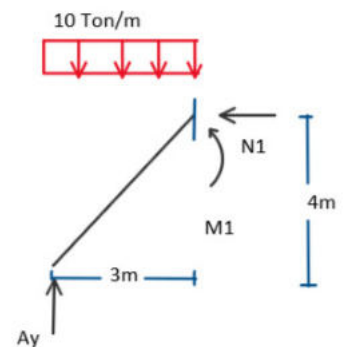


Figura.156. Discretización de pórtico (a la izquierda de la biela).



Despiece derecha de la biela.

Con los valores de fuerzas internas, se obtiene las demás reacciones del sistema.

$$\sum F_y = 0 \quad C_y = 40 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad C_x = 0 \text{ ton}$$

Si se desea comprobar, se reemplaza las reacciones en las ecuaciones generales, el resultado será cero.

$$\sum M_c = 0 \quad -M_1 + \frac{10 \cdot (4 \text{ m})^2}{2} + M_c = 0$$

$$M_c = -35 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

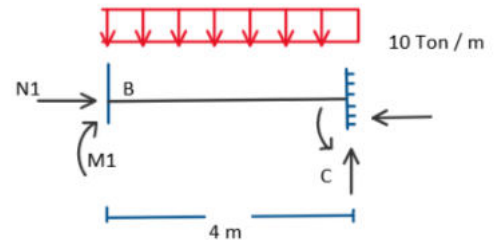


Figura.157. Discretización de pórtico (a la derecha de la biela).

Linealizando fuerza distribuida.

La linealización se debe realizar cuando, se tiene una barra inclinada, con la finalidad de conocer las fuerzas perpendiculares. Como se muestra en la figura 158.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{4 \text{ m}}{3 \text{ m}} \right) = 53.1301^\circ \quad R = 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (3 \text{ m}) = 30 \text{ ton}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{R_x}{R} \quad \cos(\alpha) = \frac{R_y}{R}$$

$$R_x = R \cdot \sin(\alpha) \quad R_y = R \cdot \cos(\alpha)$$

$$R_x = 30 \text{ ton} \cdot \sin(53.1301^\circ) \quad R_y = 30 \text{ ton} \cdot \cos(53.1301^\circ)$$

$$R_x = 24 \text{ ton}$$

$$R_y = 18 \text{ ton}$$

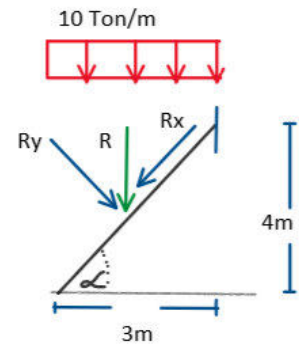


Figura.158. Linealización de carga distribuida.

Conociendo carga distribuida perpendicular a la viga.

Para conocer la fuerza distribuida, en una viga inclinada, se debe dividir entre la longitud de la viga. Como se muestra en la figura 159.

$$W_{ry} = \frac{R_y}{5 \text{ m}} = 3.6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

$$W_{rx} = \frac{R_x}{5 \text{ m}} = 4.8 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

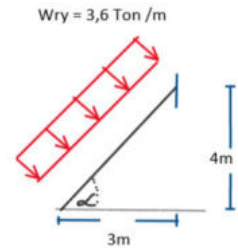


Figura.159. Carga distribuida perpendicular a la columna.

Linealizando la reacción Ay perpendicular a la viga.

Al linealizar una reacción externa o interna, se genera dos fuerzas en sentido al vector, como se muestra en la figura 160.

$$\sin(\alpha) = \frac{R_x}{A_y} \quad \cos(\alpha) = \frac{R_y}{A_y}$$

$$R_x = A_y \cdot \sin(\alpha) \quad R_y = A_y \cdot \cos(\alpha)$$

$$R_x = 30 \text{ ton} \cdot \sin(53.1301^\circ) \quad R_y = 30 \text{ ton} \cdot \cos(53.1301^\circ)$$

$$R_x = 24 \text{ ton}$$

$$R_y = 18 \text{ ton}$$

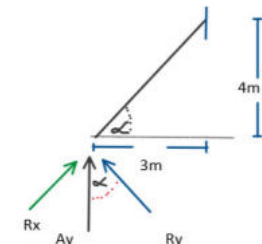


Figura.160. Linealización de reacción Ay.

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_1 = 18 - 3(x)$$

$$M_1 = 18 \cdot (x) - \frac{3.6(x)^2}{2}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = -10 \cdot (x)$$

$$M_2 = 45 \text{ ton} \cdot \text{m} - \frac{10 \cdot (x)^2}{2}$$

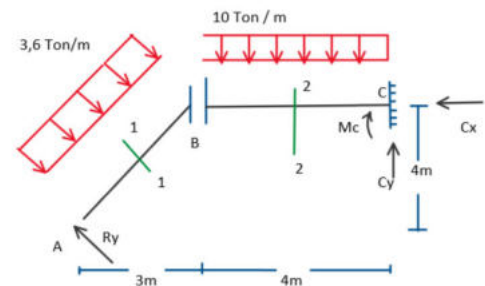


Figura.161. Sistema global de cortes sistema principal.



Diagrama de corte y momento del sistema principal.

Diagrama de cortante

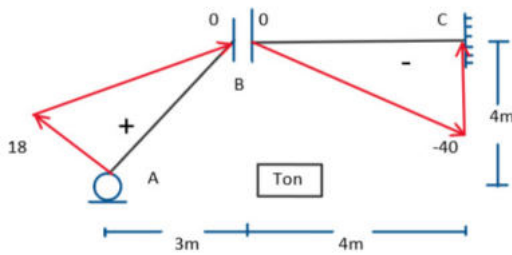


Diagrama de Momento

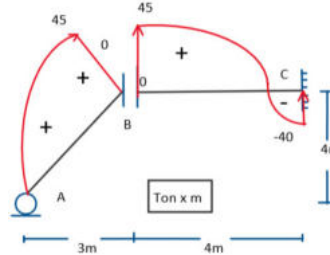


Figura.162. Diagrama de corte y momento flector, sistema principal.

Analizando el sistema virtual 1.

Cálculo de reacciones del sistema virtual 1.

El calculo de reacciones del sistema virtual (V1), al poseer una fuerza redundante, se puede conocer sus reacciones, aplicando momento en (C).

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

$$C_x = 0 \text{ ton} \quad A_y = C_y = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_c = 0$$

$$M_c = 4 \text{ ton} \cdot m$$

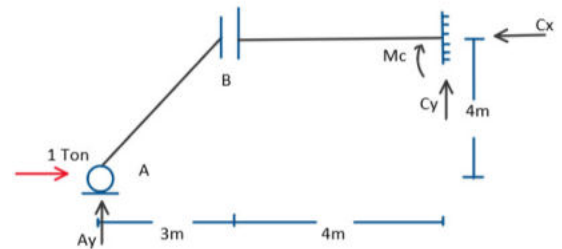


Figura.163. Sistema virtual (1) pórtico con biela interna y columna inclinada.

Linealizando fuerza virtual perpendicular a la viga.

Se linealiza las reacciones tanto Ax como Ay, para conocer las ecuaciones de corte y momento flector.

$$\sin(\alpha) = \frac{V_y}{1 \text{ Ton}}$$

$$V_y = 1 \cdot \sin(53.13^\circ)$$

$$V_y = 0.80 \text{ ton}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{V_x}{1 \text{ Ton}}$$

$$V_x = 1 \cdot \cos(53.13^\circ)$$

$$V_x = 0.60 \text{ ton}$$

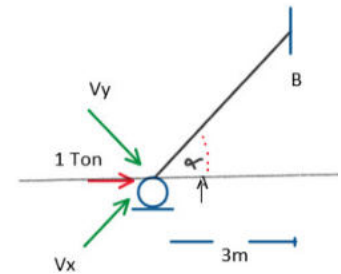


Figura.164. Linealización de fuerza virtual perpendicular a la columna.

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual

Los cortes, se toman a consideración del estudiante, estos cortes, serán los valores y rangos de las integrales definidas, que se emplea para conocer el valor de los desplazamientos.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

$$V_1 = -0.80 \text{ ton}$$

$$M_1 = -0.80 \cdot (x)$$

Los cortes se realizan en la sección 1-1, y 2-2, así, se puede obtener en los valores de corte y momento en cada punto de la viga y columna.

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \cdot \text{ton}$$

$$M_2 = -4 \text{ ton} \cdot m$$

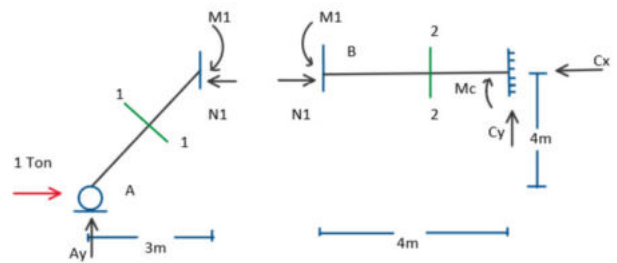


Figura.165. Cortes globales sistema virtual (1).





Diagrama de corte y momento del sistema virtual (V1)

Diagrama de cortante

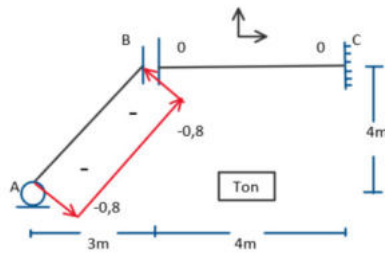


Diagrama de Momento

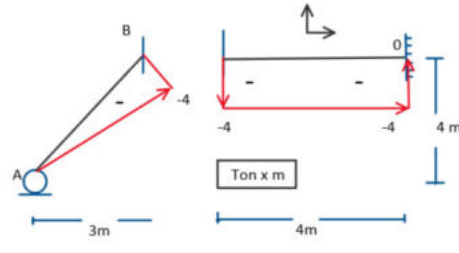


Figura.166. Diagramas de corte y momento flector, sistema virtual (1).

Cálculo de los desplazamientos $[\Delta]$ $[\delta]$

Para conocer los desplazamientos se establece las ecuaciones canónicas de compatibilidad, así, serán:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{10} = 0$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{10}]$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^{5m} \left(18 \cdot x - \frac{3.6}{2} \cdot (x)^2 \right) \cdot (-0.8 \cdot x) dx + \int_0^{4m} \left(45 - \frac{10}{2} \cdot (x)^2 \right) \cdot (-4) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{-668.333}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{11}]$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{5m} (-0.8 x)^2 dx + \int_0^{4m} (-4)^2 dx = \frac{90.667}{EI}$$

Resolviendo el sistema de matrices de desplazamientos

Debido a la condición que se planteó inicialmente en el sistema virtual (V1) y virtual (V2), la relación será:

$$[X_1] = [A_x]$$

Para resolver el sistema, se puede aplicar la resolución de matrices por Gauss, o simplemente un sistema de ecuaciones.

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{10} = 0$$

$$X_1 \cdot \left(\frac{90.667}{EI} \right) + \left(\frac{-668.333}{EI} \right) = 0$$

Al ser una ecuación, los términos de módulo de elasticidad (E) y la inercia (I) se simplifica.

$$\frac{1}{EI} \cdot [90.667] \cdot [X_1] = \frac{-1}{EI} \cdot [668.333]$$

Se considera como sentido correcto, al obtener un resultado positivo (+), y como sentido opuesto, si obtenemos un resultado negativo (-).

$$X_1 = \frac{668.333}{\frac{90.667}{EI}} = 7.37$$

$$X_1 = A_x = 7.37 \text{ ton}$$





Reacciones lado izquierdo de la biela.

Para conocer los valores de reacciones del sistema real, al conocer el valor de la reacción horizontal en A, se realiza el despiece como se muestra en la figura 167.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = 30 \text{ ton} \quad N_1 = A_x = 7.37 \text{ ton}$$

$$\sum M_o = 0$$

$$N_1 \cdot (4 \text{ m}) - \frac{10 \cdot (3 \text{ m})^2}{2} + M_1 = 0$$

$$M_1 = 15.52 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

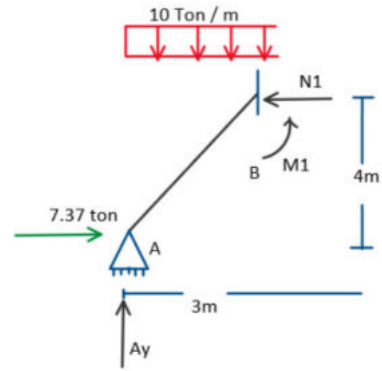


Figura.167. Discretización de pórtico (a la izquierda de la biela).

Aplicando momento en 1, se conoce las reacciones y fuerzas internas, al comprobar, se reemplaza en las ecuaciones generales, el resultado será cero.

Reacciones lado derecho de la biela.

Se emplea la estática en la barra faltante, conociendo las reacciones totales.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$C_y = 40 \text{ ton} \quad C_x = N_1 = 7.37 \text{ ton}$$

$$\sum M_i = 0$$

$$-M_i - M_c - \frac{10 \cdot (4 \text{ m})^2}{2} + C_y \cdot (4 \text{ m}) = 0$$

$$M_c = 64.5 \text{ ton}$$

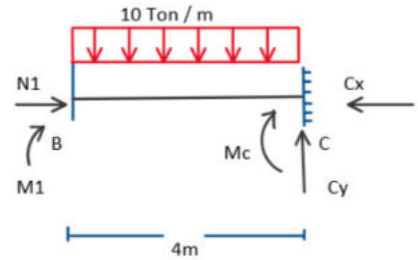


Figura.168. Discretización de pórtico (a la derecha de la biela).

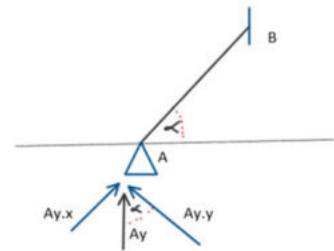
Linealizando las reacciones [Ax] y [Ay] perpendicular a la viga.

Para obtener los diagramas de corte y momento del sistema real, se linealiza las reacciones externas horizontales y verticales en todos los miembros de sección inclinada, como se muestra en la figura 169.

$$\sin(\alpha) = \frac{A_{y,x}}{A_y} \quad \cos(\alpha) = \frac{A_{y,y}}{A_y}$$

$$A_{y,x} = A_y \cdot \sin(\alpha) \quad A_{y,y} = A_y \cdot \cos(\alpha)$$

$$A_{y,x} = 24 \text{ ton} \quad A_{y,x} = 18 \text{ ton}$$



Se aplica las funciones trigonométricas, seno y coseno, realizando una suma de fuerzas, si están en el mismo sentido, o una resta de fuerzas, si se encuentran en sentidos opuestos.

$$\sin(\alpha) = \frac{A_{x,y}}{A_x} \quad \cos(\alpha) = \frac{A_{x,x}}{A_x}$$

$$A_{x,y} = A_x \cdot \sin(\alpha) \quad A_{x,x} = A_x \cdot \cos(\alpha)$$

$$A_{x,y} = 5.89 \text{ ton} \quad A_{y,x} = 4.42 \text{ ton}$$

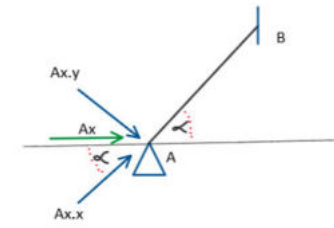
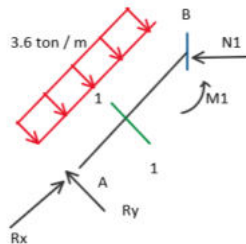


Figura.169. Linealización de reacciones Ax y Ay.

Ecuaciones de cortante y momento sistema real.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

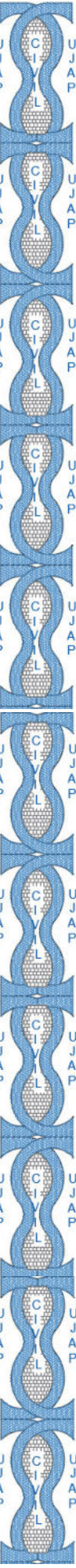
Los valores de fuerza puntual y distribuida perpendicular a la barra, permite generar la ecuación de fuerza cortante, como se muestra en la figura 170.



$$V_1 = 12.11 \text{ ton} - 3.6 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (x)$$

$$M_1 = 12.11 \cdot (x) - \frac{3.6 (x)^2}{2}$$

Figura.170. Corte 1-1 sistema real.





De igual forma, para el corte 2-2, los valores de cortante y momento, están dado por la ecuación al remplazar el rango de longitud comprendido entre 0 y 4m.

$$V_2 = -10 \cdot (x)$$

$$M_2 = 15.5 \text{ ton} \cdot \text{m} - \frac{10 \cdot (x)^2}{2}$$

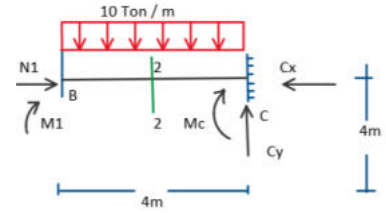


Figura.171. Corte 2-2 sistema real.

Diagramas de Corte y momento del sistema real.

Diagrama de cortante

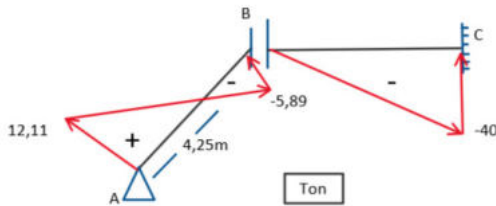


Diagrama de Momento

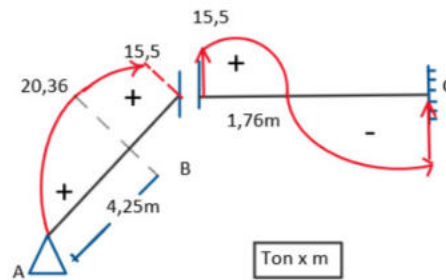


Figura.172. Diagramas de corte y momento flector, sistema real.

Ejercicio 5.12.6

Resolver la siguiente estructura estáticamente indeterminada mediante el método de las fuerzas, de miembros de sección EI (constantes) en todos sus miembros, determinar:

- Los grados de indeterminación
- reacciones del sistema.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento flector del sistema estructural.

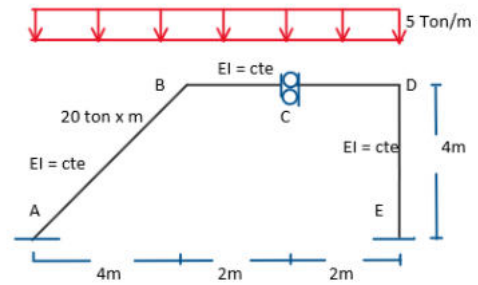


Figura.173. Estructura con biela interna.

Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

Para conocer los grados de indeterminación o de hiperestaticidad, se aplica la ecuación vista, conociendo que para cada junta posee una ecuación, para este caso el grado de hiperestaticidad será de 2.

Junta A = Junta E

$$R_{int} = 1 \cdot (n - 1) = 0$$

Junta B = Junta D

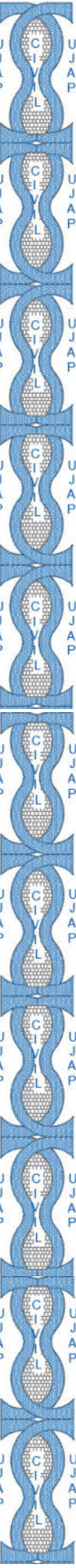
$$R_{int} = 3 \cdot (n - 1) = 3 \cdot (2 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$$

Biela interna C

$$R_{int} = 2 \cdot (n - 1) = 2$$

Ahora, que conocemos los grados de hiperestaticidad, se debe liberar 2 reacciones externas o internas, manteniendo la estabilidad de la estructura, para el ejemplo, se libera el momento (M_a) y la reacción horizontal (A_x).

$$GH = (6 + 8) - 3 \cdot (4) = 14 - 12 = 2 \quad \text{Hiperestático} = 2$$





Sistemas estructurales estables:

Sistema Principal

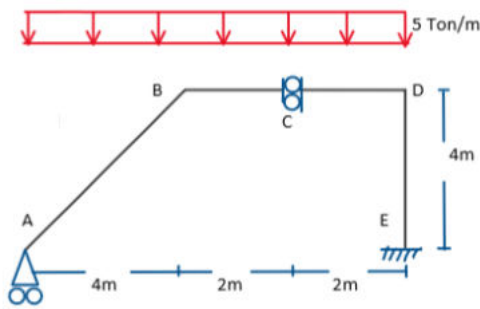


Figura.174. Estructura con biela interna, Sistema principal.

Sistema Virtual (V1)

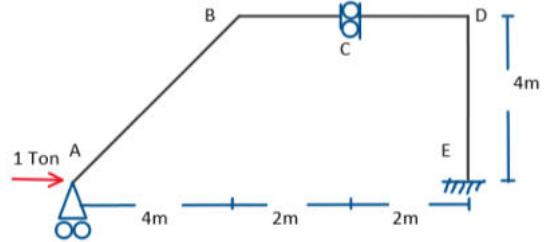


Figura.175. Estructura con biela interna, Sistema virtual 1.

Sistema Virtual (V2)

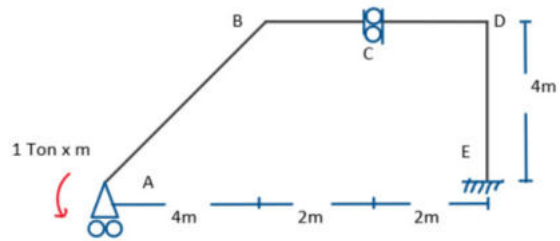


Figura.176. Estructura con biela interna, Sistema virtual 2.

Analizando el sistema principal

Cálculo de reacciones del sistema principal

Para conocer las reacciones del sistema principal, se aplica la estática, realizando una discretización de la biela interna a la izquierda, como se muestra en la figura 177.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = 30 \text{ ton} \quad N_1 = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-A_y \cdot (6 \text{ m}) + \frac{5 \cdot (6 \text{ m})^2}{2} + M_1 = 0$$

$$M_1 = 90 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

De igual forma, se aplica una sumatoria de fuerzas vertical, y horizontal, se realiza momento en el punto 1, así, se obtiene los valores de las fuerzas internas.

Discretización (lado izquierdo):

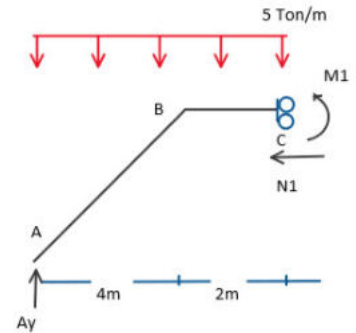


Figura.177. Despiece biela interna.

Al conocer los valores de las fuerzas internas, se obtiene el valor de reacciones faltantes.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 10 \text{ ton} \quad N_1 = E_x = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-M_1 - \frac{5 \cdot (2 \text{ m})^2}{2} + M_e + E_y \cdot (2 \text{ m}) - E_x \cdot (4 \text{ m}) = 0$$

$$M_e = 80 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Si se comprueba, los valores obtenidos, se debe reemplazar en las ecuaciones generales, el valor será cero.

Discretización (lado derecho):

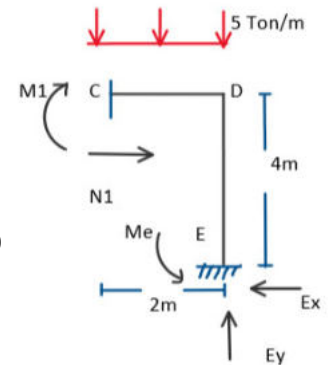


Figura.178. Despiece biela interna.





Linealización de reacción Ay

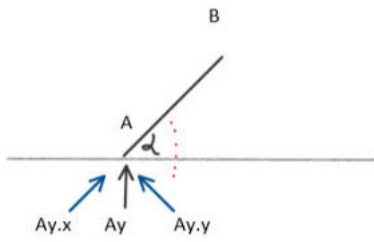


Figura.179. Linealización de reacción Ay.

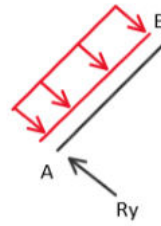
$$A_{y,y} = A_y \cdot \cos(\alpha)$$

$$A_{y,y} = 15 \cdot \sqrt{2} \text{ ton}$$

$$A_{y,x} = A_y \cdot \sin(\alpha)$$

$$A_{y,x} = 15 \cdot \sqrt{2} \text{ ton}$$

Linealización de carga distribuida.



$$w = \frac{20 \text{ ton} \cdot \cos(\alpha)}{4 \cdot \sqrt{2}} = 2.5 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

Figura.180. Linealización de fuerza distribuida.

Ecuaciones de corte y momento del sistema principal

Para conocer las ecuaciones de corte y momento, se obtiene la longitud de los miembros inclinados, por Pitágoras, así, para el ejemplo, el tramos será de 0 hasta $4\sqrt{2}$.

Las ecuaciones de corte y momento generan los diagramas de corte y momento, se debe evaluar los puntos críticos, para conocer los puntos críticos, se puede igualar la ecuación de cortante a cero y despejar la variable (x).

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 4\sqrt{2} \text{ m}]$

$$V_1 = 15 \cdot \sqrt{2} \text{ ton} - 2.5 (x)$$

$$M_1 = 15 \cdot \sqrt{2} (x) - \frac{2.5 \cdot (x)^2}{2}$$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_2 = 10 \text{ ton} - 5 (x)$$

$$M_2 = 10 \cdot (x) - \frac{5 \cdot (x)^2}{2} + 80 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_3 = -5 \text{ ton} \cdot (x)$$

$$M_3 = 90 \text{ ton} \cdot \text{m} - \frac{5 \cdot (x)^2}{2}$$

Corte 4-4 $[0 \leq x \leq 4 \text{ m}]$

$$V_4 = 0 \text{ ton}$$

$$M_4 = 80 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagramas de corte y momento flector del sistema principal.

Diagrama de cortante

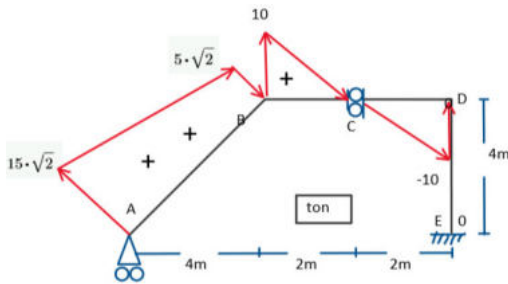


Diagrama de Momento

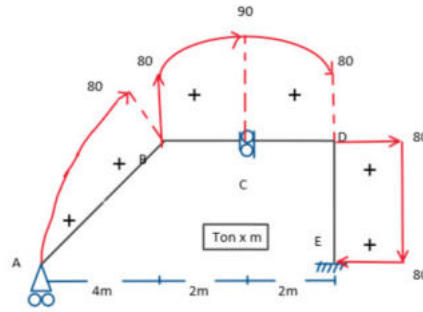


Figura.181. Diagrama de corte y momento sistema principal.

Analizando el sistema virtual (V1)

Reacciones del sistema virtual (V1)

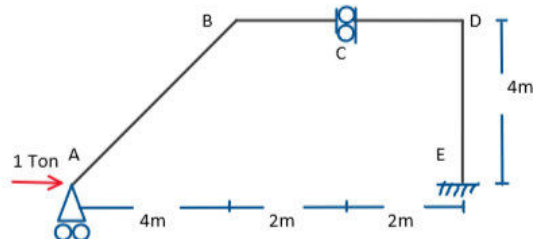


Figura.182. Sistema virtual 1, con vínculo modificado.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

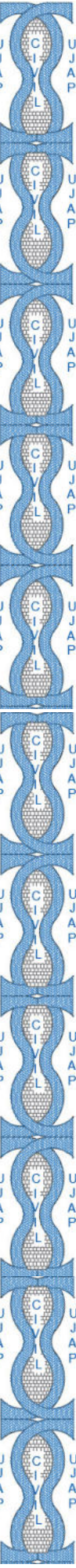
$$E_x = 1 \text{ ton}$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_e = 0$$

$$A_y \cdot (8 \text{ m}) + M_e = 0$$

$$M_e = 0 \text{ ton} \cdot \text{m}$$





Ecuaciones de corte y momento flector del sistema virtual (V1)

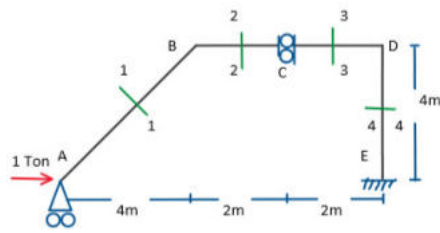


Figura.183. Sistema virtual 1, cortes globales.

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}]$

$$V_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ton}$$

$$M_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x)$$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$M_2 = -4 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = -4 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $[0 \leq x \leq 4 \text{ m}]$

$$V_4 = 1 \text{ ton}$$

$$M_4 = 1 \text{ ton} \cdot (x) - 4 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagramas de corte y momento del sistema virtual (V1)

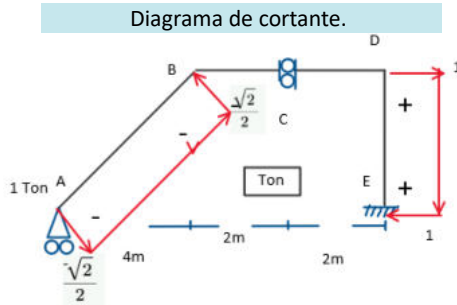


Figura.184. Diagramas de corte y momento del sistema virtual 1.

Analizando el sistema virtual (V2)

Reacciones del sistema virtual (V2)

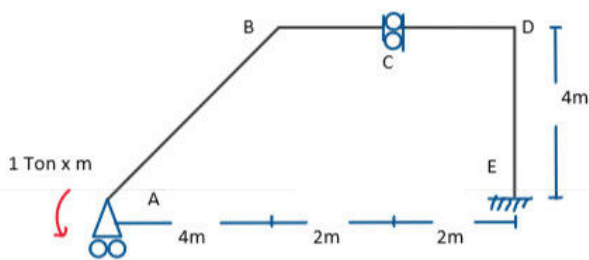


Figura.185. Sistema virtual 2, con vínculo modificado.

$$\sum F_x = 0$$

$$E_x = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_e = 0$$

$$M_e = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ ton}$$

Ecuaciones de corte y momento flector del sistema virtual (V2)

Para conocer las ecuaciones de corte y momento, se obtiene la longitud de los miembros inclinados, por Pitágoras, así para este caso el tramo será de 0 hasta $4\sqrt{2}$.

Al obtener solo momento en (A), no se generan fuerzas cortantes, y el valor de momento en cada tramo será la unidad.

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}]$

$$V_1 = 0 \text{ ton}$$

$$M_1 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$M_2 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $[0 \leq x \leq 4 \text{ m}]$

$$V_4 = 1 \text{ ton}$$

$$M_4 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$





Diagramas de corte y momento del sistema virtual (V2)

Diagrama de cortante.

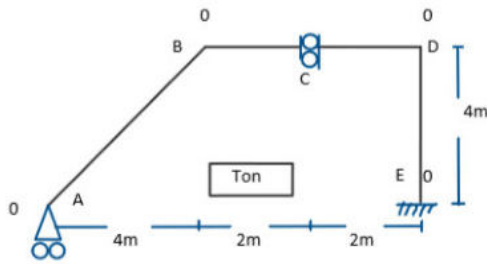


Diagrama de Momento Flector.

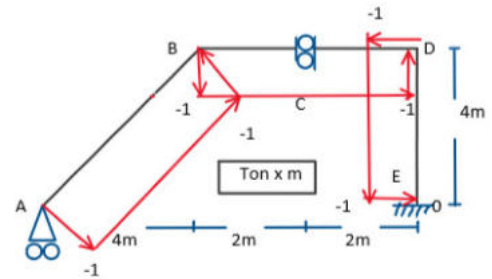


Figura.186. Diagramas de corte y momento del sistema virtual 2.

Cálculo de los desplazamientos

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{10}]$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot x \right) \cdot \left(15 \cdot \sqrt{2} \cdot x - \frac{2.5}{2} \cdot x^2 \right) dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-4) \cdot \left(10 \cdot x - \frac{5}{2} \cdot x^2 + 80 \right) dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-4) \cdot \left(90 - \frac{5}{2} \cdot x^2 \right) dx + \int_0^{4 \text{ m}} (x-4) \cdot (80) dx$$

$$\Delta_{10} = -\frac{2705.489}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{20}]$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}} (-1) \cdot \left(15 \cdot \sqrt{2} \cdot x - \frac{2.5}{2} \cdot x^2 - 20 \right) dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-1) \cdot \left(10 \cdot x - \frac{5}{2} \cdot x^2 + 80 \right) dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-1) \cdot \left(90 - \frac{5}{2} \cdot x^2 \right) dx + \int_0^{4 \text{ m}} (-1) \cdot (80) dx$$

$$\Delta_{20} = -\frac{930.653}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{11}]$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot x \right)^2 dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-4)^2 dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-4)^2 dx + \int_0^{4 \text{ m}} (x-4)^2 dx = \frac{115.503}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{22}]$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}} (-1)^2 dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-1)^2 dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-1)^2 dx + \int_0^{4 \text{ m}} (-1)^2 dx = \frac{13.657}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{12} = \delta_{21}]$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot x \right) \cdot (-1) dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-4) \cdot (-1) dx + \int_0^{2 \text{ m}} (-4) \cdot (-1) dx + \int_0^{4 \text{ m}} (x-4) \cdot (-1) dx = \frac{35.314}{EI}$$





Cálculo de las ecuaciones canónicas por matrices.

$$\frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} 115.503 & 35.314 \\ 35.314 & 13.657 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} -2705.489 \\ -930.653 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.361 \text{ ton} \\ 36.181 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Analizando el sistema real

Cálculo de reacciones del sistema real.

Para conocer el valor de las reacciones del sistema real, se realiza la discretización del sistema, así, se aplica la estática.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = 30 \text{ ton} \quad N_1 = A_x = 12.36 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$M_1 + 16.18 + 20 - A_y \cdot (6 \text{ m}) + A_x \cdot (4 \text{ m}) + \frac{5 \cdot (6 \text{ m})^2}{2} = 0$$

Discretización (Lado izquierdo de la biela).

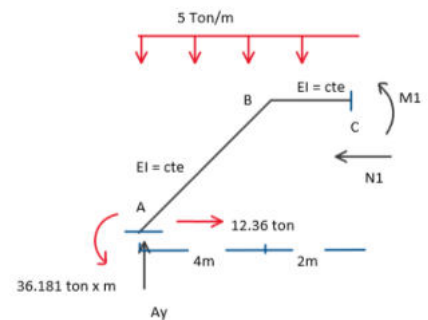


Figura.187. Despiece biela interna lado izquierdo.

Se aplica la estática en lado derecho de la biela, se puede comprobar las reacciones reemplazando en las ecuaciones generales. El resultado será cero.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 10 \text{ ton} \quad E_x = N_1 = 12.36 \text{ ton}$$

$$E_y \cdot (2 \text{ m}) - E_x \cdot (4 \text{ m}) + M_e - \frac{5 \cdot (2 \text{ m})^2}{2} - M_1 = 0$$

$$M_e = 43.81 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Discretización (Lado derecho de la biela).

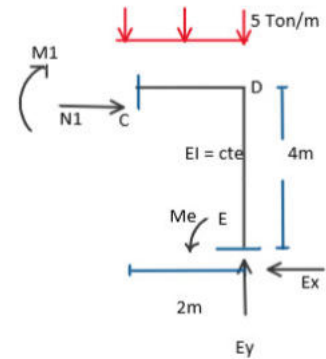
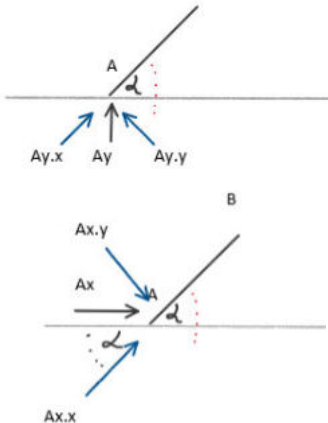


Figura.188. Despiece biela interna lado derecho.

Linealizando reacciones perpendicular a la columna Ax y Ay



$$A_{y,x} = 30 \sin(45^\circ) \quad A_{y,y} = 30 \cos(45^\circ)$$

$$A_{y,x} = 15 \cdot \sqrt{2} \text{ ton} \quad A_{y,y} = 15 \cdot \sqrt{2} \text{ ton}$$

$$A_{x,x} = A_x \cdot \cos(45^\circ) \quad A_{x,y} = A_x \cdot \sin(45^\circ)$$

$$A_{x,x} = 8.74 \text{ ton} \quad A_{x,y} = 8.74 \text{ ton}$$

Figura.189. Linealización de reacciones.



Ecuaciones de cortante y momento sistema real.

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}]$

$$V_1 = 12.473 - 2.5 \cdot (x)$$

$$M_1 = 12.473 \cdot (x) - \frac{2.5 (x)^2}{2} - 36.181 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_3 = -5 (x)$$

$$M_3 = -\frac{5 \cdot (x)^2}{2} + 4.375 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 2 \text{ m}]$

$$V_2 = 10 \text{ ton} - 5 \cdot (x)$$

$$M_2 = 10 \cdot (x) - \frac{5 \cdot (x)^2}{2} - 5.625 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $[0 \leq x \leq 4 \text{ m}]$

$$V_4 = 12.361 \text{ ton}$$

$$M_4 = 12.361 \cdot (x) - 5.625 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagramas de corte y momento flector del sistema real.

Diagrama de cortante.

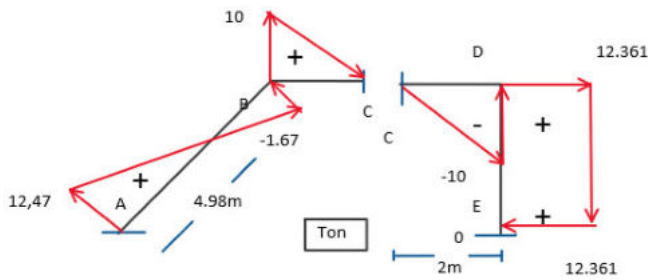


Diagrama de Momento Flector.

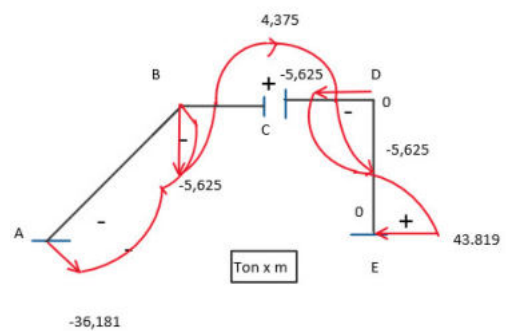


Figura.190. Diagrama de corte y momento del sistema real.

Ejercicio 5.12.7

Se desea construir una Mezzanina en un galpón existente con un volado como lo muestra la figura.

Los miembros de las vigas y columnas son de sección EI (constantes), determinar:

- a) Los grados de indeterminación
- b) reacciones del sistema.
- c) Los diagramas de fuerza cortante y momento flector del sistema estructural.

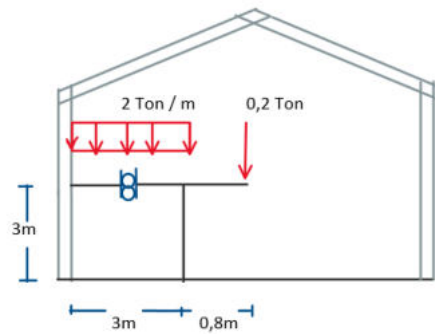


Figura.191. Estructura mezzanina con biela interna.

Sistema equivalente para volados

Se idealiza la estructura como empotrada en la viga y en su columna, con un volado que se convierte en un pórtico, cuyo valor de carga se transmite, siendo el momento flector hacia la junta. Como se muestra en la figura 192.

Los valores de fuerza cortante se transmite hacia el nodo, cumpliendo con el equilibrio.

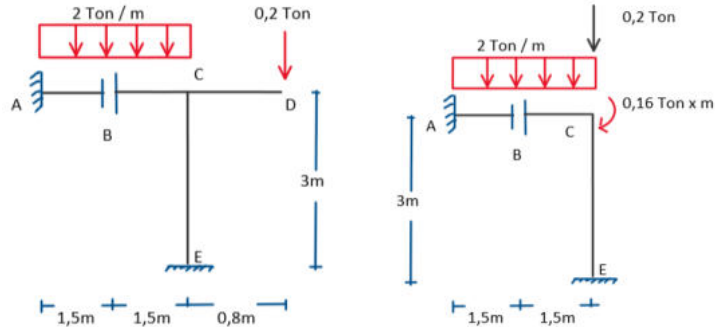


Figura.192. Estructura modificada por su voladizo.



Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

Junta A = Junta E $R_{int} = 1(n - 1) = 0$

Biela B = $R_{int} = 2 \cdot (n - 1) = 2$

Junta C $R_{int} = 3 \cdot (3 - 1) = 6$

$$GH = (6 + 5) - 3 \cdot (3) = 11 - 9 = 2$$

Hiperestático = 2

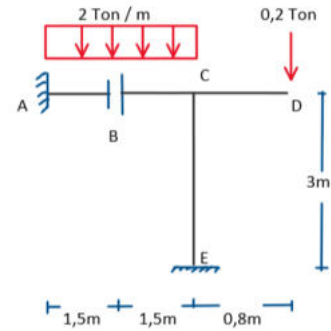
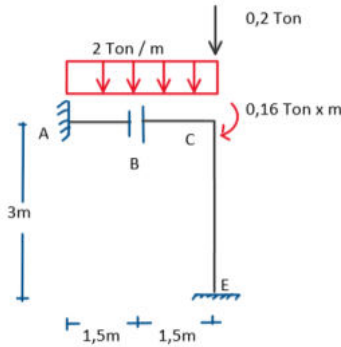


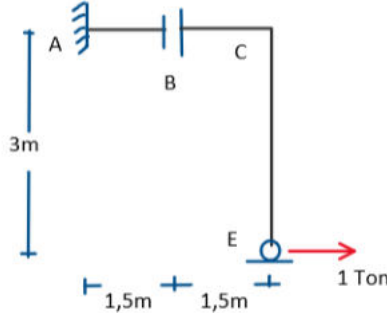
Figura.193. Idealización de mezzanina de nave industrial.

Sistemas estructurales estables:

Sistema Principal



Sistema Virtual (V1)



Sistema Virtual (V2)

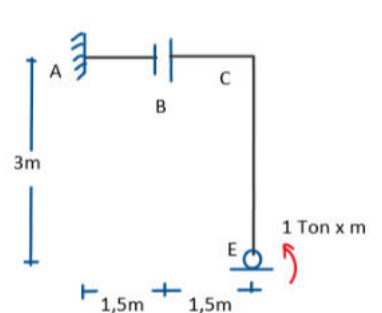


Figura.194. Sistemas estructurales estables posibles.

Analizando el sistema principal

Cálculo de reacciones del sistema principal

Para conocer las reacciones del sistema principal, se realiza un despiece, y se aplica la estática de fuerzas. Como se muestra en la figura 195.

Al no poseer fuerzas de forma horizontal, la fuerza interna N1 será igual a cero.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 3.2 \text{ ton} \quad N_1 = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-M_1 - 0.16 \text{ ton} \cdot m + E_y \cdot (1.5 \text{ m}) - \frac{2 \cdot (1.5 \text{ m})^2}{2} - 0.2 \cdot (1.5 \text{ m}) = 0$$

$$M_1 = 2.09 \text{ ton} \cdot m$$

Discretización (lado derecho) :

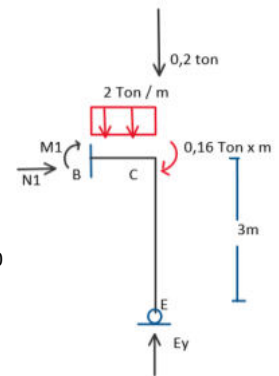


Figura.195. Despiece biela interna, lado derecho.



Analizando el despiece lado izquierdo del empotramiento móvil interno, sus reacciones se puede conocer aplicando la estática.

Si se desea comprobar los valores, se reemplaza en las ecuaciones generales. El resultado será cero.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 3 \text{ ton} \quad A_x = N_1 = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$M_o + \frac{2 \cdot (1.5)^2}{2} - A_y \cdot (1.5 \text{ m}) + M_1 = 0$$

$$M_1 = 0.16 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Discretización lado izquierdo:

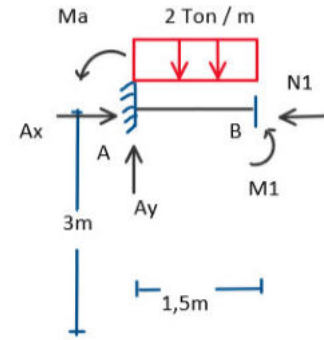


Figura.196. Despiece biela interna, lado izquierdo.

Ecuaciones de corte y momento flector del sistema principal

Los cortes se realizan en las secciones 1-1, 2-2 y 3-3, debido a que no se generan fuerzas en la columna, su valor será cero.

En el tramo 3-3 el valor de corte y momento será cero, debido a que se encuentra en equilibrio y no se transmite ninguna fuerza interna.

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

$$V_1 = 3 \text{ ton} - 2(x)$$

$$M_1 = 3 \cdot (x) - \frac{2 \cdot (x)^2}{2} - 0.16 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

$$V_2 = -2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (x)$$

$$M_2 = -\frac{2 \cdot (x)^2}{2} + 2.09 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 3 \text{ m}]$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = 0 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema Principal

Los diagramas de cortante, permite identificar donde se generan los valores más críticos, sea en la junta (A) o en la junta (C), como se muestra en la figura 197.

Los diagramas de momento, permite identificar el momento más crítico o mayor, para el ejemplo, será cuando el diagrama de fuerza cortante interseca con la viga.

Diagrama de cortante.

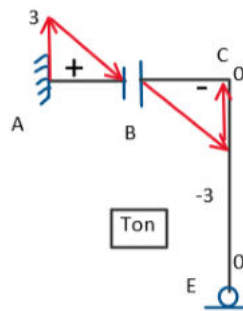


Diagrama de Momento Flector.

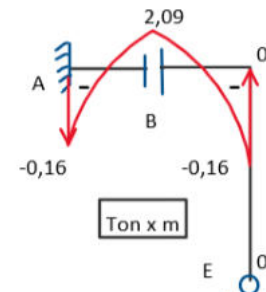
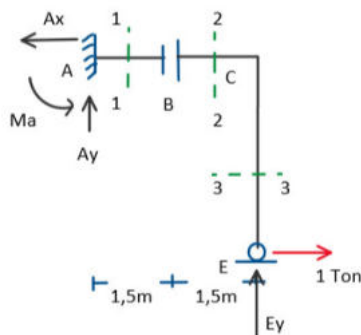


Figura.197. Diagrama de corte y momento del sistema principal.

Analizando el sistema virtual (V1)

Cálculo de reacciones del sistema virtual 1



$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ ton} \quad A_x = 1 \text{ ton}$$

$$\sum M_o = 0$$

$$1 \text{ ton} \cdot (3 \text{ m}) + M_o = 0$$

$$M_o = -3 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad \text{"sentido opuesto"}$$

Figura.198. Sistema virtual 1, con cortes globales.



Ecuaciones de corte y momento flector del sistema virtual (V1)

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 3 \text{ m}]$

$$V_1 = 0 \text{ ton}$$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$V_3 = -1 \text{ ton}$$

$$M_1 = 3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = -1 \text{ ton}(x) + 3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema Virtual 1

Debido a que en el sistema virtual se obtiene una fuerza horizontal en E, se genera la fuerza cortante en la columna, en la viga será igual a cero.

El diagrama de momento se realiza en función al diagrama de fuerza cortante, por los criterios de resistencia de materiales.

Diagrama de cortante.

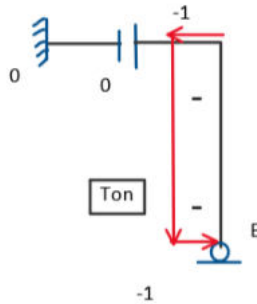


Diagrama de Momento Flector.

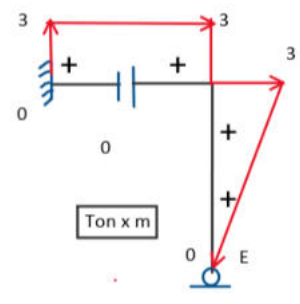


Figura.199. Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1.

Analizando el sistema virtual (V2)

Cálculo de reacciones del sistema virtual 2

Para el sistema virtual (V2), se aplica la estática de fuerzas, por solo tener momento en E, no se genera reacciones horizontales, ni verticales, solo se genera momento interno.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ ton} \quad A_x = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_o = 0$$

$$M_o = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

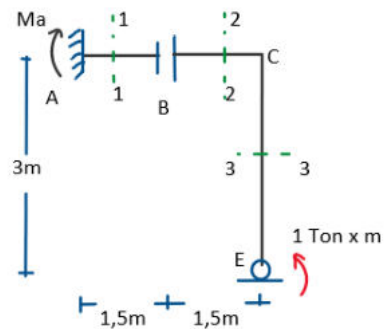


Figura.200. Sistema virtual 2, con cortes globales.

Ecuaciones de corte y momento flector del sistema virtual (V2)

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 3 \text{ m}]$

$$V_1 = 0 \text{ ton}$$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_1 = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema Virtual 2

Para el sistema virtual (V2), al tener solo la sollicitación de momento, el diagrama de cortante será nulo, por ende, el diagrama de momento será de forma rectangular, en sus secciones.

Diagrama de cortante.

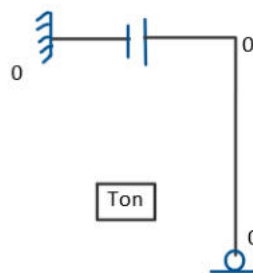


Diagrama de Momento Flector.

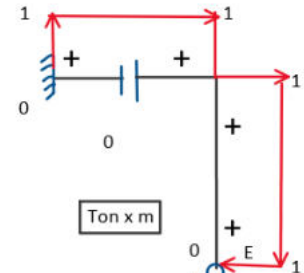


Figura.201. Diagrama de corte y momento del sistema virtual 2.



$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{10}]$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \left(\frac{M_1 \cdot M_0}{EI} \right) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^{1.5m} (3) \cdot \left(3 \cdot x - \frac{2}{2} x^2 - 0.16 \right) dx + \int_0^{1.5m} (3) \cdot \left(\frac{-2}{2} \cdot x^2 + 2.09 \right) dx + \int_0^{3m} (-x+3) \cdot (0) dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{12.06}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{20}]$

$$\Delta_{20} = \int_0^L \left(\frac{M_2 \cdot M_0}{EI} \right) dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \int_0^{1.5m} (1) \cdot \left(3 \cdot x - \frac{2}{2} x^2 - 0.16 \right) dx + \int_0^{1.5m} (1) \cdot \left(\frac{-2}{2} \cdot x^2 + 2.09 \right) dx + \int_0^{3m} (1) \cdot (0) dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{4.02}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{11}]$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{1.5m} (3)^2 dx + \int_0^{1.5m} (3)^2 dx + \int_0^{3m} (-x+3)^2 dx$$

$$\delta_{11} = \frac{36}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{22}]$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI} dx$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^{1.5m} (1)^2 dx + \int_0^{1.5m} (1)^2 dx + \int_0^{3m} (1)^2 dx$$

$$\delta_{22} = \frac{6}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{21} = \delta_{12}]$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^L \left(\frac{M_1 \cdot M_2}{EI} \right) dx$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^{1.5m} (3) \cdot (1) dx + \int_0^{1.5m} (3) \cdot (1) dx + \int_0^{3m} (-x+3) \cdot (1) dx$$

$$\delta_{12} = \frac{13.5}{EI}$$





Resolviendo el sistema de ecuaciones canónicas por matrices.

Para resolver el sistema de ecuaciones se emplea un sistema de matrices, al estar en función de EI, se pueden cancelar, obteniendo las reacciones del sistema real.

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & 13.5 \\ 13.5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 12.06 \\ 4.02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.536 \text{ ton} \\ 0.536 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Cálculo del sistema real

Cálculo de reacciones del sistema real.

Aplicando la discretización del lado izquierdo a la biela, se obtiene los valores reales de las fuerzas internas del sistema estructural como se muestra en la figura 202.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 3.2 \text{ ton} \quad N_1 = 0.536 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-0.2 (1.5 \text{ m}) + E_y (1.5 \text{ m}) - 0.536 \cdot (3 \text{ m}) + 0.536 \text{ ton} \cdot \text{m} - 0.16 \text{ ton} \cdot \text{m} - \frac{2 \cdot (1.5)^2}{2} - M_1 = 0$$

$$M_1 = 1.018 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Al obtener los valores de las fuerzas internas se puede discretizar y conocer los valores de las reacciones faltantes, como se muestra en la figura 203.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = 3 \text{ ton} \quad A_x = N_1 = 0.536 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad -M_o - A_y \cdot (1.5 \text{ m}) + \frac{2 \cdot (1.5 \text{ m})^2}{2} + M_1 = 0$$

$$M_o = -1.232 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Discretización (lado izquierdo) :

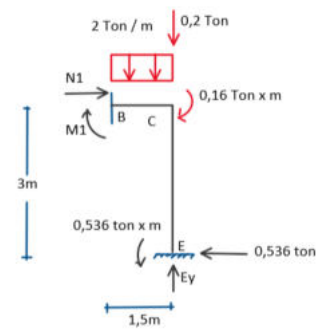


Figura.202. Despiece biela interna, lado derecho.

Discretización (lado derecha) :

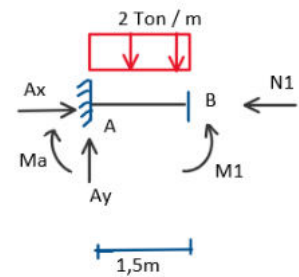


Figura.203. Despiece biela interna, lado izquierdo.

Ecuaciones de corte y momento flector del sistema real .

Corte 1-1 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

Corte 2-2 $[0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}]$

Corte 3-3 $[0 \leq x \leq 3 \text{ m}]$

$$V_1 = 3 \text{ ton} - 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (x)$$

$$V_2 = -2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (x)$$

$$V_3 = 0.536 \text{ ton}$$

$$M_1 = 3 (x) - \frac{2 (x)^2}{2} - 1.232 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = -\frac{2 (x)^2}{2} + 1.018 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = 0.536 (x) - 1.072 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema real.

Diagrama de cortante.

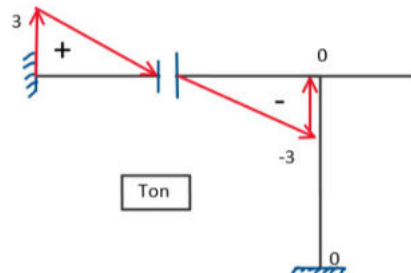


Diagrama de Momento Flector.

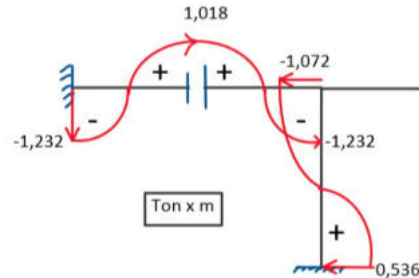


Figura.204. Diagrama de corte y momento del sistema real.



Ejercicio 5.12.8

Dado el siguiente sistema estructural de acero en vigas y columnas, con sección EI variable como se muestra en la figura, determinar:

- Los grados de indeterminación
- reacciones del sistema.
- Los diagramas de fuerza cortante y momento flector del sistema estructural.

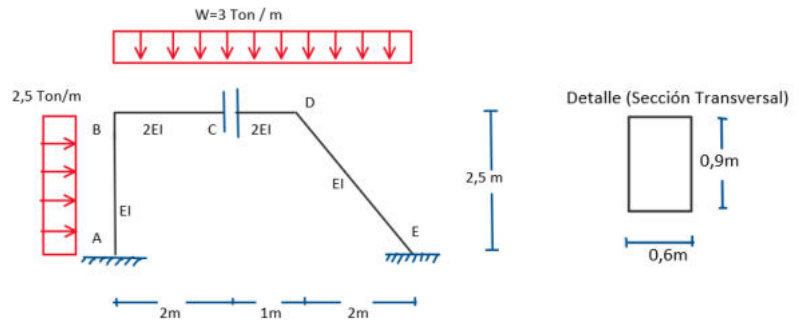


Figura.205. Idealización estructural con biela externa e interna.

Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

Para conocer los grados de indeterminación o de hiperestaticidad, se realiza la ecuación vista anteriormente.

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

$$\text{Junta A = Junta E} \quad R_{int} = 1(n - 1) = 0$$

$$\text{Biela C} \quad R_{int} = 2 \cdot (n - 1) = 2$$

$$\text{Junta B} \quad R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$$

$$\text{Junta D} \quad R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$$

$$GH = (6 + 8) - 3 \cdot (4) = 13 - 12 = 2$$

Hiperestático = 2

Sistemas estructurales estables:

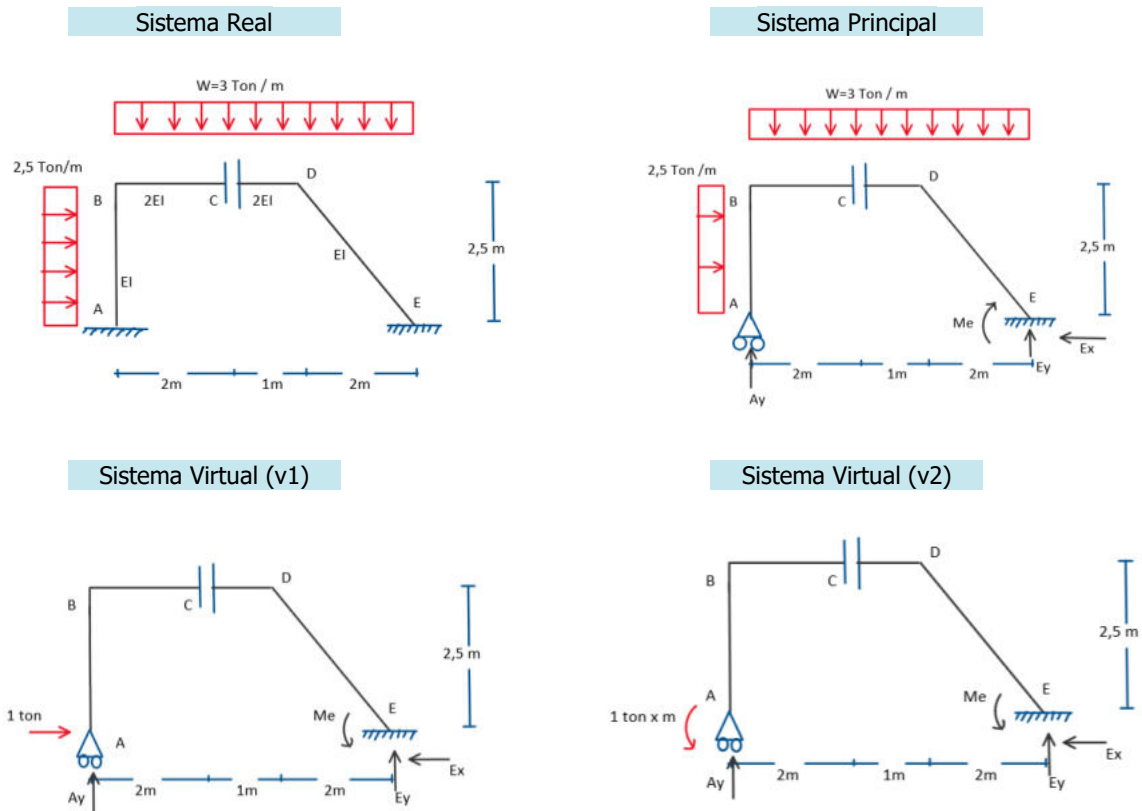


Figura.206. Sistemas estructurales estables posibles.





Cálculo de reacciones del sistema principal

Para conocer las reacciones del sistema principal, se realiza la discretización, se considera las fuerzas internas, como se muestra en la figura 207.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = 6 \text{ ton} \quad N_1 = 6.25 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-A_y \cdot (2 \text{ m}) + \frac{3 \cdot (2 \text{ m})^2}{2} + M_1 + \frac{2.5 \cdot (2.5)^2}{2} = 0$$

$$M_1 = -1.8125 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Se procede a la discretización en el lado opuesto, con los valores de fuerzas internas, se aplica la estática para conocer las reacciones faltantes.

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 9 \text{ ton} \quad E_x = N_1 = 6.25 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-M_1 - \frac{3 \cdot (3 \text{ m})^2}{2} + M_e + E_y \cdot (3 \text{ m}) - E_x \cdot (2.5 \text{ m}) = 0$$

$$M_e = -9.6875 \text{ ton} \cdot \text{m} \text{ "Sentido Opuesto"}$$

Isostatización de la estructura

La isostatización, consiste en realizar una discretización de toda la estructura, con la finalidad de conocer las fuerzas internas, de manera que al realizar momento en cualquier punto de los miembros, debe cumplir el equilibrio en cada punto.

Al aplicar las ecuaciones de estática se debe cumplir el equilibrio, como se muestra en la figura 209.

La metodología se aplica para identificar las fuerzas internas, así, se puede linealizar al tener barras inclinadas.

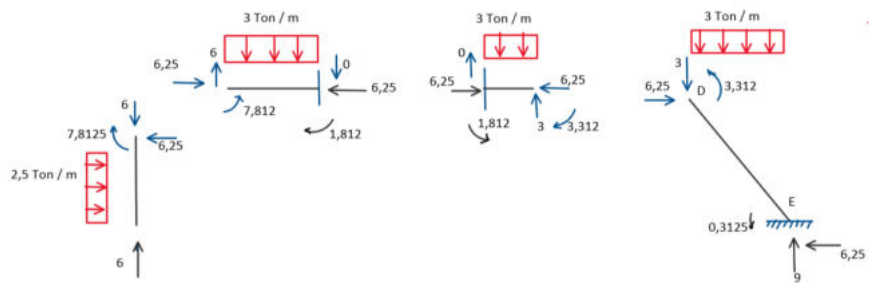


Figura.209. Isostatización de la estructura, sistema principal.

Linealizando fuerza horizontal perpendicular a la viga inclinada.

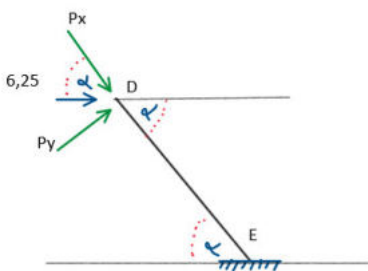


Figura.210. Linealización de fuerzas internas.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2.5}{2} \right) = 51.34^\circ$$

$$\sin(\alpha) = \frac{P_y}{6.25 \text{ ton}} \quad \cos(\alpha) = \frac{P_x}{6.25 \text{ ton}}$$

$$P_y = 6.25 \text{ ton} \cdot \sin(51.34^\circ) \quad P_x = 6.25 \text{ ton} \cdot \cos(51.34^\circ)$$

$$P_y = 4.88 \text{ ton}$$

$$P_x = 3.904 \text{ ton}$$

Discretización lado izquierdo:

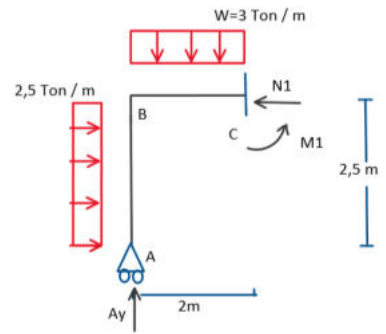


Figura.207. Despiece biela interna, lado izquierdo.

Discretización lado derecho:

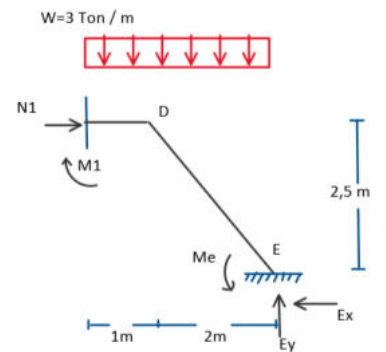
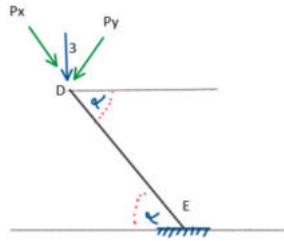


Figura.208. Despiece biela interna, lado derecho.



Linealizando fuerza vertical perpendicular a la viga inclinada.



$$\alpha = 51.34^\circ$$

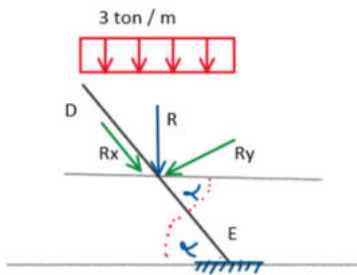
$$\sin(\alpha) = \frac{P_x}{3 \text{ ton}} \quad \cos(\alpha) = \frac{P_y}{3 \text{ ton}}$$

$$P_x = 3 \text{ ton} \cdot \sin(51.34^\circ) \quad P_y = 3 \text{ ton} \cdot \cos(51.34^\circ)$$

$$P_x = 2.343 \text{ ton} \quad P_y = 1.874 \text{ ton}$$

Figura.211 Linealización de fuerzas internas.

Linealizando carga distribuida perpendicular a la viga inclinada



$$R = 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (2 \text{ m}) = 6 \text{ ton}$$

$$R_y = R \cos(\alpha) \quad R_x = R \sin(\alpha)$$

$$R_y = 3.748 \text{ ton} \quad R_x = 4.685 \text{ ton}$$

$$w_y = \frac{R_y}{L_{de}} = 1.17 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

Figura.212. Linealización de carga distribuida.

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2.5 \text{ m}$

$$V_1 = -2.5 \cdot (x)$$

$$M_1 = -\frac{2.5 \cdot (x)^2}{2}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_2 = 6 \text{ ton} - 3 \cdot (x)$$

$$M_2 = 6 \cdot (x) - \frac{3 \cdot (x)^2}{2} - 7.812 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = -3 \cdot (x)$$

$$M_3 = \frac{-3 \cdot (x)^2}{2} - 1.812 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{41}}{2} \text{ m}$

$$V_4 = 3 \text{ ton} - 1.17 \cdot (x)$$

$$M_4 = 3 \cdot (x) - \frac{1.17 \cdot (x)^2}{2} - 3.3125 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema principal

Diagrama de cortante.

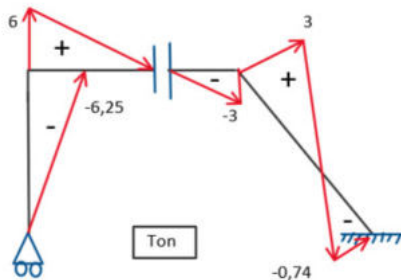


Diagrama de Momento Flector.

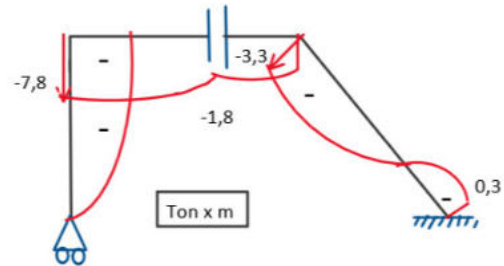


Figura.213. Diagrama de corte y momento del sistema principal.





Analizando el sistema virtual (v1)

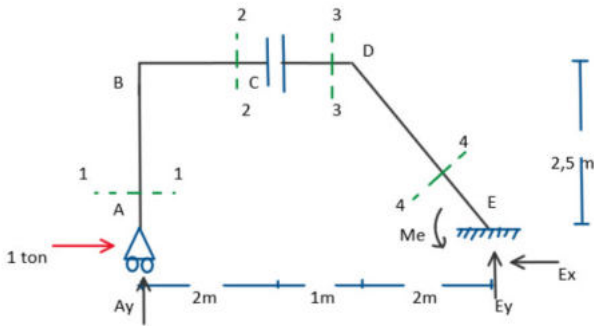


Figura.214. Sistema virtual 1, con cortes globales.

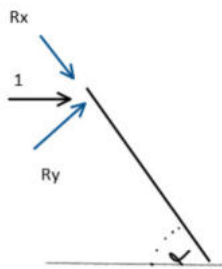
$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ ton} \quad E_x = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_a = 0$$

$$M_e = 0 \text{ ton} \cdot m$$

Linealizando fuerzas.



$$\sin(\alpha) = \frac{R_y}{1 \text{ ton}}$$

$$R_y = 1 \cdot \sin(51.34^\circ) = 0.78 \text{ ton}$$

Figura.215. Linealización de fuerza interna.

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2.5 \text{ m}$

$$V_1 = -1 \text{ ton}$$

$$M_1 = -1 \cdot (x)$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = -2.5 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_2 = 0$$

$$M_2 = -2.5 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{41}}{2} \text{ m}$

$$V_4 = 0.78 \text{ ton}$$

$$M_4 = 0.78 \cdot (x) - 2.5 \text{ ton} \cdot m$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema virtual 1

Diagrama de cortante.

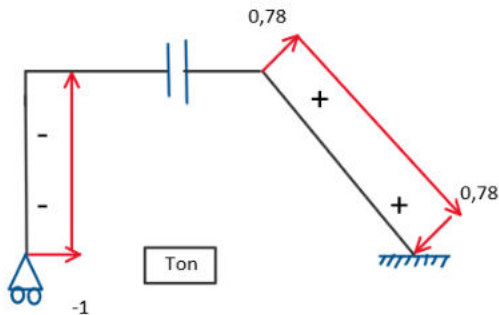


Diagrama de Momento Flector.

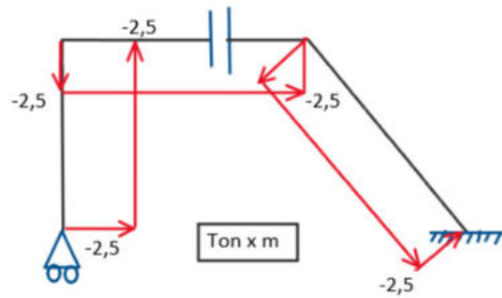


Figura.216. Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1.





Cálculo de reacciones del sistema virtual v2

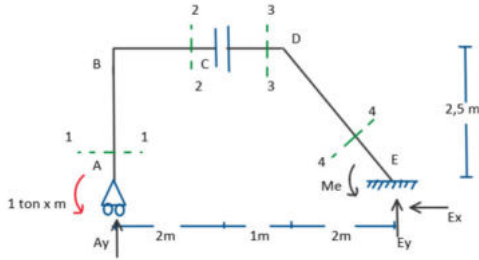


Figura.217 Sistema virtual 1, con cortes globales.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 & \sum F_x &= 0 \\ A_y &= 0 \text{ ton} & N_1 &= 0 \text{ ton} \\ \sum M_i &= 0 \\ M_1 &= 1 \text{ ton} \cdot m & M_e &= 1 \text{ ton} \cdot m \end{aligned}$$

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2.25 \text{ m}$

$$V_1 = 0 \text{ ton}$$

$$M_1 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$M_2 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{41}}{2} \text{ m}$

$$V_4 = 0 \text{ ton}$$

$$M_4 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema virtual 2

Diagrama de cortante.

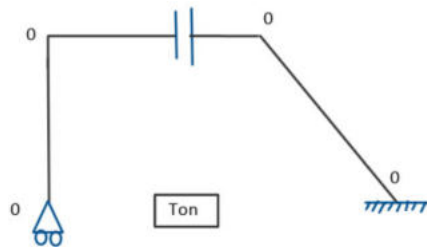


Diagrama de Momento Flector.

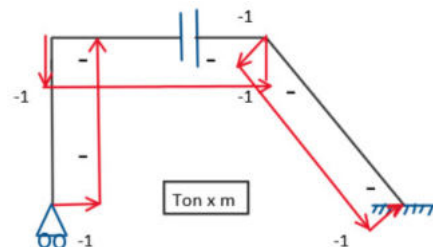


Figura.218 Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1.

Cálculo de los desplazamientos $[\delta]$ y $[\Delta]$

Por tener dos fuerzas redundantes se generan dos ecuaciones canónicas.

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando propiedades de los materiales Elasticidad e Inercia de acuerdo a la sección transversal

Módulo de elasticidad del acero:

$$E = 2.1 \cdot 10^6 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 2.1 \cdot 10^7 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$$

Inercia de la sección transversal para vigas y columnas.

$$\begin{aligned} I &= \frac{b \cdot h^3}{12} \\ I &= \frac{(0.6 \text{ m}) \cdot (0.9 \text{ m})^3}{12} = 0.036 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Producto de la elasticidad por la inercia en toneladas x metro cuadrado

$$EI = 7.65 \cdot 10^5 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

Detalle (Sección Transversal)

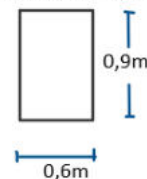


Figura.219. Sección transversal de vigas y columnas.



Cálculo del desplazamiento [Δ_{10}]

$$\Delta_{10} = \int_{0m}^L \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_0^{2.5m} (-x) \cdot \left(\frac{-2.5}{2} \cdot x^2 \right) dx = \frac{(12.207)}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{2 \cdot EI} \int_{0m}^{2m} (-2.5) \cdot \left(6 \cdot x - \frac{3}{2} x^2 - 7.812 \right) dx = \frac{(19.063)}{2 \cdot EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{2 \cdot EI} \int_{0m}^{1m} (-2.5) \cdot \left(\frac{-3}{2} x^2 - 1.8125 \right) dx = \frac{(5.781)}{2 \cdot EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\frac{\sqrt{41}}{2}m} (0.78x - 2.5) \cdot \left(3x - \frac{1.17}{2} x^2 - 3.3125 \right) dx = \frac{(4.443)}{EI}$$

$$\Delta_{10} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$\Delta_{10} = \frac{(12.207)}{EI} + \frac{(19.063)}{2 \cdot EI} + \frac{(5.781)}{2 \cdot EI} + \frac{(4.443)}{EI}$$

$$\Delta_{10} = \frac{(12.207)}{(7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(19.063)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(5.781)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(4.443)}{(7.65 \cdot 10^5)} = 3.798 \cdot 10^{-5}$$

Cálculo del desplazamiento [Δ_{20}]

$$\Delta_{20} = \int_{0m}^L \frac{M_2 \cdot M_0}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{2.5} \left(\frac{-2.5}{2} x^2 \right) \cdot (-1) dx = \frac{6.51}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{2 \cdot EI} \cdot \int_0^2 \left(6x - \frac{3}{2} x^2 - 7.8125 \right) \cdot (-1) dx = \frac{7.625}{2 \cdot EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{2 \cdot EI} \cdot \int_0^1 \left(\frac{-3}{2} x^2 - 1.8125 \right) \cdot (-1) dx = \frac{2.313}{2 \cdot EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{41}}{2}} \left(3x - \frac{1.17}{2} x^2 - 3.3125 \right) \cdot (-1) dx = \frac{1.629}{EI}$$

$$\Delta_{20} = \frac{6.51}{7.65 \cdot 10^5} + \frac{7.625}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{2.313}{2 \cdot 7.65 \cdot 10^5} + \frac{1.629}{7.65 \cdot 10^5} = 1.713 \cdot 10^{-5}$$

Para conocer los desplazamientos, se aplica las integrales definidas, van a estar evaluadas en el rango de los cortes realizados.

Debido a que la expresión se puede volver extensa por el número de elementos o barras que forman un sistema estructural, se puede descomponer en tramos conocidos como U1, U2, U3, etc.

Los valores de las integrales, se puede obtener de forma manual o utilizando un software, que permita el calculo en función de EI.

Para este sistema estructural se empleo 4 tramos de desplazamiento que, al sumar cumpliendo con las propiedad de las integrales definidas, se puede calcular el valor del desplazamiento Δ_{10} .

El proceso se repite para (n) casos de desplazamiento de acuerdo al número de ecuaciones canónicas del sistema estructural.



**Cálculo del desplazamiento [δ_{11}]**

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{2.5m} (-x)^2 dx = \frac{(5.208)}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{2 \cdot EI} \int_{0m}^{2m} (-2.5)^2 dx = \frac{(12.5)}{2 \cdot EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{2 \cdot EI} \int_{0m}^{1m} (-2.5)^2 dx = \frac{(6.25)}{2 \cdot EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\frac{\sqrt{41}}{2}m} (0.78x - 2.5)^2 dx = \frac{(6.677)}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{(5.208)}{(7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(12.5)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(6.25)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(6.677)}{(7.65 \cdot 10^5)} = 2.777 \cdot 10^{-5}$$

Cálculo del desplazamiento [δ_{22}]

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{2.5} (-1)^2 dx = \frac{2.5}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{2 \cdot EI} \int_0^2 (-1)^2 dx = \frac{2}{2 \cdot EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{2 \cdot EI} \int_0^1 (-1)^2 dx = \frac{1}{2 \cdot EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{41}}{2}} (-1)^2 dx = \frac{3.202}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{(2.5)}{(7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(2)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(1)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(3.202)}{(7.65 \cdot 10^5)} = 9.408 \cdot 10^{-6}$$

Cálculo del desplazamiento [$\delta_{12} = \delta_{21}$]

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_0^{2.5} (-1) \cdot (-x) dx = \frac{3.125}{EI}$$





$$U_2 = \frac{1}{2 \cdot EI} \cdot \int_0^2 (-1) \cdot (-2.5) dx = \frac{5}{2 \cdot EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{2 \cdot EI} \cdot \int_0^1 (-1) \cdot (-2.5) dx = \frac{2.5}{2 \cdot EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\sqrt{41}} (-1) \cdot (0.78 \cdot x - 2.5) dx = \frac{4.006}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{(3.125)}{(7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(5)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(2.5)}{2 \cdot (7.65 \cdot 10^5)} + \frac{(4.006)}{(7.65 \cdot 10^5)} = 1.421 \cdot 10^{-5}$$

Resolviendo por matrices.

Para conocer la solución de las ecuaciones canónicas en función de (X1) como (X2), se aplica el teorema de matrices.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0$$

Al tener las mismas condiciones de Elasticidad (E) como Inercia (I) en todo el sistema, se simplifica la matriz.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 2.777 \cdot 10^{-5} & 1.421 \cdot 10^{-5} \\ 1.421 \cdot 10^{-5} & 9.408 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{EI} \begin{bmatrix} 3.798 \cdot 10^{-5} \\ 1.713 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ M_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.922 \text{ ton} \\ 1.084 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Cálculo del sistema real

Cálculo de reacciones del sistema real.

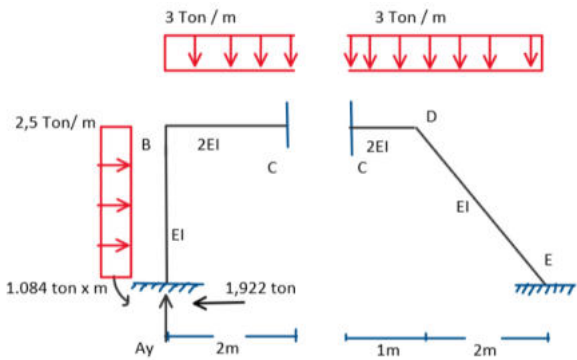


Figura.220. Estructura con reacciones obtenidas.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_y = 6 \text{ ton}$$

$$E_x = N_1 = 6.25 - 1.922 \text{ ton} = 4.328 \text{ ton}$$

$$E_y = 9 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$\frac{2.5 \cdot (2.5)^2}{2} + \frac{3 \cdot (2)^2}{2} + 1.084 - M_1 - A_y \cdot (2 \text{ m}) - A_x \cdot (2.5) = 0$$

$$M_1 = -1.9085 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_e = 0.771 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema real.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2.5 \text{ m}$

$$V_1 = 1.922 \text{ ton} - 2.5 \cdot (x)$$

$$M_1 = 1.922 \cdot (x) - \frac{2.5 \cdot (x)^2}{2} - 1.084$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = -3 (x)$$

$$M_3 = \frac{-3 \cdot (x)^2}{2} + 0.457 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_2 = 6 \text{ ton} - 3 \cdot (x)$$

$$M_2 = 6 \cdot (x) - \frac{3 \cdot (x)^2}{2} - 4.091 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{41}}{2} \text{ m}$

$$V_4 = 1.505 - 1.17 (x)$$

$$M_4 = 1.505 (x) - \frac{1.17 \cdot (x)^2}{2} - 0.409 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema real

Diagrama de cortante.

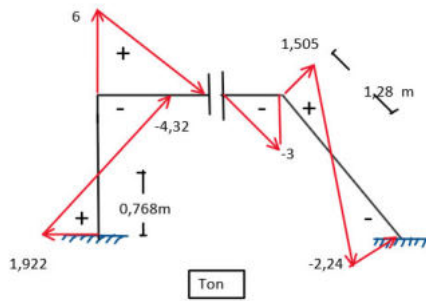


Diagrama de Momento Flector.

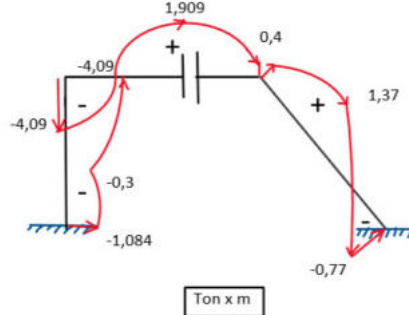


Figura.221. Diagrama de corte y momento sistema real.

Ejercicio 5.12.9

Dado el siguiente sistema de acero con el variable en sus elementos estructurales calcular:

- a) Los grados de indeterminación
- b) reacciones del sistema.
- c) Los diagramas de fuerza cortante y momento flector del sistema estructural.

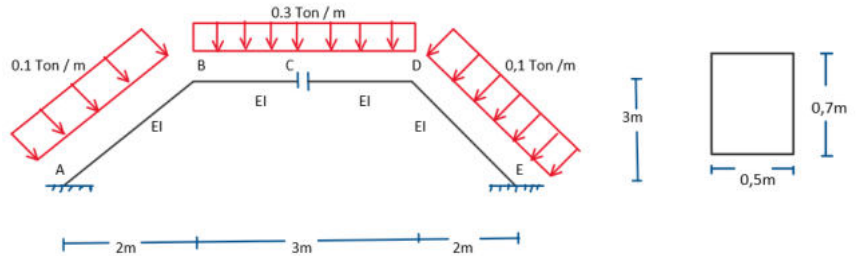


Figura.222 Idealización de estructura con biela interna y vigas inclinadas.

Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

Junta A = Junta E $R_{int} = 1 (n - 1) = 0$

Junta B $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

Biela C $R_{int} = 2 \cdot (n - 1) = 2$

Junta D $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3 n \quad GH = (6 + 8) - 3 \cdot (4) = 14 - 12 = 2$$

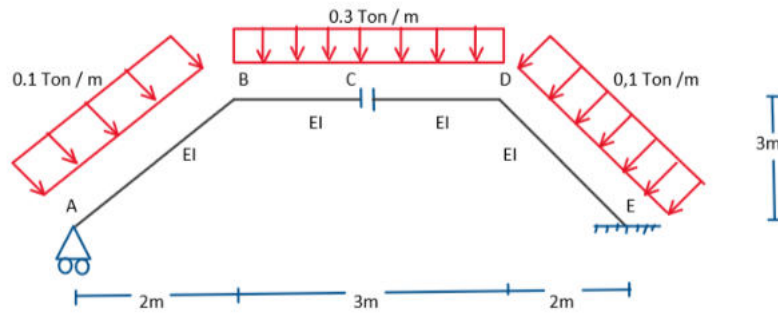
Hiperestático = 2



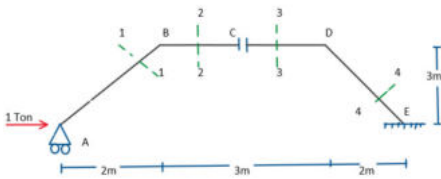


Sistemas estructurales estables:

Sistema Principal



Sistema Virtual (v1)



Sistema Virtual (v2)

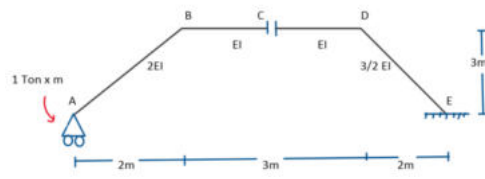
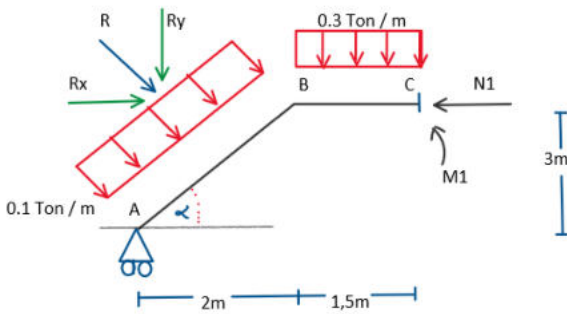


Figura.223. Sistemas estructurales estables posibles.

Cálculo del sistema principal

Cálculo de reacciones del sistema principal.



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31^\circ$$

Linealizando fuerza distribuida a posición vertical y horizontal:

$$R = 0.1 \frac{\text{ton}}{\text{m}} (\sqrt{13} \text{ m}) = \frac{\sqrt{13}}{10} \text{ ton}$$

$$R_y = R \cdot \cos(\alpha)$$

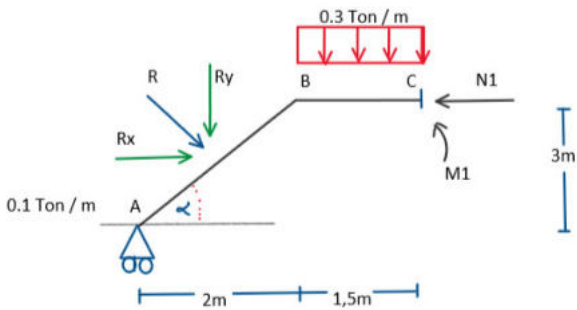
$$R_x = R \cdot \sin(\alpha)$$

$$R_y = 0.2 \text{ ton}$$

$$R_x = 0.3 \text{ ton}$$

Figura.224. Despiece, biela lado derecho.

Sistema equivalente (Lado izquierdo)



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_y = 0.3 \cdot (1.5 \text{ m}) + 0.2 \text{ ton}$$

$$N_1 = R_x = 0.3 \text{ ton}$$

$$A_y = 0.65 \text{ ton}$$

$$\sum M_i = 0$$

$$-A_y \cdot (3.5 \text{ m}) + R_y \cdot (2.5 \text{ m}) + R_x (1.5 \text{ m}) + \frac{0.3 (1.5 \text{ m})^2}{2} + M_1 = 0$$

$$M_1 = 0.9875 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Figura.225. Sistema estructural equivalente.





Sistema equivalente (Lado derecho)

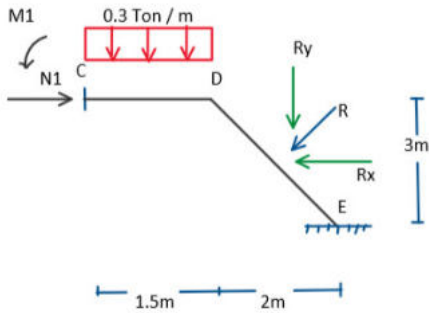


Figura.226. Despiece, biela lado izquierdo.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$E_y = 0.3 \cdot (1.5 \text{ m}) + 0.2 \text{ ton}$$

$$E_x = N_1 - R_x = 0 \text{ ton}$$

$$E_y = 0.65 \text{ ton}$$

$$\sum M_i = 0$$

$$M_1 - \frac{0.3 \cdot (1.5 \text{ m})^2}{2} - 0.2 \cdot (2.5 \text{ m}) - 0.3 (1.5 \text{ m}) - M_e + E_y \cdot (3.5 \text{ m}) - E_x \cdot (3) = 0$$

$$M_e = 0 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Isostatización de la estructura:

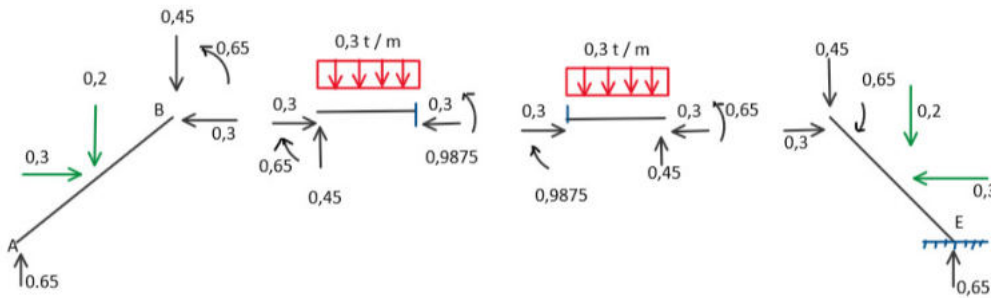


Figura.227. Isostatización de la estructura, sistema principal.

Linealizando reacción Ay perpendicular a la viga inclinada

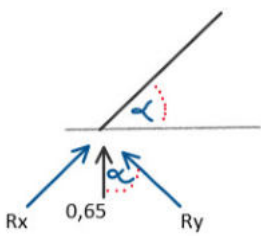


Figura.228. Linealización de reacción externa.

$$R_y = 0.65 \text{ ton} \cdot \cos(\alpha)$$

$$R_y = 0.36 \text{ ton}$$

$$R_x = 0.65 \sin(\alpha)$$

$$R_x = 0.54 \text{ ton}$$

Linealizando reacciones internas perpendicular a la viga.

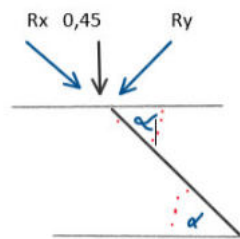


Figura.229. Linealización de fuerza interna.

$$R_y = 0.45 \text{ ton} \cdot \sin(\alpha)$$

$$R_y = 0.25 \text{ ton}$$

$$R_x = 0.45 \text{ ton} \cdot \cos(\alpha)$$

$$R_x = 0.16 \text{ ton}$$

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$

$$V_1 = 0.36 - 0.1 \cdot (x)$$

$$V_2 = 0.45 - 0.3 \cdot (x)$$

$$M_1 = 0.36 (x) - \frac{0.1 (x)^2}{2}$$

$$M_2 = 0.45 \cdot (x) - \frac{0.3 \cdot (x)^2}{2} + 0.647 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$

$$V_3 = -0.3 (x)$$

$$V_4 = -0.1 \cdot (x)$$

$$M_3 = -\frac{0.3 \cdot (x)^2}{2} + 0.9875 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_4 = -\frac{0.1 \cdot (x)^2}{2} + 0.65 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



Diagrama de Corte y Momento del Sistema principal

Diagrama de cortante.

Diagrama de Momento Flector.

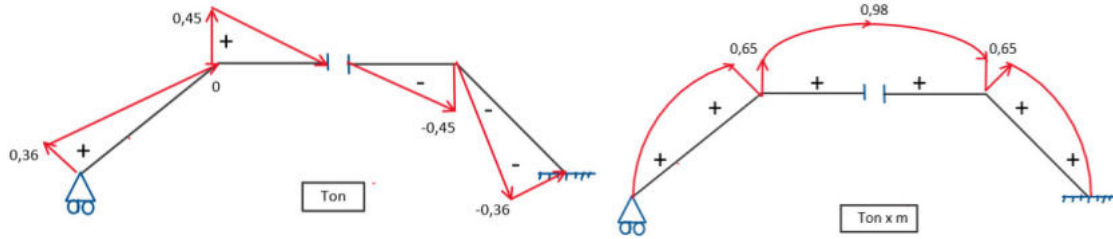


Figura.230. Diagrama de corte y momento del sistema principal.

Cálculo del sistema virtual (V1)

Cálculo de reacciones del sistema virtual (v1)

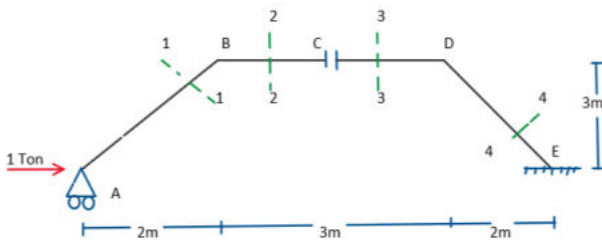


Figura.231. Sistema virtual 1, con cortes globales.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_y = E_y = 0 \text{ ton}$$

$$E_x = 1 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$M_e = 0 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual 1.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$

$$V_1 = -0.832 \text{ ton}$$

$$M_1 = -0.832 (x)$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$M_2 = -3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$

$$V_4 = 0 \text{ ton}$$

$$M_4 = -3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$

$$V_4 = 0.832 \text{ ton}$$

$$M_4 = 0.832 (x) - 3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema virtual v1

Diagrama de cortante.

Diagrama de Momento Flector.

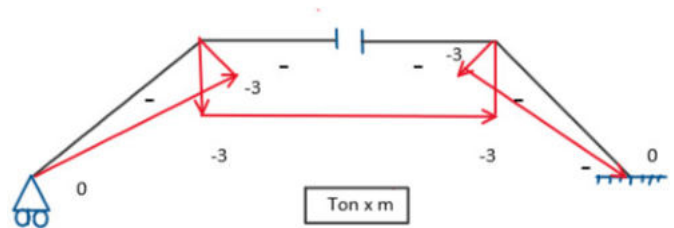
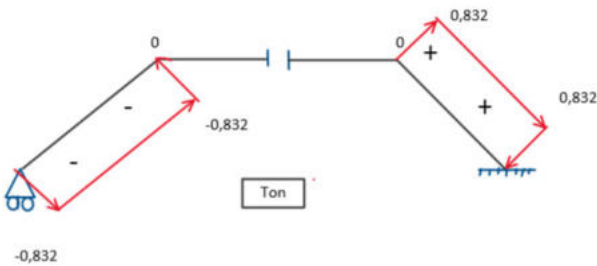


Figura.232. Diagrama de corte y momento del sistema virtual 1.





Cálculo del sistema virtual (V2)

Cálculo de reacciones del sistema virtual (v2)

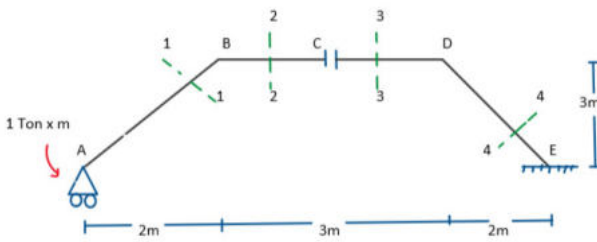


Figura.233. Sistema virtual 2, con cortes globales.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 & \sum F_x &= 0 \\ A_y = E_y &= 0 \text{ ton} & E_x &= 0 \text{ ton} \\ \sum M_1 &= 0 \\ M_e &= 1 \text{ ton} \cdot m \end{aligned}$$

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual 2.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$

$$V_1 = 0 \text{ ton}$$

$$M_1 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$M_2 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$

$$V_4 = 0 \text{ ton}$$

$$M_4 = -1 \text{ ton} \cdot m$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema virtual 2

Diagrama de cortante.

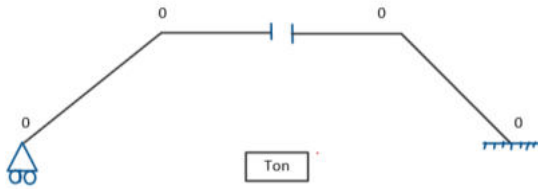


Diagrama de Momento Flector.

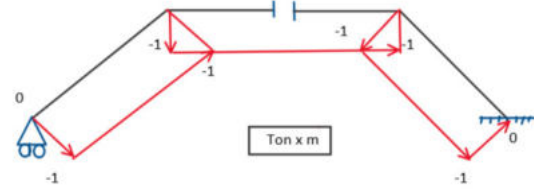


Figura.234. Diagrama de corte y momento del sistema virtual 2.

Cálculo de los desplazamientos $[\delta]$ y $[\Delta]$

Por tener dos fuerzas redundantes se generan dos ecuaciones canónicas.

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando propiedades de los materiales Elasticidad e Inercia de acuerdo a la sección transversal.

Módulo de elasticidad del acero:

$$E = 2.1 \cdot 10^6 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 2.1 \cdot 10^7 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$$

Inercia de la sección transversal para vigas y columnas.

$$\begin{aligned} I &= \frac{b \cdot h^3}{12} \\ I &= \frac{(0.5 \text{ m}) \cdot (0.7 \text{ m})^3}{12} = 0.01429 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Producto de la elasticidad por la inercia en toneladas x metro cuadrado

$$EI = 3.001 \cdot 10^5 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

Detalle (Sección transversal)

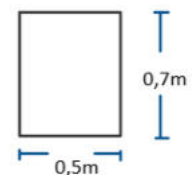


Figura.235. Sección transversal de vigas y columnas.

**Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{10}]$**

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13} m} \left(0.36 \cdot x - \frac{0.1 \cdot x^2}{2} \right) \cdot (-0.832 x) dx = \frac{(-2.922)}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} \left(0.45 x - \frac{0.3 \cdot x^2}{2} + 0.65 \right) \cdot (-3) dx = \frac{(-3.938)}{EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} \left(-\frac{0.3 \cdot x^2}{2} + 0.9875 \right) \cdot (-3) dx = \frac{(-3.938)}{EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13} m} \left(-\frac{0.1 \cdot x^2}{2} + 0.65 \right) \cdot (0.832 x - 3) dx = \frac{(-2.93)}{EI}$$

$$\Delta_{10} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6$$

$$\Delta_{10} = \frac{(-2.922)}{EI} + \frac{(-3.938)}{EI} + \frac{(-3.938)}{EI} + \frac{(-2.93)}{EI} = \frac{-13.713}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{20}]$

$$\Delta_{20} = \int_0^L \frac{M_2 \cdot M_0}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13} m} \left(0.36 \cdot x - \frac{0.1 \cdot x^2}{2} \right) \cdot (-1) dx = \frac{(-1.559)}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} \left(0.45 x - \frac{0.3 \cdot x^2}{2} + 0.65 \right) \cdot (-1) dx = \frac{(-1.313)}{EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} \left(-\frac{0.3 \cdot x^2}{2} + 0.9875 \right) \cdot (-1) dx = \frac{(-1.313)}{EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13} m} \left(-\frac{0.1 \cdot x^2}{2} + 0.65 \right) \cdot (-1) dx = \frac{(-1.562)}{EI}$$

$$\Delta_{20} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \frac{-5.742}{EI}$$



**Cálculo del desplazamiento [δ_{11}]**

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13}m} (-0.832x)^2 dx = \frac{(10.815)}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} (-3)^2 dx = \frac{(13.5)}{EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} (-3)^2 dx = \frac{(13.5)}{EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13}m} (0.832x - 3)^2 dx = \frac{(10.817)}{EI}$$

$$\delta_{11} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 = \frac{48.633}{EI}$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} dx$$

Cálculo del desplazamiento [δ_{22}]

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13}m} (-1)^2 dx = \frac{(3.606)}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} (-1)^2 dx = \frac{(1.5)}{EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} (-1)^2 dx = \frac{(1.5)}{EI}$$

$$U_4 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13}m} (-1)^2 dx = \frac{(3.606)}{EI}$$

$$\delta_{22} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \frac{10.211}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI} dx$$

Cálculo del desplazamiento [$\delta_{12} = \delta_{21}$]

$$U_1 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13}m} (-1) \cdot (-0.832x) dx = \frac{(5.408)}{EI}$$

$$U_2 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} (-1) \cdot (-3) dx = \frac{(4.5)}{EI}$$

$$U_3 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{1.5m} (-1) \cdot (-3) dx = \frac{(4.5)}{EI}$$

$$\delta_{12} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} dx$$





$$U_4 = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{\sqrt{13}m} (-1) \cdot (0.832x - 3) dx = \frac{(5.409)}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \frac{19.817}{EI}$$

Resolviendo por matrices el sistema de ecuaciones.

Para resolver el sistema de matrices, se simplifica el coeficiente elástico como la inercia para ambos miembros de la ecuación.

Aplicando la propiedad de matrices se procede a conocer los valores de las variables (X), cuyos valores representan las reacciones del sistema real, para este caso (Ax) y (Ma).

El signo positivo se considera al sentido asumido inicialmente correcto, y el signo negativo se considera a la fuerza redundante en sentido contrario opuesto.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0$$

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 48.633 & 19.817 \\ 19.817 & 10.211 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -13.713 \\ -5.742 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ M_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.252 \text{ ton} \\ 0.07 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Cálculo del sistema real

Cálculo de reacciones del sistema real.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_y = 0.3 \cdot (1.5 \text{ m}) + 0.2 \text{ ton} \quad N_1 = 0.552 \text{ ton}$$

$$A_y = 0.65 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-A_y \cdot (3.5 \text{ m}) - M_1 + \frac{0.3 \cdot (1.5 \text{ m})^2}{2} + R_y \cdot (2.5 \text{ m}) + R_x \cdot (1.5 \text{ m}) + 0.07 \text{ ton} \cdot \text{m} + 0.252 \cdot (3 \text{ m}) = 0$$

$$M_1 = -0.1615 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Discretización (lado izquierdo).

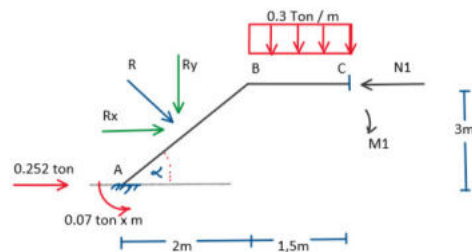


Figura.236. Despiece, biela lado izquierdo.

Discretización (lado derecho).

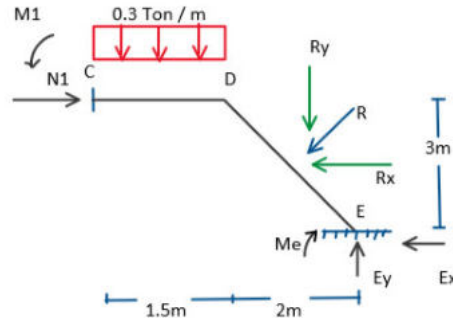


Figura.237. Despiece, biela lado derecho.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$E_y = 0.65 \text{ ton}$$

$$E_x = 0.252 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$M_e = 2.925 \text{ ton} \cdot \text{m}$$





Linealizando reacciones externas y fuerzas internas.

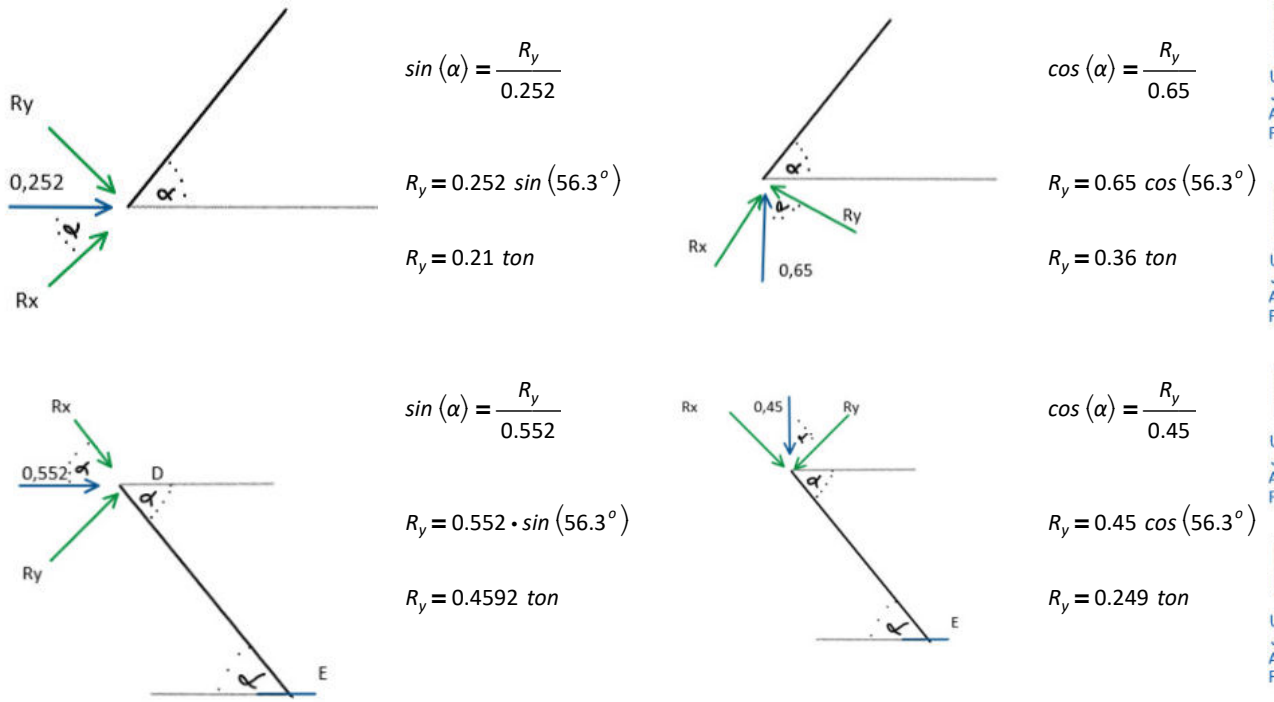


Figura.238. Linealizando reacciones externas e internas.

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema real.

<p>Corte 1-1 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$</p> <p>$V_1 = 0.1508 \text{ ton} - 0.1 \cdot (x)$</p> <p>$M_1 = 0.1508 \cdot x - \frac{0.1 \cdot x^2}{2} - 0.07 \text{ ton} \cdot \text{m}$</p>	<p>Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$</p> <p>$V_2 = 0.45 - 0.3 \cdot (x)$</p> <p>$M_2 = 0.45 \cdot (x) - \frac{0.3 \cdot (x)^2}{2} - 0.176 \text{ ton} \cdot \text{m}$</p>
<p>Corte 4-4 $0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$</p> <p>$V_4 = -0.3 \cdot (x)$</p> <p>$M_4 = -\frac{0.3 \cdot (x)^2}{2} + 0.1615 \text{ ton} \cdot \text{m}$</p>	<p>Corte 5-5 $0 \leq x \leq \sqrt{13} \text{ m}$</p> <p>$V_5 = 0.2096 - 0.1 (x)$</p> <p>$M_5 = 0.2096 (x) - \frac{0.1 \cdot (x)^2}{2} - 0.176 \text{ ton} \cdot \text{m}$</p>

Diagrama de Corte y Momento del Sistema real.

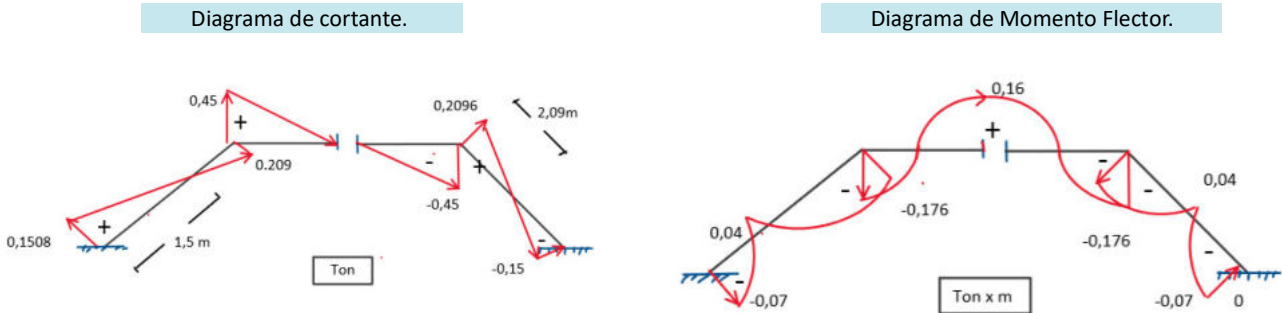
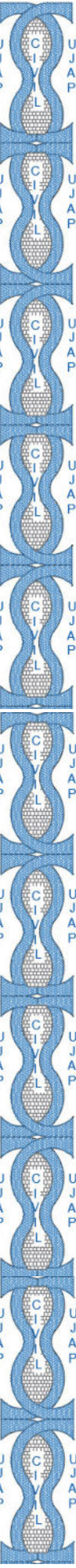


Figura.239. Diagrama de corte y momento del sistema real.





Ejercicio 5.12.10

Dado el siguiente sistema de acero con EI variable en sus elementos estructurales calcular:

- a) Los grados de indeterminación
- b) reacciones del sistema.
- c) Los diagramas de fuerza cortante y momento flector del sistema estructural.

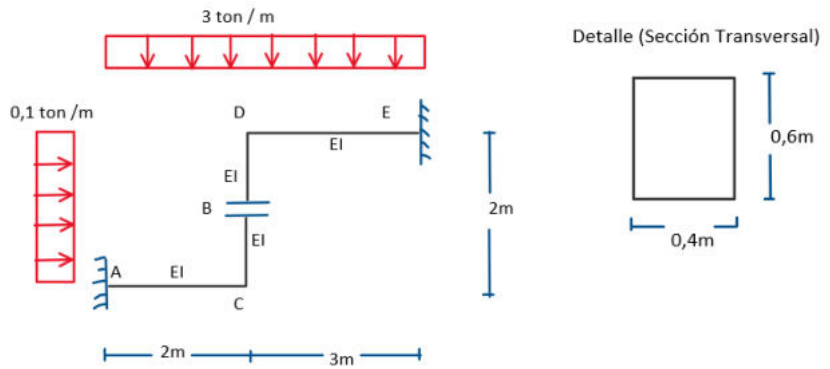


Figura.240 Idealización de estructura con biela interna y externa con vigas rectangulares.

Cálculo del grado de indeterminación del sistema total.

$$GH = (R_{ext} + R_{int}) - 3n$$

Junta A = Junta E $R_{int} = 1(n - 1) = 0$

Biela B $R_{int} = 2 \cdot (2 - 1) = 2$

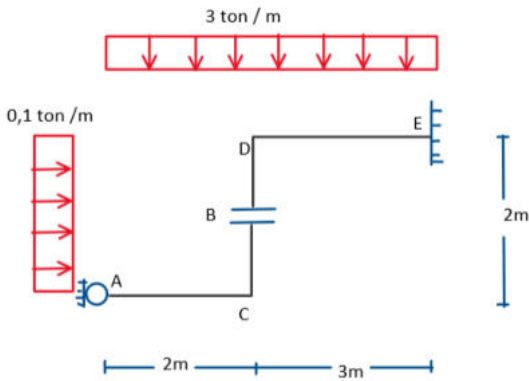
Junta C $R_{int} = 3 \cdot (n - 1) = 3$

Junta D $R_{int} = 3 \cdot (2 - 1) = 3$

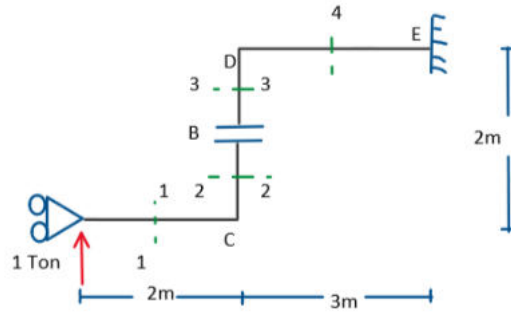
$$GH = (6 + 8) - 3 \cdot (4) = 13 - 12 = 2 \quad \text{Hiperestático} = 2$$

Sistemas estructurales estables:

Sistema Principal



Sistema Virtual (V1)



Sistema Virtual (V2)

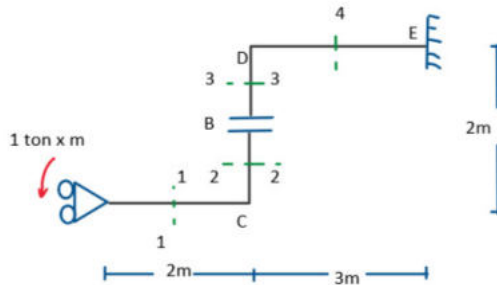


Figura.241. Sistemas estructurales estables posibles.





Cálculo del sistema principal.

Cálculo de reacciones del sistema principal.

Discretización (Lado derecho).

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$N_1 = 6 \text{ ton} \quad A_x = 0.1 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad A_y = 15 \text{ ton}$$

$$M_1 + \frac{3 \cdot (2 \text{ m})^2}{2} + \frac{0.1 \cdot (1 \text{ m})^2}{2} - A_x \cdot (1 \text{ m}) = 0$$

$$M_1 = -5.95 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

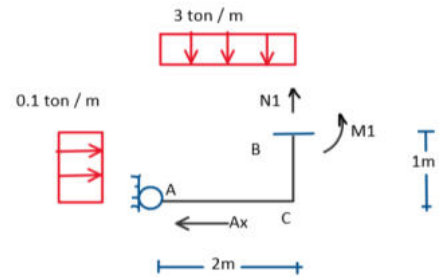


Figura.242. Despiece, biela interna hacia abajo.

Discretización (Lado izquierdo).

$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 15 \text{ ton} \quad E_x = 0.1 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$E_y \cdot (3 \text{ m}) + M_1 + E_x \cdot (1 \text{ m}) - \frac{3 \cdot (3 \text{ m})^2}{2} - \frac{0.1 \cdot (1)^2}{2} - M_e = 0$$

$$M_e = 37.5 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

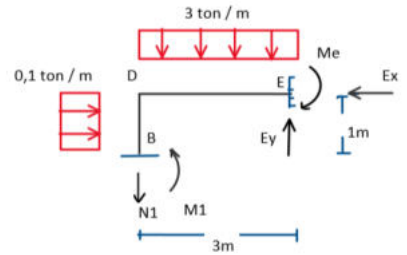


Figura.243. Despiece, biela interna hacia arriba.

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema principal.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_1 = -3 \cdot (x)$$

$$M_1 = -\frac{3 \cdot (x)^2}{2}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_2 = 0.1 - 0.1 \cdot (x)$$

$$M_2 = 0.1 \cdot (x) - \frac{0.1 \cdot (x)^2}{2} - 6 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = -0.1 \cdot (x)$$

$$M_3 = -\frac{0.1 \cdot (x)^2}{2} - 5.95 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$V_4 = -6 \text{ ton} - 3 \cdot (x)$$

$$M_4 = -6 (x) - \frac{3 \cdot (x)^2}{2} - 6 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema principal.

Diagrama de cortante.

Diagrama de Momento Flector.

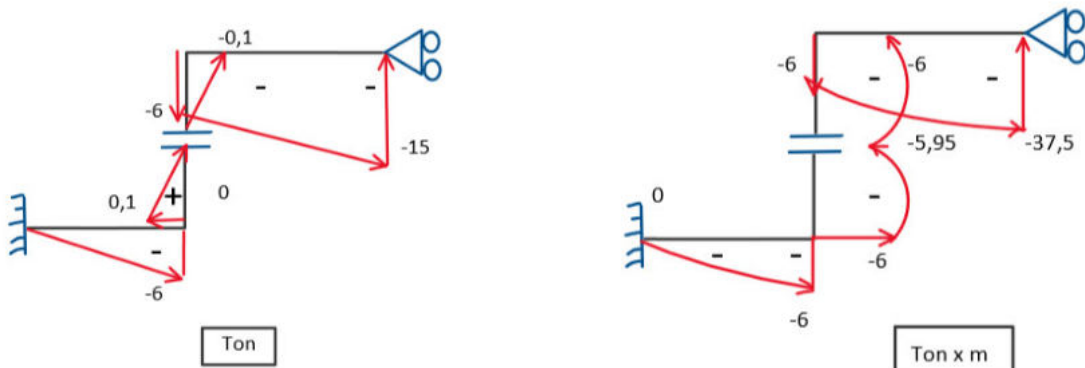


Figura.244. Diagrama de corte y momento sistema principal.



Cálculo del sistema virtual (V1).

Cálculo de reacciones del sistema virtual (v1).

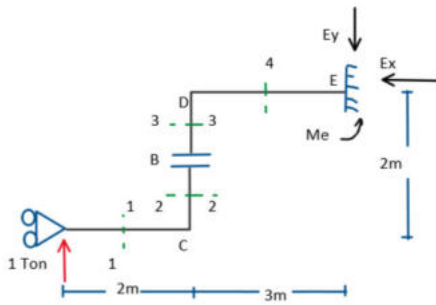


Figura.245 Sistema virtual 1, con cortes globales.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$E_y = 1 \text{ ton}$$

$$A_x = E_x = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_a = 0$$

$$M_e = 5 \text{ ton} \cdot m$$

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual (V1).

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_1 = 1 \text{ ton}$$

$$M_1 = 1 (x)$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$M_2 = 2 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = 2 \text{ ton} \cdot m$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$V_4 = 1 \text{ ton}$$

$$M_4 = 1 (x) + 2 \text{ ton} \cdot m$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema virtual v1.

Diagrama de cortante.

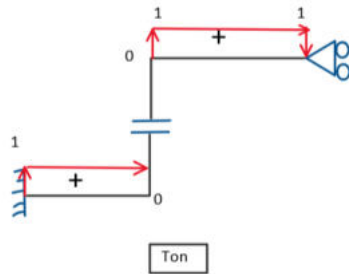


Diagrama de Momento Flector.

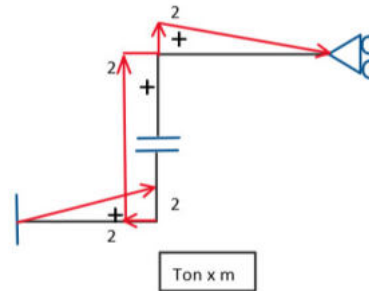


Figura.246 Diagrama de corte y momento sistema virtual 1

Cálculo del sistema virtual (V2).

Cálculo de reacciones del sistema virtual (v2).

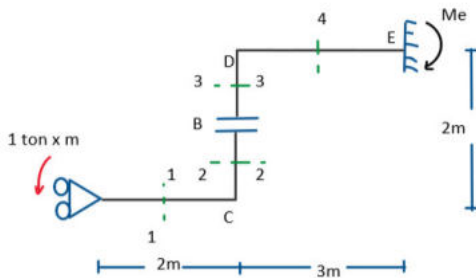


Figura.247 Sistema virtual 2, con cortes globales.

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$E_y = 0 \text{ ton}$$

$$A_x = E_x = 0 \text{ ton}$$

$$\sum M_a = 0$$

$$M_e = 1 \text{ ton} \cdot m$$





Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema virtual (V2).

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_1 = 0 \text{ ton}$$

$$M_1 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_2 = 0 \text{ ton}$$

$$M_2 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = 0 \text{ ton}$$

$$M_3 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$V_4 = 0 \text{ ton}$$

$$M_4 = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema virtual v2.

Diagrama de cortante.

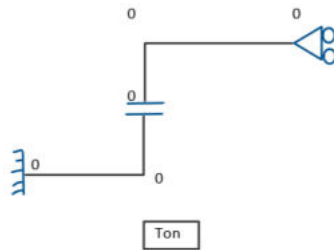


Diagrama de Momento Flector.

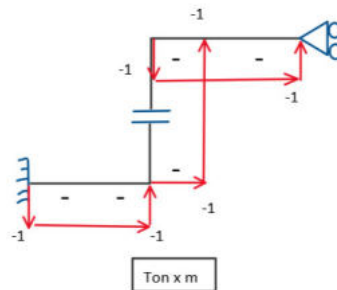


Figura.248 Diagrama de corte y momento sistema virtual 2

Cálculo de los desplazamientos $[\delta]$ y $[\Delta]$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0$$

Aplicando propiedades de los materiales Elasticidad e Inercia de acuerdo a la sección transversal

Módulo de elasticidad del acero:

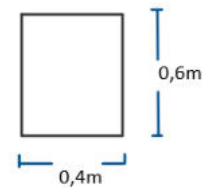
$$E = 2.1 \cdot 10^6 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 2.1 \cdot 10^7 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$$

Inercia de la sección transversal para vigas y columnas.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I = \frac{(0.4 \text{ m}) \cdot (0.6 \text{ m})^3}{12} = 7.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Detalle (Sección Transversal)



Producto de la elasticidad por la inercia en toneladas x metro cuadrado

$$EI = 1.512 \cdot 10^5 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

Figura.249 Sección transversal de vigas y columnas.

Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{10}]$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dx$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_{0 \text{ m}}^{2 \text{ m}} (x) \cdot \left(-\frac{3 \cdot x^2}{2} \right) dx + \int_0^{1 \text{ m}} (2) \cdot \left(0.1x - 0.1 \frac{x^2}{2} - 6 \right) dx + \int_0^{1 \text{ m}} (2) \cdot \left(-0.1 \frac{x^2}{2} - 5.95 \right) dx + \int_0^{3 \text{ m}} (x+2) \cdot \left(-6x - 3 \frac{x^2}{2} - 6 \right) dx = \frac{-258.242}{EI}$$





Cálculo del desplazamiento $[\Delta_{20}]$

$$\Delta_{20} = \int_0^L \frac{M_2 \cdot M_0}{EI} dx$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{2m} (-1) \cdot \left(-\frac{3 \cdot x^2}{2} \right) dx + \int_0^{1m} (-1) \cdot \left(0.1x - 0.1 \frac{x^2}{2} - 6 \right) dx + \int_0^{1m} (-1) \cdot \left(-0.1 \frac{x^2}{2} - 5.95 \right) dx + \int_0^{3m} (-1) \cdot \left(-6x - 3 \frac{x^2}{2} - 6 \right) dx = \frac{74.433}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{11}]$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{2m} (x)^2 dx + \int_0^{1m} (2)^2 dx + \int_0^{1m} (2)^2 dx + \int_0^{3m} (x+2)^2 dx = \frac{49.667}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{22}]$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{2m} (-1)^2 dx + \int_0^{1m} (-1)^2 dx + \int_0^{1m} (-1)^2 dx + \int_0^{3m} (-1)^2 dx = \frac{7}{EI}$$

Cálculo del desplazamiento $[\delta_{12} = \delta_{21}]$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \int_{0m}^{2m} (x) \cdot (-1) dx + \int_0^{1m} (2) \cdot (-1) dx + \int_0^{1m} (2) \cdot (-1) dx + \int_0^{3m} (x+2) \cdot (-1) dx = \frac{-16.5}{EI}$$

Resolviendo por matrices el sistema de ecuaciones.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0$$

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{bmatrix}$$

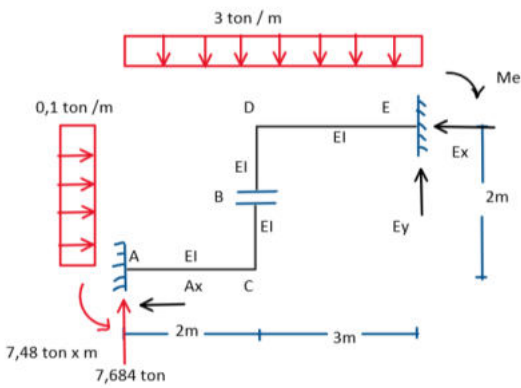
$$\begin{bmatrix} 49.667 & -16.5 \\ -16.5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -258.242 \\ 74.433 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y \\ M_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.684 \text{ ton} \\ 7.48 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$





Cálculo de reacciones del sistema real.



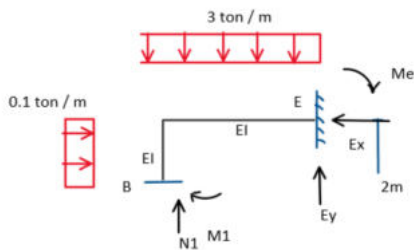
$$\sum F_y = 0 \qquad \sum F_x = 0$$

$$N_1 = 7.684 - 3 \cdot (2) = 1.684 \qquad A_x = 0.1 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-M_1 + 3 \cdot \frac{(2)^2}{2} + 0.1 \cdot \frac{(1)^2}{2} - 0.1 \cdot (1) - 7.684 \cdot (2 \text{ m}) + 7.48 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_1 = -1.938 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



$$\sum F_y = 0 \qquad \sum F_x = 0$$

$$E_y = 7.316 \text{ ton} \qquad E_x = 0.1 \text{ ton}$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$-0.1 \cdot (2 \text{ m}) - E_y \cdot (5 \text{ m}) + 7.48 + 0.1 \cdot \frac{2^2}{2} + 3 \cdot \frac{(5)^2}{2} - M_e = 0$$

$$M_e = 6.56 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Figura.250 Sistema real con reacciones obtenidas.

Cálculo de ecuaciones cortante y momento, sistema real.

Corte 1-1 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$V_1 = 7.684 \text{ ton} - 3 \cdot (x)$$

$$M_1 = 7.684 x - \frac{3 \cdot x^2}{2} - 7.48 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 3-3 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_3 = -0.1 \cdot (x)$$

$$M_3 = -\frac{0.1 \cdot x^2}{2} + 1.938 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 2-2 $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

$$V_2 = 0.1 - 0.1 \cdot (x)$$

$$M_2 = 0.1 \cdot (x) - \frac{0.1 \cdot (x)^2}{2} + 1.888 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Corte 4-4 $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$V_4 = 1.684 - 3 (x)$$

$$M_4 = 1.684 \cdot (x) - \frac{3 \cdot x^2}{2} + 1.888 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagrama de Corte y Momento del Sistema real.

Diagrama de cortante.

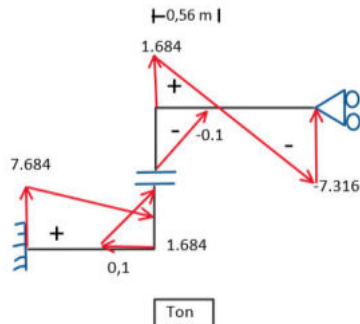


Diagrama de Momento Flector.

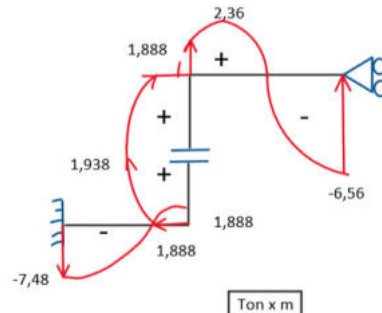


Figura.251 diagramas de corte y momento del sistema real.



6.1 Método de rotaciones.

Este método también es conocido como el método de pendiente - deflexión o pendiente - desviación, es un procedimiento para analizar vigas indeterminados y marcos, se conoce como método de los desplazamientos, ya que las ecuaciones de equilibrio expresados en el análisis se expresan en función de los desplazamientos desconocidos en los nodos.

La ecuación de pendiente - deflexión se utiliza para relacionar el momento en cada extremo de un miembro con los desplazamientos de sus extremos y con las cargas aplicadas a los miembros entre los mismos.

Los desplazamientos de los nodos incluyen tanto rotación como traslación perpendicular con respecto al eje axial del elemento. Aunque se supone que no actúa carga axial se puede decir que de 10 a 15 % de la carga de pandeo del miembro, no invalidará el método. Sin embargo una fuerza de compresión importante reducirá la rigidez flexionante del miembro generando deflexiones adicionales por el efecto P- Delta.

6.2 Ecuación general del método de rotaciones.

Las ecuaciones de equilibrio empleadas se expresan en función a los desplazamientos desconocidos de los nodos o juntas.

M_ij = (2 * EI / L_ij) * (2 * theta_i + theta_j - 3 * phi_ij) + M_emp,ij ; M_ji = (2 * EI / L_ij) * (theta_i + 2 * theta_j - 3 * phi_ij) + M_emp,ji

Figura.252 Ecuaciones generales para rotaciones.

Donde:

La expresión I / L_ij incluye la geometría del elemento y se le conoce como rigidez flexionante relativa, en ocasiones llamado K.

Las expresiones M_emp,ij y M_emp,ji, son los elementos en los extremos del elemento bajo las acciones aplicadas o sollicitaciones, bajo las acciones aplicadas, asumiendo que el elemento se encuentra doblemente empotrado.

Las expresiones theta_i y theta_j, son las incógnitas de las ecuaciones conocidas como rotaciones en los extremos.

La expresión phi, es la rotación como cuerpo rígido.

6.3 Convención de signos.

Los momentos M_ij y M_ji desconocidos, son positivos y giran en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido anti horario).

Para las rotaciones en los extremos theta_i y theta_j, serán positivos en sentido anti horario.

Para determinar el signo de la rotación como cuerpo rígido phi_ij, sea positivo o negativo se debe dibujar una línea horizontal en cualquiera de los extremos del elemento. Si la línea horizontal debe hacerse girar en el sentido contrario de las manecillas del reloj a través de un ángulo agudo (entre 0º y 90º para hacer que coincida con la cuerda, así, el ángulo de giro como cuerpo rígido es positivo.

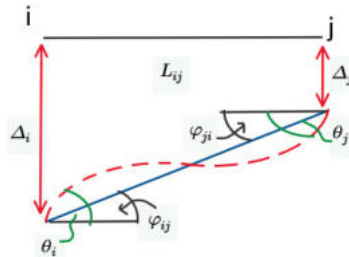


Figura.253 Rotación de una barra con rotaciones en los extremos y giro como cuerpo rígido.

6.4 Proceso para realizar el cálculo de rotaciones al tener phi_ij = 0

- 1. Plantear la estructura simplificada.
2. Identificar los grados de libertad existentes. Para este caso solo se generan rotaciones desconocidas theta.
3. Calcular los momentos de empotramiento de cada barra.
4. Plantear las ecuaciones del método de cada elemento. Cada momento desconocido se asumirá anti horario positivo sobre la barra.
5. Planteamiento del sistema de ecuaciones. Mediante el planteamiento de equilibrio en las diferentes juntas, incluyendo las juntas articuladas y exceptuando las juntas empotradas. En las juntas el momento desconocido, debe tener signo contrario al asumido, en la barra los momentos conocidos se colocarán con su signo real.
6. Establecer el número de variables y el número de ecuaciones disponibles.
7. Resolver el sistema de ecuaciones y obtener otras reacciones así como diagramas de corte y momento a través de la estática o trabajo virtual.





6.5 Proceso para realizar el cálculo de rotaciones al tener $\varphi_{ij} \neq 0$

1. Plantear la estructura simplificada.
2. Identificar los grados de libertad existentes. Para este caso tendremos rotaciones y desplazamientos desconocidos.
3. Calcular los momentos de empotramiento de cada barra incluyendo los generados por asentamientos.
4. Plantear los giros como cuerpo rígido de todos los elementos en función al (a los) grado (s) de desplazabilidad.
5. Plantear ecuaciones del método para cada elemento. Cada momento desconocido se asumirá positivo (anti horario) sobre la barra.
6. Planteamiento del sistema de ecuaciones, mediante el planteamiento de equilibrio en las diferentes juntas, incluyendo las juntas articuladas y exceptuando las juntas empotradas. En las juntas el momento desconocido debe tener signo contrario al asumido en la barra, los momentos conocidos se colocarán con su signo real.
7. Establecer el número de variables y el número de ecuaciones disponibles.
8. Realizar equilibrio interno de las barras, para encontrar el corte en cada una.
9. Seleccionar una barra común y realizar equilibrio de fuerzas en ella para obtener una ecuación de equilibrio de cortantes.
10. Repetir los pasos 8 y 9 hasta lograr un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas que de ecuaciones.
11. Resolver el sistema de ecuaciones y obtener otras reacciones así como diagramas de corte y momento a través de la estática.

6.6 Ejercicios.

Ejercicio 6.6.1

Dada el siguiente sistema estructural de sección (EI) constante calcular:

- a) Los grados de indeterminación
- b) reacciones del sistema.
- b) Los diagramas de fuerza cortante y momento flector
- c) Utilizar el método de las fuerzas.

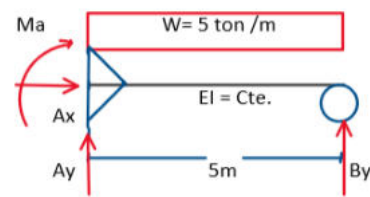


Figura.254 Sistema de viga hiperestática.

Solución:

Al evaluar los grados de libertad de la viga, se tiene 3 por cada junta, 3 en la Junta A y 3 en la Junta B, por ser empotramiento en A, los 3 grados de libertad se anulan o se encuentran restringidos. De igual forma el grado de libertad vertical en B se anula por su restricción.

La deformación para la rotación en 4, genera la deformación de la junta, así, se tiene la barra con el giro en sentido anti-horario.

El desplazamiento en 6 no se puede generar, debido a la condición de axialmente infinito, por tanto, el grado de libertad será la rotación en 4.

Deformada por ϑ_b

Grados de Libertad

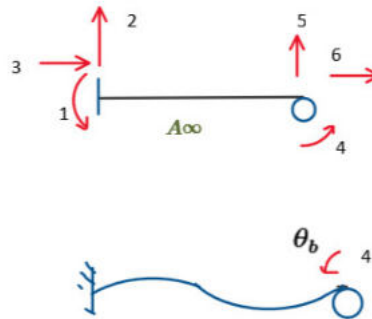


Figura.255 Deformación por rotación en B.

Momentos de Empotramiento

Barra A-B

Los momentos de empotramiento relacionan las sollicitaciones externas, como asentamiento, temperatura, cargas puntuales, distribuidas, triangulares, trapezoidales y curvas, para cada caso de carga, se puede utilizar las tablas de momentos de empotramientos, identificado al inicio de este manual.

$$M_{EM.ab} = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{(5) \cdot (5)^2}{12} = 10.42 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.ba} = \frac{q \cdot L^2}{12} = -10.42 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

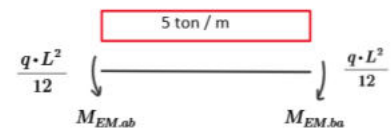


Figura.256 Momento de empotramiento AB.



Ecuaciones generales de Momentos:

Las ecuaciones de momentos generales permite conocer el valor de los momentos en los extremos para el sistema estructural. Para el caso del ejemplo solo se genera la rotación en (B).

$$M_{AB} = \frac{EI}{5 m} \cdot (4 \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = \frac{EI}{5 m} (2 \cdot \vartheta_B) + 10 \cdot 42 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BA} = \frac{EI}{5 m} \cdot (2 \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = \frac{EI}{5 m} \cdot (4 \cdot \vartheta_B) - 10.42 \text{ ton} \cdot m$$

Equilibrio en las juntas:

Junta B

Se realiza el análisis de las juntas, para obtener el sistema de ecuaciones, en función de los momentos en los extremos.

$$F_{q1} = -M_{BA} = 0$$

Para el ejemplo, la rotación en A (ϑ_A) es cero, y no posee giro como cuerpo rígido.

$$-\left(\frac{EI}{5 m} \cdot (4 \cdot \vartheta_B) - 10.42 \text{ ton} \cdot m\right) = 0$$

$$\vartheta_B = \frac{13.025}{EI} \text{ ton} \cdot m^2$$



Figura.257. Equilibrio en la Junta B.

Remplazando los valores de rotación:

Los valores obtenidos de las rotaciones (ϑ) de las ecuaciones, se remplazan en las ecuaciones de momentos en los extremos para cada barra.

$$M_{AB} = \frac{EI}{5 m} (2 \cdot \vartheta_B) + 10 \cdot 42 \text{ ton} \cdot m = 15.63 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BA} = \frac{EI}{5 m} \cdot (4 \cdot \vartheta_B) - 10.42 \text{ ton} \cdot m = 0 \text{ ton} \cdot m$$

Cálculo de reacciones por estática.

Finalmente, al obtener los valores de los momentos en los extremos, se puede aplicar la estática, aplicando momento en base a los cortantes y momentos calculados.

$$\sum M_o = 0$$

$$15.63 \text{ ton} \cdot m + B_y \cdot (5 m) - \frac{5 \cdot (5 m)^2}{2} = 0$$

$$B_y = 9.374 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 5 \frac{\text{ton}}{m} \cdot (5 m) = 0$$

$$A_y = 15.626 \text{ ton}$$

Diagramas de cortante y momento flector.

Diagrama de fuerza cortante

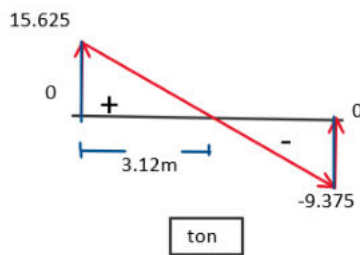


Diagrama de momento flector.

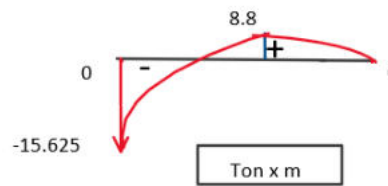


Figura.258 Diagrama de corte y momento.





Ejercicio 6.6.2

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilizando el método de rotaciones.

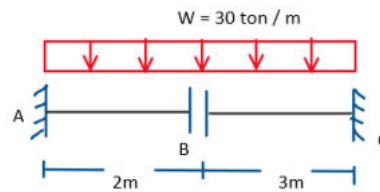


Figura.259 Idealización estructural con biela interna.

Solución:

Para resolver por el método de rotaciones, la biela interna o empotramiento móvil, va a generar dos desplazamientos independientes, en la sección izquierda como derecha. Partiendo de ello, se debe realizar correctamente la deformada, de ello, dependerá el giro como cuerpo rígido (φ). Se debe recordar que el sentido para rotaciones será positivo anti -horario y negativo en sentido horario.

Grados de libertad

Los grados de libertad, se generan en las juntas de la barra, al tener restricción de empotramiento, los grados de libertad se anulan, para este vínculo. Para el ejemplo, se genera una rotación en B, como desplazamiento en la biela izquierda ($Y_{b.izq}$) y un desplazamiento en la biela derecha ($Y_{b.der}$).

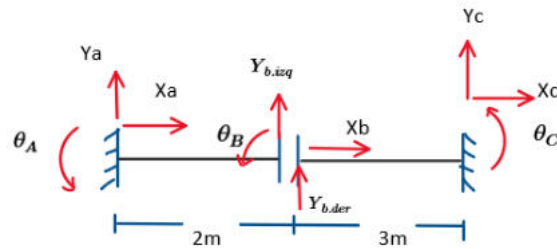


Figura.260 Posibles grados de libertad.

Deformadas según su grado de libertad.

Rotación ϑ_b

La condición de biela interna o empotramiento móvil interno, será la abertura que posee, debe mantenerla en todo momento, así, al realizar un giro, en B, la abertura rota.

$$\vartheta_A = \vartheta_C = 0$$

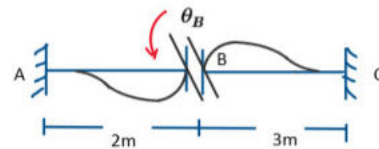


Figura.261 Deformada por rotación ϑ_b

Desplazamiento $Y_{B.izq}$

La condición del desplazamiento en una biela, se considera independiente la una de la otra, pero está condicionada, lo que significa que vamos a generar un grado de libertad $Y_{b.izq}$ y un giro como cuerpo rígido positivo (φ).

$$\varphi_{ab} = \frac{Y_{b.izq}}{L_{ab}}$$

$$\varphi_{ab} = \frac{Y_{b.izq}}{2\text{ m}}$$

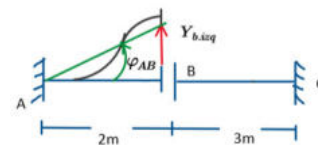


Figura.262 Deformada por desplazamiento vertical.

Desplazamiento $Y_{B.der}$

Para el desplazamiento en la sección B-C, el empotramiento móvil interno, genera el desplazamiento vertical y un giro como cuerpo rígido (φ_{BC}).

$$\varphi_{bc} = \frac{-Y_{b.der}}{L_{bc}}$$

$$\varphi_{bc} = \frac{-Y_{b.der}}{3\text{ m}}$$

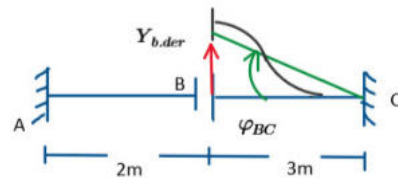


Figura.263 Deformada por desplazamiento vertical.

Momentos de empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, asentamientos y temperatura, la suma de todos ellos, será el resultado de los momentos de empotramiento.

$$M_{EM.ab} = \frac{q \cdot L_{ab}^2}{12} = 10\text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.ba} = \frac{-q \cdot L_{ab}^2}{12} = -10\text{ ton} \cdot \text{m}$$

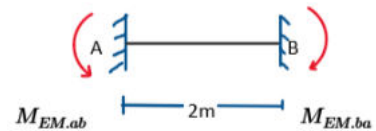


Figura.264 Momento de empotramiento A-B.





Barra B-C

Para conocer el momento de empotramiento de una biela, se debe realizar la separación de la barra, y considerarlo como empotramiento en ambas secciones de la barra.

$$M_{EM.bc} = \frac{q \cdot L_{bc}^2}{12} = 22.5 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.cb} = \frac{-q \cdot L_{bc}^2}{12} = -22.5 \text{ ton} \cdot m$$

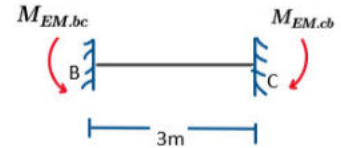


Figura.265 Momento de empotramiento B-C.

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Los momentos generales serán las rotaciones existentes, como los giros como cuerpo rígido en las barras, en el ejemplo, $\vartheta_a = \vartheta_c = 0$.

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

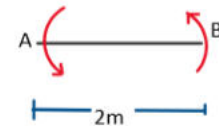


Figura.266 Momento en los extremos A-B.

Barra B-C

Se debe considerar todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$

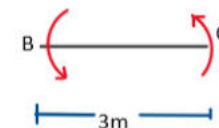


Figura.267 Momento en los extremos B-C.

Equilibrio en las juntas.

Biela B

Se debe establecer el equilibrio en las juntas para generar las ecuaciones de compatibilidad, de igual forma, se debe evaluar el momento, en los vínculos que no presenten restricción, como el caso de vínculos de 1era especie y 2da especie.

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

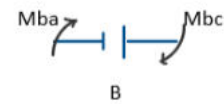


Figura.268 Biela interna B.

Trabajo Virtual.

Para desplazamiento $Y_{b,izq}$

El trabajo virtual, se genera cuando no se obtiene más ecuaciones por juntas. Para realizar trabajo virtual, se considera la suma del producto de las barras, que generan giro como cuerpo rígido, por el momento en los extremos, para todo el sistema. Adicional, se debe trasladar el momento generado por las cargas externas, para el ejemplo, la fuerza distribuida en la sección (A-B) y multiplicar por el giro como cuerpo rígido del tramo.

$$p = 30 \frac{\text{ton}}{m} \cdot 2 \text{ m} = 60 \text{ ton}$$

$$M_p = p \cdot \frac{L_{ab}}{2} = 60 \text{ ton} \cdot m$$

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} \cdot (-M_p)}{Y_{b,izq}} = 0$$

Se debe sacar factor común siempre en trabajo virtual del cuerpo rígido $[\varphi]$ para que el resultado no genere una expresión cuadrática.

$$Ecu.2 = \frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} \cdot (-M_p)}{Y_{b,izq}} = 0$$

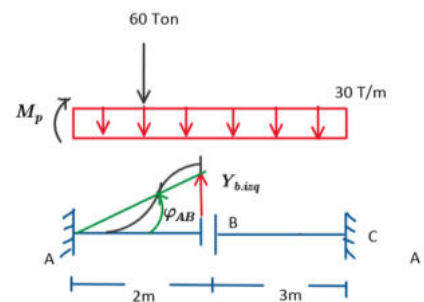


Figura.269 Traslación de momento M_p .



Para desplazamiento $Y_{b.der}$.

De igual forma, se aplica trabajo virtual para el siguiente desplazamiento $Y_{b.der}$, considerando el sentido negativo, y trasladando el momento (r) a su extremo.

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{-\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) - \varphi_{BC} \cdot (M_r)}{Y_{b.der}} = 0$$

El factor común se debe considerar en trabajo virtual, para el cuerpo rígido $[\varphi]$, con el fin, de que el resultado no genere una expresión cuadrática.

$$Ecu.3 = \frac{-\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) - \varphi_{BC} \cdot (M_r)}{Y_{b.der}} = 0$$

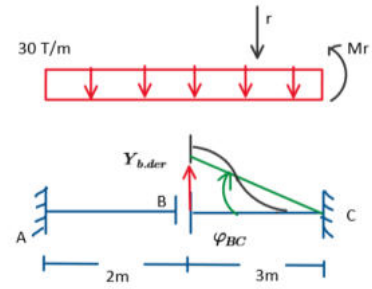


Figura.270 Traslación de momento Mr.

$$r = 30 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} = 90 \text{ ton} \quad M_r = r \cdot \frac{L_{bc}}{2} = 135 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Ecuaciones:

Una vez identificado el sistema de ecuaciones, se puede resolver, por cualquier método, como matrices, sistema de ecuaciones, o utilizando un software que facilite la obtención de las incógnitas.

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

$$Ecu.2 = \frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} \cdot (-M_p)}{Y_{b.izq}} = 0$$

$$Ecu.3 = \frac{-\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) - \varphi_{BC} \cdot (M_r)}{Y_{b.der}} = 0$$

incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_B \\ \varphi_{b.izq} \\ \varphi_{b.der} \end{bmatrix}$$

Incógnitas en función de EI.

Al resolver el sistema de ecuaciones, el resultado de las incógnitas que dará en función de el producto de Elasticidad e Inercia (EI) será:

$$\vartheta_b = \frac{30}{EI} \quad Y_{b.izq} = \frac{10}{EI} \quad Y_{b.der} = \frac{-585}{4 \cdot EI}$$

Cálculo de los momentos en los extremos.

Barra A-B

Para conocer el valor de los momentos en los extremos, se reemplaza los valores de las incógnitas y se simplifica el valor de (EI), el signo señala si es en el sentido correcto o en sentido contrario.

$$M_{ab} = \frac{EI}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{30}{EI} - 3 \cdot \left(\frac{10}{EI} \right) \right) + 10 \text{ ton} \cdot \text{m} = 25 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{2} \cdot \left(4 \cdot \frac{30}{EI} - 3 \cdot \left(\frac{10}{EI} \right) \right) - 10 \text{ ton} \cdot \text{m} = 35 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra B-C

De igual forma, se reemplaza los valores de las incógnitas en la ecuación de la barra B-C, se obtiene los valores de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{3} \cdot \left(4 \cdot \frac{30}{EI} + 2 \cdot \frac{-585}{4 \cdot EI} \right) + 22.5 \text{ ton} \cdot \text{m} = -35 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{30}{EI} + 2 \cdot \frac{-585}{4 \cdot EI} \right) - 22.5 \text{ ton} \cdot \text{m} = -100 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Diagramas de corte y momento.

Para conocer el diagrama de corte y momento se puede aplicar momento en los extremos, obteniendo el valor de los cortantes, así, se aplica la estática para verificar los valores.

Diagrama de Cortante

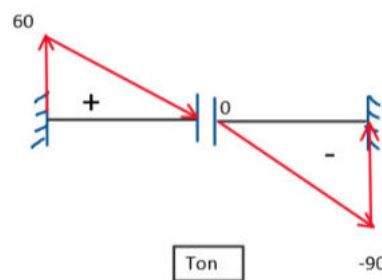


Diagrama de Momento.

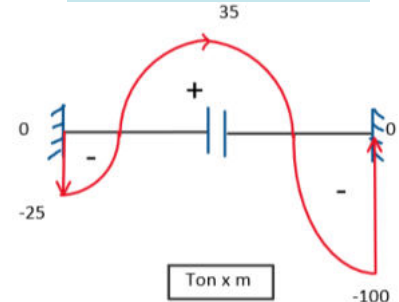


Figura.271 Diagrama de corte y momento.



Ejercicio 6.6.3

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilizando el método de rotaciones.

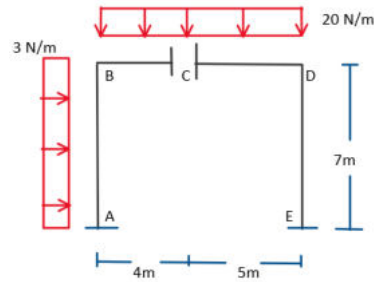


Figura.272 Idealización pórtico con empotramiento móvil interno.

Grados de libertad

Para el ejemplo, se tiene 6 grados de libertad, recordemos que se cancelan los desplazamientos Y_B , como Y_D por ser las barras axialmente infinitas, mientras que los giros ϑ_B , ϑ_C , y ϑ_D son grados de libertad, así, el desplazamiento horizontal en X_b será independiente, al igual que $Y_{b,izq}$ como $Y_{b,der}$.

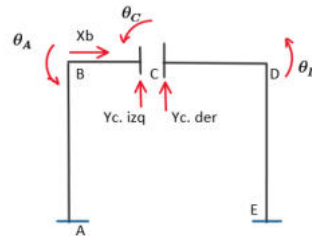


Figura.273 Posibles grados de libertad.

Deformadas según su grado de libertad.

Rotación ϑ_B

Para conocer la deformada de la rotación, las barras se puede deformar, pero no pueden alargarse o acortarse por la condición de axialmente infinito.

$$\vartheta_A = \vartheta_E = 0$$

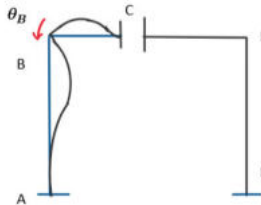


Figura.274 Deformación por giro en B.

Rotación ϑ_C

La condición de biela interna o empotramiento móvil interno, es que la abertura que posee, debe mantenerla en todo momento, así, al realizar un giro, en C, la abertura rota y se deforman las barras.

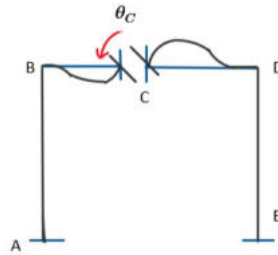


Figura.275 Deformación por giro en C.

Rotación ϑ_D

Para conocer la deformada en D, se debe realizar la rotación de la junta, generando una deformación en las barras CD y DE, sin acortar ni alargar las barras por la condición de axialmente infinito.

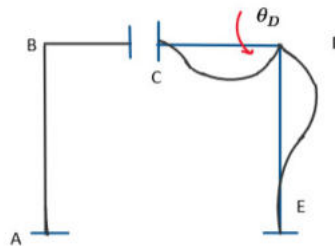


Figura.276 Deformación por giro en D.





Desplazamiento $Y_{B,izq}$

La condición del desplazamiento en una biela, se considera independiente la una de la otra, pero está condicionada, lo que significa, que se genera un grado de libertad $Y_{c,izq}$ y un giro como cuerpo rígido positivo.

$$\varphi_{BC} = \frac{Y_{c,izq}}{L_{bc}}$$

$$\varphi_{BC} = \frac{Y_{c,izq}}{4 \text{ m}}$$

Para conocer la deformada, se restringe los giros en las juntas, ya que son grados de libertad, se desplazará la junta de forma paralela a su abertura.

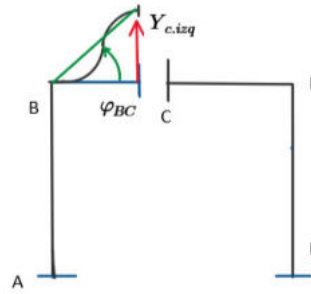


Figura.277 Deformación por desplazamiento vertical izquierdo en C.

Desplazamiento $Y_{B,der}$

La condición del desplazamiento en una biela, se considera independiente la una de la otra, pero está condicionada, lo que significa que se genera un grado de libertad ($Y_{c,der}$) y un giro como cuerpo rígido negativo (φ).

$$\varphi_{CD} = \frac{-Y_{c,der}}{L_{cd}}$$

$$\varphi_{CD} = \frac{-Y_{c,der}}{5 \text{ m}}$$

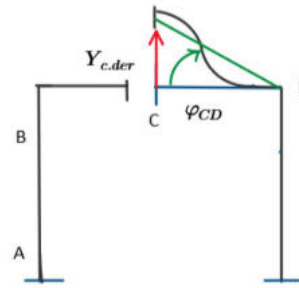


Figura.278 Deformación por desplazamiento vertical derecho en C.

Desplazamiento X_B

Para el ejemplo, al generar el desplazamiento en X_B , se realiza un desplazamiento de la misma magnitud en C y D y se va a generar giros como cuerpo rígido, en la barra (AB) y en la barra (DE).

$$\varphi_{AB} = \frac{-X_B}{L_{ab}} \quad \varphi_{DE} = \frac{-X_B}{L_{de}}$$

$$\varphi_{AB} = \frac{-X_B}{7 \text{ m}} \quad \varphi_{DE} = \frac{-X_B}{7 \text{ m}}$$

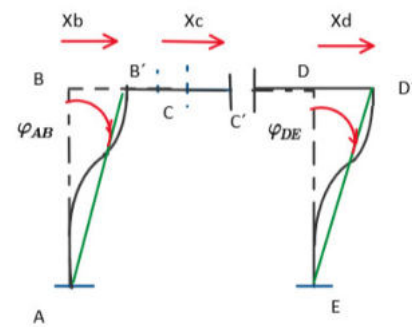


Figura.279 Deformación por desplazamiento horizontal en B.

Momentos de empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, asentamientos y temperatura, la suma de todos ellos, será el resultado de los momentos de empotramiento.

$$M_{EM,ab} = \frac{q_1 \cdot L_{ab}^2}{12} = 12.25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM,ba} = \frac{(3) \cdot 7 \text{ m}^2}{12} = -10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

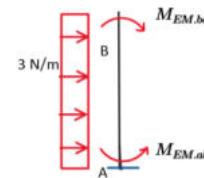


Figura.280 Momento de empotramiento A-B.

Barra B-C

Para conocer el momento de empotramiento de la biela, se debe realizar la separación de la barra, y considerar como empotramiento en ambos extremos.

$$M_{EM,bc} = \frac{q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = 26.667 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM,cb} = \frac{-(20) \cdot 4 \text{ m}^2}{12} = -26.667 \text{ N} \cdot \text{m}$$

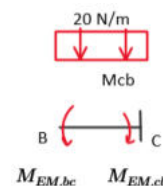


Figura.281 Momento de empotramiento B-C.



Barra C-D

$$M_{EM.cd} = \frac{q_2 \cdot L_{cd}^2}{12} = 41.667 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.cd} = \frac{-(20) \cdot 5 \text{ m}^2}{12} = -41.667 \text{ N} \cdot \text{m}$$

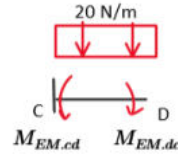


Figura.282 Momento de empotramiento C-D.

Barra D-E

Ya que no existen fuerzas externas, tampoco existe solicitaciones de temperatura o asentamientos, por tanto, los momentos en los extremos serán cero.

$$M_{EM.cd} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.de} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

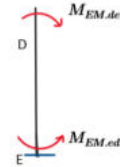


Figura.283 Momento de empotramiento D-E.

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Los momentos generales serán en los extremos de cada barra, además, los giros como cuerpo rígido en las barras, en este caso $\vartheta_A = \vartheta_E = 0$

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

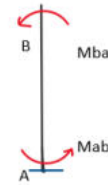


Figura.284 Momentos generales A-B.

Barra B-C

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$

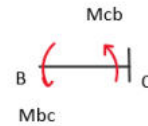


Figura.285 Momentos generales B-C.

Barra C-D

Para el ejemplo, se tiene rotaciones en (B) en (C) y giro como cuerpo rígido, más los valores de momento de empotramiento en la sección.

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd}$$

$$M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc}$$

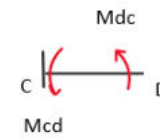


Figura.286 Momentos generales C-D.

Barra D-E

Los valores de momentos en los extremos para el ejemplo, el giro en (C), será nulo, tampoco se genera movimiento como cuerpo rígido.

$$M_{DE} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{DE})$$

$$M_{ED} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{DE})$$

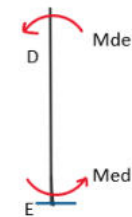


Figura.287 Momentos generales D-E.





Equilibrio en las juntas.

Junta o Nodo (B)

$$Ecu.1 = -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

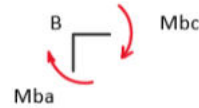


Figura.288 Momentos en los extremos junta B.

Biela Interna o Empotramiento móvil interno (C)

$$Ecu.2 = -M_{CB} - M_{CD} = 0$$

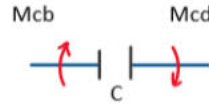


Figura.289 Momento en los extremos junta C.

Junta o Nodo (D)

$$Ecu.3 = -M_{DC} - M_{DE} = 0$$

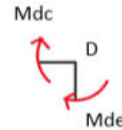


Figura.290 Momento en los extremos junta D.

Trabajo Virtual.

Para desplazamiento X_B

Para aplicar trabajo virtual, se debe considerar la multiplicación de los giros como cuerpos rígidos, por los momentos en los extremos de la barra, adicional, se debe trasladar el momento que se genera en la barra con fuerza externa y giro como cuerpo rígido, además, sumar los términos a la ecuación. Por último, se debe realizar factor común del desplazamiento, así, se coloca dividiendo a la expresión.

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} \cdot (-M_p) + \varphi_{DE} \cdot (M_{de} + M_{ed})}{X_B} = 0$$

$$Ecu.4 = \frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} \cdot (-M_p) + \varphi_{DE} \cdot (M_{de} + M_{ed})}{X_B} = 0$$

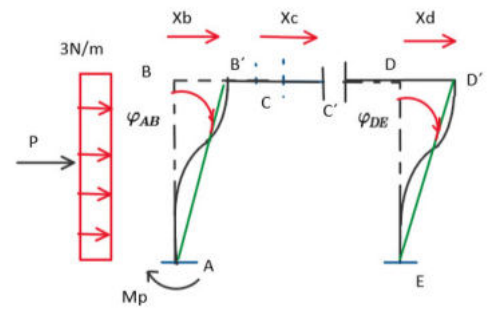


Figura.291 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento X_b .

$$p = 3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot 7 \text{ m} = 21 \text{ N} \quad M_p = p \cdot \frac{L_{ab}}{2} = 73.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Para desplazamiento $Y_{c,izq}$

De igual forma, se aplica trabajo virtual para el desplazamiento ($Y_{c,izq}$), manteniendo la operación de factor común, para que el resultado no afecte a la solución.

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} \cdot (-M_r)}{Y_{c,izq}} = 0$$

$$r = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (4 \text{ m}) = 80 \text{ N}$$

$$M_r = 80 \text{ N} \cdot \left(\frac{L_{bc}}{2}\right) = 160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$Ecu.5 = \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} \cdot (-M_r)}{Y_{c,izq}} = 0$$

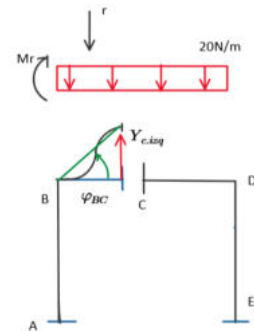


Figura.292 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento vertical.



La ecuación faltante, se genera del último desplazamiento, para este caso ($Y_{C.der}$), como en los casos anteriores, se debe multiplicar el giro como cuerpo rígido, por la suma de los momentos en los extremos.

$$L = 20 \frac{N}{m} \cdot (5 \text{ m}) = 10 \text{ N}$$

$$M_L = 20 \frac{N}{m} \cdot \left(\frac{L_{cd}}{2}\right) = 50 \text{ N}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Ecuaciones:

Se muestra el resumen de ecuaciones y de incógnitas que se plantean por el método de rotaciones.

Una vez identificado el sistema de ecuaciones, se puede resolver, por cualquier método, como matrices, sistema de ecuaciones, o utilizando un software que facilite la obtención de las incógnitas.

Se analiza que las ecuaciones, se dan entorno a las juntas del sistema estructural y si las ecuaciones no son suficientes, se debe aplicar trabajo virtual para cada desplazamiento.

Incógnitas en función de EI

Al resolver el sistema de ecuaciones, el resultado de las incógnitas será en función del producto de Elasticidad como Inercia (EI).

Cálculo de los momentos en los extremos.

Los valores obtenidos de las ecuaciones, se rempazan en los momentos en los extremos, para este caso, se tiene momentos en los extremos (A) y (E), ya que al estar empotrados, generan momento en sus apoyos.

Cuando se realiza la sustitución de los valores de rotaciones y los valores de desplazamientos, el factor EI, se cancela y el sentido está dado por el signo negativo o positivo, ya que inicialmente se consideran todos como positivos (sentido anti-horario).

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{CD} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD} \cdot (ML)}{Y_{C.der}} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{CD} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD} \cdot (ML)}{Y_{C.der}} = 0$$

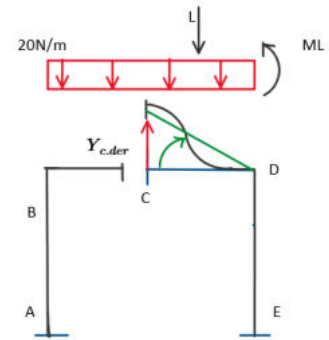


Figura.293 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento vertical.

incógnitas:

$$\begin{aligned}
 Ecu.1 &= -M_{BA} - M_{BC} = 0 \\
 Ecu.2 &= -M_{CB} - M_{CD} = 0 \\
 Ecu.3 &= -M_{DC} - M_{DE} = 0 \\
 Ecu.4 &= \frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} \cdot (-M_p) + \varphi_{DE} \cdot (M_{de} + M_{ed})}{X_B} = 0 \\
 Ecu.5 &= \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} \cdot (-M_r)}{Y_{C.izq}} = 0 \\
 Ecu.6 &= \frac{\varphi_{CD} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD} \cdot (ML)}{Y_{C.der}} = 0
 \end{aligned}$$

- ϑ_B
- ϑ_C
- ϑ_D
- X_B
- $Y_{C.izq}$
- $Y_{C.der}$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_B &= \frac{26747}{400 \cdot EI} & \vartheta_C &= \frac{333449}{1200 \cdot EI} & \vartheta_D &= \frac{156653}{400 \cdot EI} & X_B &= \frac{-10437}{16 \cdot EI} \\
 Y_{C.izq} &= \frac{9523}{20 \cdot EI} & Y_{C.der} &= \frac{10973}{5 \cdot EI}
 \end{aligned}$$

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = -48.52 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = -53.915 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc} = 53.915 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb} = 106.085 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Barra C-D

$$M_{CD} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd} = -106.085 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{DC}) + M_{EM.dc} = -143.915 \text{ N} \cdot \text{m}$$





Estos valores de momentos en los extremos se ubica inmediatamente antes de llegar a la junta, significa que si se grafican los diagramas, se debe discretizar la estructura, para conocer los valores de cortante en los extremos, de acuerdo a la convención de resistencia de materiales.

Barra D-E

$$M_{DE} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{DE}) = 143.915 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{ED} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{DE}) = 32.02 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Diagramas de corte y momento.

Diagrama de cortante

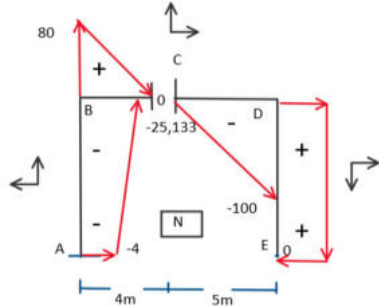


Diagrama de Momento

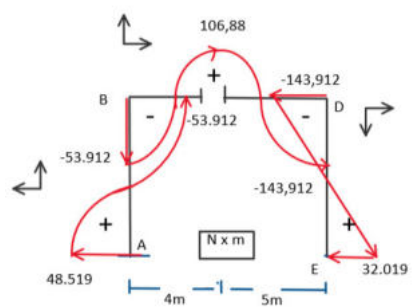


Figura.294 Diagrama de corte y momento.

Ejercicio 6.6.4

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilice el método de rotaciones.

Solución:

Se realiza el análisis de los grado de libertad, así, permitirá conocer los valores de giros como cuerpo rígido, por tanto, el número de incógnitas.

Grados de libertad

Para el ejemplo, se genera 5 posibles grados de libertad, por lo que, se realiza las deformadas para conocer si realmente son grados de libertad.

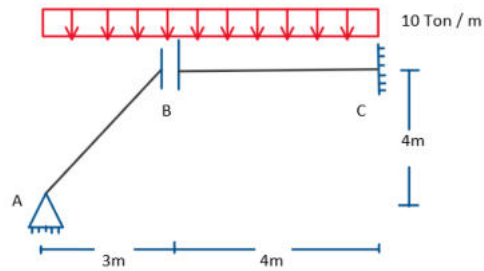


Figura.295 Idealización de sistema estructural con biela interna.

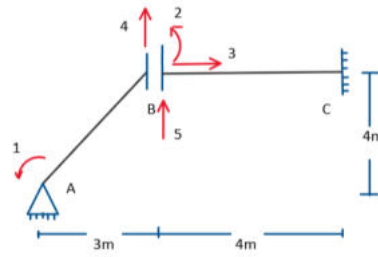


Figura.296 Posibles grados de libertad.

Deformaciones en la estructura

Rotación ϑ_A

Al realizar la deformada, si bien puede rotar la barra (A-B). Para que cumpla la condición de biela, debe alargarse un desplazamiento horizontal (X_B), la barra (B-C) al alargarse, incumple con la característica de axialmente infinito, así, no es grado de libertad ϑ_A .

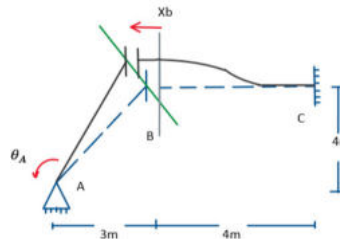


Figura.297 Deformación por rotación en A.





Rotación ϑ_B

Para el caso de la rotación en la junta B, al realizar un giro, la condición de la biela interna, señala que la abertura debe ser la misma, por tanto, se deforman las barras (A-B) y (B-C). Si es grado de libertad.

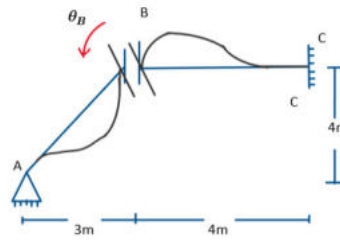


Figura.298 Deformación por rotación en B.

Desplazamiento $Y_{B.izq}$

Para el caso del desplazamiento de la biela en (Y), la barra (A-B) se alarga, por tanto, no es grado de libertad por la condición de elementos axialmente infinitos.

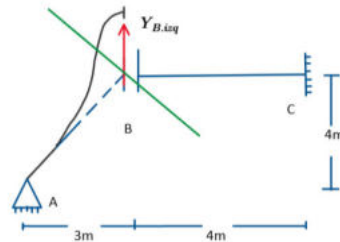


Figura.299 Deformación por desplazamiento vertical.

Desplazamiento $Y_{B.der}$

Para el desplazamiento de la biela ($Y_{b.der}$), si es grado de libertad, debido al generar el desplazamiento, la junta se encuentra en el eje perpendicular de la barra (B-C), generando un giro como cuerpo rígido (φ_{BC}).

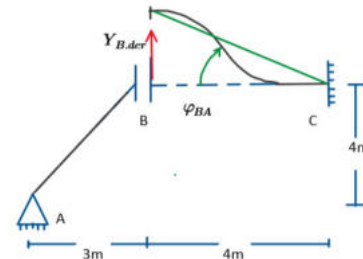


Figura.300 Deformación por desplazamiento vertical.

Linealizando la fuerza distribuida.

Para conocer los momentos de empotramientos, es necesario tener las fuerzas aplicadas de forma perpendicular a las barras, como lo muestran las tablas de momentos de empotramiento, por tanto, se linealiza la fuerza distribuida en la barra inclinada A-B.

Fuerza distribuida en la barra A-B:

$$R = 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} = 30 \text{ ton}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{R_y}{R}$$

$$R_y = R \cdot \cos(53.13^\circ) = 18 \text{ ton}$$

$$w_y = \frac{R_y}{L_{ab}} = 3.6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

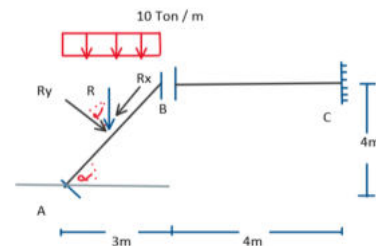


Figura.301 Linealización de fuerza distribuida.

Momentos de empotramiento

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, asentamientos y temperatura, la suma de todos ellos, será el resultado de los momentos de empotramiento.

$$M_{EM,ab} = \frac{q_1 \cdot L_{ab}^2}{12} = 7.5 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM,ba} = \frac{-(3.6) \cdot L_{ab}^2}{12} = -7.5 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

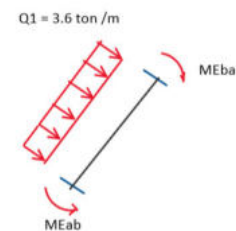


Figura.302 Momento de empotramiento de A-B.



Barra B-C

Para conocer el momento de empotramiento de una biela, se debe realizar la separación de la barra en segmentos, y considerarlo como empotramiento en ambos extremos.

$$M_{EM.bc} = \frac{q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = \frac{40}{3} \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.cb} = \frac{-(10) \cdot L_{bc}^2}{12} = \frac{-40}{3} \text{ ton} \cdot m$$

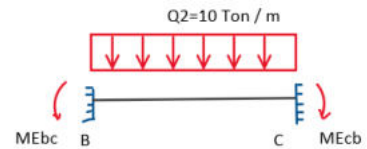


Figura.303 Momento de empotramiento de B-C.

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Para el ejemplo, en la barra (A-B), no se genera rotaciones como cuerpo rígido, según los grados de libertad, y las incógnitas serán el giro en (A) y en el giro en (B).

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

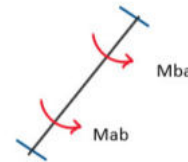


Figura.304 Momento generales de A-B.

Barra B-C

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$



Figura.305 Momento generales de B-C.

Equilibrio en las juntas.

Junta o Nodo (A)

Se estable el equilibrio en las juntas para genera ecuaciones de compatibilidad, se debe evaluar para vínculos de 1era especie y 2da especie, se debe considerar las juntas, en este caso en A.

$$Ecu.1 = -M_{AB} = 0$$

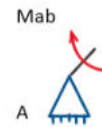


Figura.306 Junta A.

Biela Interna o Empotramiento móvil interno (B)

Para el ejemplo, está llegando a la biela interna los valores de los momentos en los extremos (Mba) y (Mbc), pero en sentido horario, así, serán negativos.

$$Ecu.2 = -M_{BA} - M_{BC} = 0$$



Figura.307 Biela interna B.

Trabajo Virtual.

Para desplazamiento $Y_{B.der}$

Al aplicar trabajo virtual, se considera la multiplicación del giro como cuerpo rígido, por los momentos en los extremos de la barra, adicional se debe trasladar el momento que se genera en la barra, por la fuerza externa sobre el giro como cuerpo rígido, y sumar a la ecuación. Por último, se debe realizar factor común del desplazamiento, así, lo podemos colocar dividiendo a la expresión.

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} \cdot (M_p)}{Y_{B.der}} = 0$$

$$Ecu.3 = \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} \cdot (M_p)}{Y_{B.der}} = 0$$

$$p = 10 \frac{\text{ton}}{m} \cdot 4 \text{ m} = 40 \text{ N}$$

$$M_p = p \cdot \frac{L_{ab}}{2} = 80 \text{ N} \cdot m$$

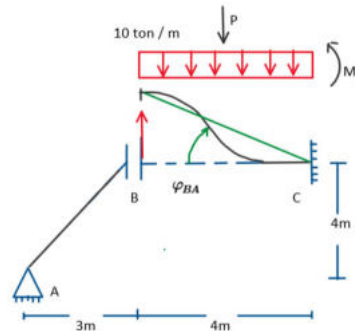


Figura.308 Trabajo virtual por desplazamiento vertical.



Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Se muestra el resumen de ecuaciones y de incógnitas que se plantean por el método de rotaciones.

Una vez identificado el sistema de ecuaciones, se puede resolver, por cualquier método, como matrices, sistema de ecuaciones, o utilizando un software que facilite la obtención de las incógnitas.

Incógnitas en función de EI

Al resolver el sistema de ecuaciones, el resultado de las incógnitas será en función de (EI).

$$\vartheta_A = \frac{-31.67892157}{EI} \quad \vartheta_B = \frac{44.60784314}{EI} \quad Y_{B.der} = \frac{-195.8823529}{EI}$$

Cálculo de los momentos en los extremos.

Los valores obtenidos de las ecuaciones, se rempazan en los momentos en los extremos, para el ejemplo, al tener una articulación el momento de (AB) debe ser cero.

La sustitución de los valores de rotaciones y los valores de los desplazamientos, el factor (EI), se cancela, y el sentido está dado por el signo negativo o positivo.

Ecuaciones:

$$Ecu.1 = -M_{AB} = 0$$

$$Ecu.2 = -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

$$Ecu.3 = \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} \cdot (M_p)}{Y_{B.der}} = 0$$

incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_A \\ \vartheta_B \\ Y_{B.der} \end{bmatrix}$$

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = 0 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = 15.514 \text{ ton} \cdot m$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc} = -15.514 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb} = -64.482 \text{ ton} \cdot m$$

Diagramas de corte y momento.

Diagrama de cortante

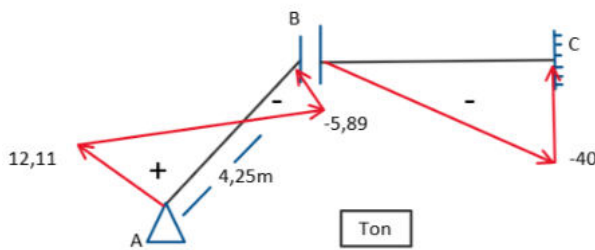


Diagrama de Momento

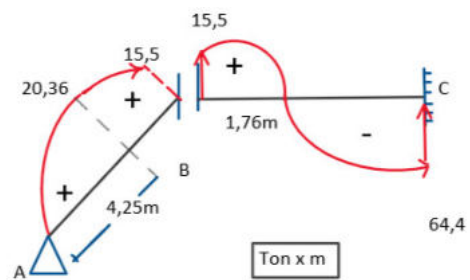


Figura.309 Diagrama de corte y momento.





Ejercicio 6.6.5

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural con variación de temperatura en las barra C-D, con un coeficiente de variación térmica de $(\alpha = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}C})$, utilice el método de rotaciones.

Solución:

Grados de libertad

Para este caso se genera 4 grados de libertad, por lo que, se realiza sus deformadas para conocer si cumple como grados de libertad. Inicialmente, no se considera ninguna fuerza, tampoco ningún valor de temperatura o asentamiento.

Deformadas de la estructura.

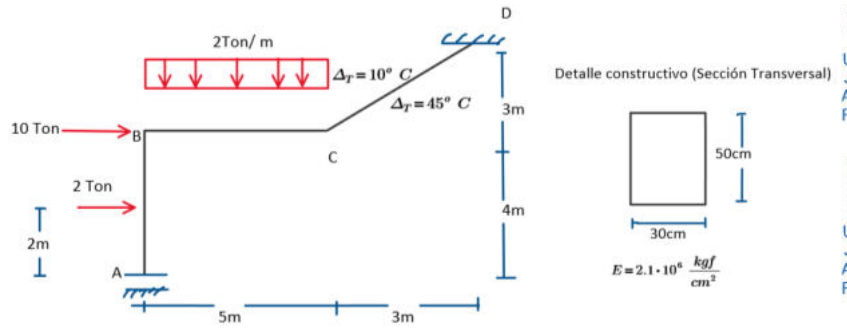


Figura.310 Idealización estructural con empotramiento móvil externo.

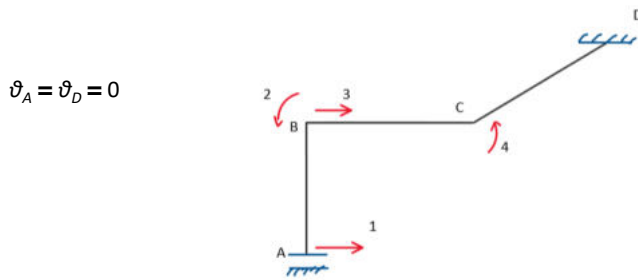


Figura.311 Grados de libertad posibles.

Rotación en ϑ_B

Cuando se tiene varios desplazamientos, es necesario comenzar deformando las rotaciones en las juntas. Al comprobar que es grado de libertad, la próxima deformada, se restringe su desplazamiento, ocasionando que no afecte el grado de libertad del siguiente.

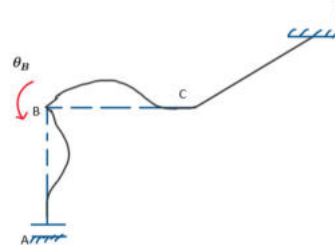


Figura.312 Deformación por rotación en B.

Rotación en ϑ_C

Para el caso de la rotación en (C), podemos analizar que la deformada solo será en el eje perpendicular de cada barra (B-C) y la barra (C-D), por tanto, no hay desplazamiento, solo deformación en las barras.

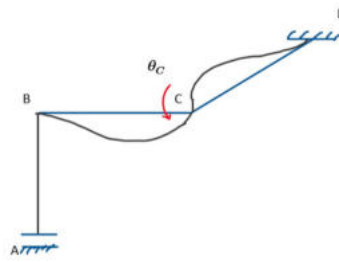


Figura.313 Deformación por rotación en C.

Desplazamiento en X_B

Para conocer la deformada según (X_B) , al desplazar la Junta (B) genera un desplazamiento continuo en la junta (C). Pero como la barra (B-C) debe mantener la misma longitud, por la condición de axialmente infinito. La junta (C) tiende a desplazarse verticalmente y está debe cumplir la condición de perpendicular, con la barra (C-D), de esta manera si es grado de libertad.

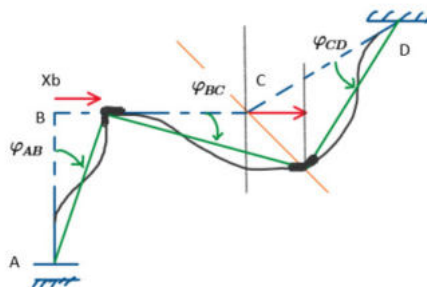


Figura.314 Deformación por desplazamiento en Xb.





Relación de triángulo para giros como cuerpo rígido según el desplazamiento X_B

Se debe realizar la relación del triángulo generado por el desplazamiento (X_b), para conocer el valor de los giros como cuerpos rígidos (φ).

$$\varphi_{AB.1} = \frac{-X_B}{L_{ab}} \quad \varphi_{BC.1} = \frac{-X_B}{L_{bc}} \quad \varphi_{CD.1} = \frac{\sqrt{2} \cdot X_B}{L_{cd}}$$

$$\varphi_{AB.1} = \frac{-X_B}{4 \text{ m}} \quad \varphi_{BC.1} = \frac{-X_B}{5 \text{ m}} \quad \varphi_{CD.1} = \frac{\sqrt{2} \cdot X_B}{3 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\varphi_{CD.1} = \frac{X_B}{3}$$

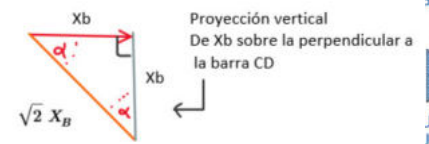


Figura.315 Relación triangular por desplazamiento X_b .

Se considera positivo el giro como cuerpo rígido, cuando es anti horario, y negativo cuando es horario.

Desplazamiento en X_A

Para el desplazamiento en (X_A), se debe empotrar la junta en (B), debido a que conoce que la rotación en (B) es grado de libertad, ya que se sabe, el desplazamiento vertical en (B), no genera grado de libertad por la condición de axialmente, así, solo podemos desplazar en la junta (A), perpendicular a la barra (A-B), ya que el vínculo permite el desplazamiento en su abertura, pero no permite el giro.

$$\varphi_{AB.2} = \frac{X_a}{L_{ab}}$$

$$\varphi_{AB.2} = \frac{X_a}{4 \text{ m}}$$

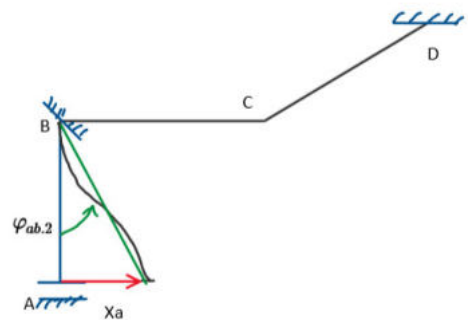


Figura.316 Deformación por desplazamiento en X_a .

Giros como cuerpos rígidos totales.

Para conocer los giros como cuerpos rígidos totales, se debe sumar en base a todos los que se han generado según los grados de libertad, para el ejemplo, se genera dos giros como cuerpos rígidos en la barra (A-B), siendo uno por parte del desplazamiento (X_b) y otro por el desplazamiento (X_A).

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AB.1} + \varphi_{AB.2} = \frac{-X_b}{4 \text{ m}} + \frac{X_a}{4 \text{ m}} = \frac{X_a - X_b}{4 \text{ m}}$$

$$\varphi_{BC} = \frac{-X_b}{5 \text{ m}}$$

$$\varphi_{CD} = \frac{X_b}{3}$$

Momentos de Empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza puntual. La fuerza debe ser perpendicular a la barra, para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.ab} = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.ba} = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

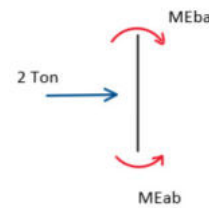


Figura.317 Momento de empotramiento A-B.

Barra B-C

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.bc.1} = 4.17 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.cb.1} = -4.17 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

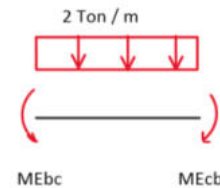


Figura.318 Momento de empotramiento B-C.



Barra C-D (Temperatura)

Efecto Transversal

Se conoce como efecto de temperatura transversal, el análisis de temperatura respecto a la altura transversal de la barra (h), a su vez genera, un momento por temperatura. Y se calcula como:

$$\Delta(\Delta T_0) = 45 - 10 = 35^\circ$$

$$M_{CD} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta(\Delta T_0)}{h} \cdot E I_{CD}$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0.3 \cdot (0.5)^3}{12} = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$E = 2.1 \cdot 10^6 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 2.1 \cdot 10^7 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$$

$$M_{EM.CD.1} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta(\Delta T_0)}{h} \cdot E I_{CD} = 45.94 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.DC.1} = \frac{-\alpha_t \cdot \Delta(\Delta T_0)}{h} \cdot E I_{CD} = -45.94 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

El momento que se genera, dependerá de la variación de temperatura $\Delta(\Delta T_0)$, del coeficiente de dilatación térmica (α) que es distinto para cada material, del módulo de elasticidad (E) y de la inercia (I).

Detalle constructivo (Sección Transversal)

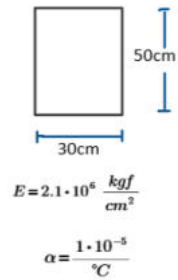


Figura.319 Detalle sección transversal vigas y columnas.

Efecto longitudinal o axial.

Además, la temperatura genera un segundo efecto que es de forma longitudinal, este va a generar que en su longitud, si posee una temperatura mayor a cero $\Delta t_0 > 0$, se produce un alargamiento en la barra, y si la temperatura es $\Delta t_0 < 0$, se produce un acortamiento en la barra.

Para calcular el efecto longitudinal, se debe realizar un promedio de la temperatura que se encuentra en la barra, por encima y por debajo de la barra, esta consideración en la vida real se genera, cuando tenemos viviendas que en su interior son muy cálidas, pero en su exterior son temperaturas frías.

Ahora, el efector longitudinal, va a generar que se alargue o acorte, para el ejemplo, se alarga, por ende, la barra se va a expandir en sentido longitudinal, genera un desplazamiento (δ), por tanto, se debe conocer la deformada por temperatura como se muestra en la figura 320.

Al obtener la deformada por alargamiento, esta genera giros como cuerpo rígido en las barras (BC) y (CD), por tanto, para conocer los momentos de empotramiento por temperatura, se utiliza la ecuación general de rotaciones, pero, aplicando el giro como cuerpo rígido, por el alargamiento de temperatura.

El valor de (ϑ_B) y (ϑ_C) serán cero, debido a que se restringen por ser grados de libertad del sistema inicial.

Otro dato importante, es el signo de los momentos de empotramiento por temperatura, estos, serán iguales ya que el momento que se genera en la barra es el mismo en toda su barra longitudinal. Siendo positivo (anti-horario).

$$\delta = \Delta t_0 \cdot \alpha_t \cdot L_{CD}$$

$$\Delta t_0 = \frac{45^\circ + 10^\circ}{2} = 27.5^\circ$$

$$\delta = (27.5^\circ \text{ C}) \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-5}}{^\circ \text{C}} \right) \cdot (4.243 \text{ m})$$

$$\delta = 1.17 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Giros como cuerpo rígido efecto temperatura.

$$\varphi_{BC,\Delta} = \frac{-\sqrt{2} \cdot \delta}{L_{bc}}$$

$$\varphi_{CD,\Delta} = \frac{\delta}{L_{cd}}$$

$$\varphi_{BC,\Delta} = \frac{-\sqrt{2} \cdot \delta}{5 \cdot \text{m}}$$

$$\varphi_{CD,\Delta} = \frac{\delta}{3 \cdot \sqrt{2} \text{ m}}$$

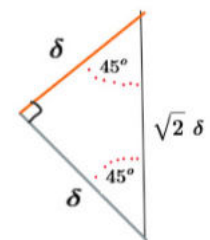
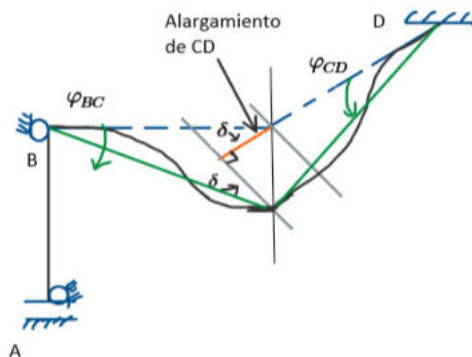


Figura.320 Deformación por temperatura de alargamiento.

$$M_{EM.bc,\Delta t_0} = \frac{EI}{L_{BC}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC,\Delta})$$

$$M_{EM.bc,\Delta t_0} = \frac{EI}{5 \text{ m}} \cdot (-6 \cdot \varphi_{BC,\Delta}) = 25.987 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.cb,\Delta t_0} = \frac{EI}{5 \text{ m}} \cdot (-6 \cdot \varphi_{BC,\Delta}) = 25.987 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{E,CD,\Delta t_0} = \frac{EI}{L_{CD}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD,\Delta})$$

$$M_{E,CD,\Delta t_0} = \frac{EI}{4.243 \text{ m}} \cdot (-6 \cdot \varphi_{CD,\Delta}) = -25.522 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{E,DC,\Delta t_0} = -25.522 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

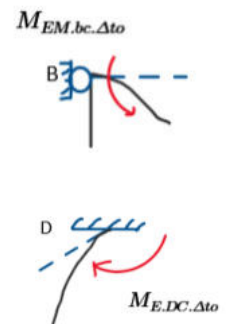


Figura.321 Momentos de empotramiento en las juntas B y D



Barra C-D Momentos de empotramiento.

$$M_{EM.cd} = M_{EM.cd.1} + M_{E.cd,\Delta to} = 45.94 - 25.59 = 20.35 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.dc} = M_{EM.dc.1} + M_{E.dc,\Delta to} = -45.94 - 25.59 = -71.53 \text{ ton} \cdot m$$

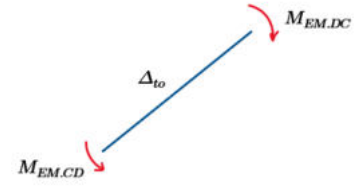


Figura.322 Momentos de empotramiento por temperatura en C-D.

Momentos de Empotramiento totales.

Barra A-B

Ya que no se generó por temperatura ningún momento, en el tramo será el mismo el momento de empotramiento.

$$M_{EM.ab} = 1 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.ba} = -1 \text{ ton} \cdot m$$

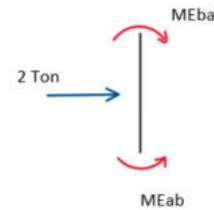


Figura.323 Momentos de empotramiento totales A-B.

Barra B-C

En la barra (B-C) adicionalmente a los momentos de empotramiento por fuerzas, se le suma el momento de empotramiento por temperatura, que fue producto del alargamiento de la Barra (C-D).

$$M_{EM.bc} = M_{EM.bc.1} + M_{EM.bc,\Delta to} = 4.17 + 25.987 = 30.154 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.cb} = M_{EM.cb.1} + M_{EM.cb,\Delta to} = -4.17 + 25.987 = 21.820 \text{ ton} \cdot m$$

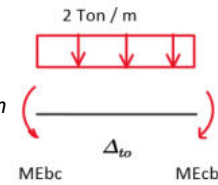


Figura.324 Momentos de empotramiento totales B-C.

Barra C-D

En la barra (C-D) se genera momento de empotramiento por temperatura, por dos condiciones transversalmente y longitudinalmente, la suma de estos genera el momento total de empotramiento.

$$M_{EM.cd,\Delta t} = M_{EM.cd.1} + M_{E.cd,\Delta to} = 45.94 - 25.59 = 20.415 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.dc,\Delta t} = M_{EM.dc.1} + M_{E.dc,\Delta to} = -45.94 - 25.59 = -71.459 \text{ ton} \cdot m$$

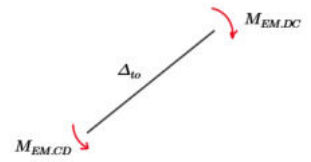


Figura.325 Momentos de empotramiento totales C-D.

Es importante recordar que los momentos que genera la deformación axial por temperatura (Δ_{to}) se deben restringir los grados de libertad (G.L) en la estructura y evaluar su deformada.

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Para el ejemplo, en la barra al tener un empotramiento móvil en (A) o biela externa, la rotación (ϑ_A), es cero.

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

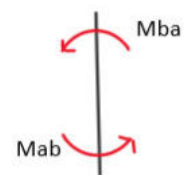


Figura.326 Momentos en los extremos A-B





Barra B-C

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$



Figura.327 Momentos en los extremos B-C

Barra C-D

A pesar que tenemos variación de temperatura, las ecuaciones generales se toma en sentido positivo (anti horario).

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd.\Delta t}$$

$$M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc.\Delta t}$$

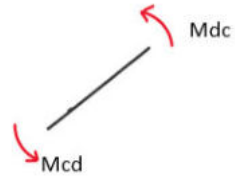


Figura.328 Momentos en los extremos C-D

Equilibrio en la juntas.

Junta o Nodo (B)

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

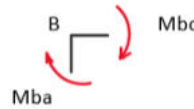


Figura.329 Momentos generales en la Junta B.

Junta o Nodo (C)

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

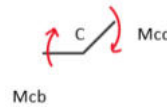


Figura.330 Momentos generales en la Junta C.

Trabajo virtual.

Trabajo virtual para el desplazamiento X_b

$$\sum T_V = 0 \quad P = 2 \frac{\text{ton}}{m} \cdot (5 \text{ m}) = 10 \text{ ton} \quad M_p = P \cdot \frac{L_{bc}}{2} = 25 \text{ ton} \cdot m$$

$$\frac{(M_{ob} + M_{ba}) \cdot \varphi_{AB.1} + (M_{bc} + M_{cb}) \cdot \varphi_{BC.1} + (M_{cd} + M_{dc}) \cdot \varphi_{CD.1} + \varphi_{BC.1} (-M_p) + 10 \cdot X_b}{X_b} = 0$$

$$Ecu.3 = \frac{(M_{ob} + M_{ba}) \cdot \varphi_{AB.1} + (M_{bc} + M_{cb}) \cdot \varphi_{BC.1} + (M_{cd} + M_{dc}) \cdot \varphi_{CD.1} + \varphi_{BC.1} (-M_p) + 10 \cdot X_b}{X_b} = 0$$

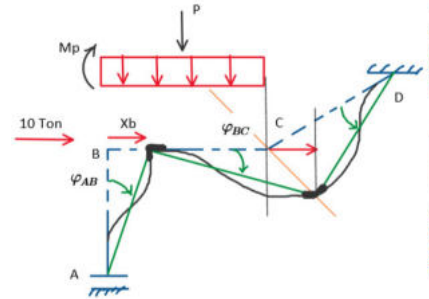


Figura.331 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento X_b .

Para considerar el trabajo virtual, según el desplazamiento (X_b) y una fuerza externa, para el ejemplo, vamos a trasladar la fuerza distribuida aplicada a la barra (B-C) convirtiéndose en una fuerza puntual (P) esta fuerza genera un momento (M_p) la cual se debe trasladar hacia el extremo de la barra (B), además, la fuerza horizontal de 10 toneladas (ton) está aplicada en la junta (B), su vector se encuentra en la misma dirección que el desplazamiento (X_b), se debe realizar el producto en la ecuación de trabajo virtual.





Trabajo virtual para el desplazamiento X_a

Para el ejemplo, al no tener fuerzas externas, que permiten trasladar el momento, o fuerzas puntuales en la junta (A), solo se genera la multiplicación como cuerpo rígido por los momentos en los extremos.

$$\sum T_V = 0$$

$$Ecu.4 = \frac{(M_{ab} + M_{ba}) \cdot \varphi_{ab,2}}{X_a} = 0$$

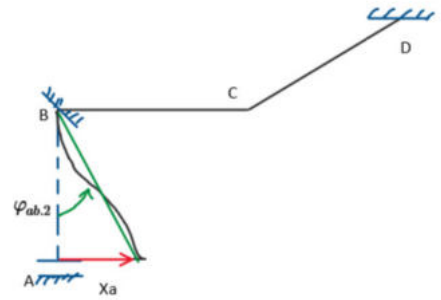


Figura.332 Trabajo virtual aplicado al desplazamiento X_a .

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Se muestra el resumen de ecuaciones y de incógnitas que se plantean por el método de rotaciones.

Una vez identificado el sistema de ecuaciones, se puede resolver, por cualquier método, como matrices, sistema de ecuaciones, o utilizando un software que facilite la obtención de las incógnitas.

Incógnitas en función de EI

Al resolver el sistema de ecuaciones, el resultado de las incógnitas será en función de (EI).

Ecuaciones:

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{cb} = 0$$

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

$$Ecu.3 = \frac{(M_{ab} + M_{ba}) \cdot \varphi_{AB,1} + (M_{bc} + M_{cb}) \cdot \varphi_{BC,1} + (M_{cd} + M_{dc}) \cdot \varphi_{CD,1} + \varphi_{BC,1} (-M_p) + 10 \cdot X_b}{X_b} = 0$$

$$Ecu.4 = \frac{(M_{ab} + M_{ba}) \cdot \varphi_{ab,2}}{X_a} = 0$$

incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_B \\ \vartheta_C \\ X_b \\ X_a \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_B = \frac{-2.33}{EI} \quad \vartheta_C = \frac{-31.54}{EI} \quad X_b = \frac{-59.05}{EI} \quad X_a = \frac{63.70}{EI}$$

Cálculo de los momentos en los extremos.

Los valores obtenidos de las ecuaciones, se rempazan en los momentos en los extremos, para el ejemplo, se genera momentos en los extremos (A) y (D), ya que al estar empotrados, el vínculo genera momento en sus apoyos.

Cuando realizamos la sustitución de los valores de rotaciones y los valores de los desplazamientos, el factor (EI), se cancela, su sentido está dado por el signo negativo o positivo, ya que inicialmente se consideran todos como positivos (sentido anti-horario).

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM,ab,\Delta t} = 1.58 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM,ba,\Delta t} = -1.58 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM,bc} = 1.58 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM,cb} = -18.44 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra C-D

$$M_{CD} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM,cd,\Delta t} = 18.44 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM,dc,\Delta t} = -58.56 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



Cálculo del diagrama de corte y momento por estática.

Al conocer los valores de momentos en los extremos se puede discretizar la estructura, para conocer los valores de sus reacciones, fuerzas internas y posteriormente sus diagramas de corte y momento flector.

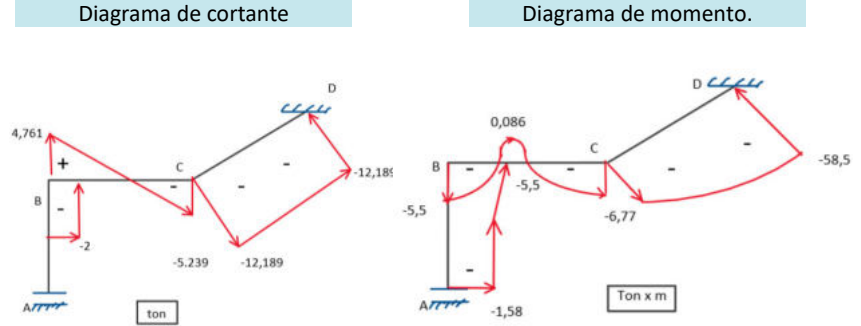


Figura.333 Diagrama de fuerza cortante y momento.

Ejercicio 6.6.6

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilizando el método de rotaciones.

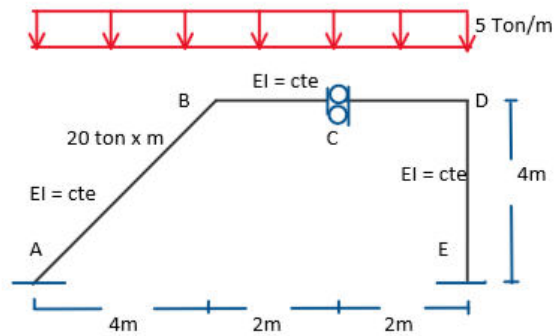


Figura.334 Diagrama de fuerza cortante y momento.

Grados de libertad

Para el ejemplo, se tiene 11 posibles grados de libertad, así, se debe realizar las deformadas para conocer si realmente son grados de libertad. Inicialmente, no se considera ninguna fuerza ni otro valor de temperatura o asentamiento. Las rotaciones en las juntas (A) y (E) serán cero, por la vinculación.

$$\vartheta_A = \vartheta_E = 0$$

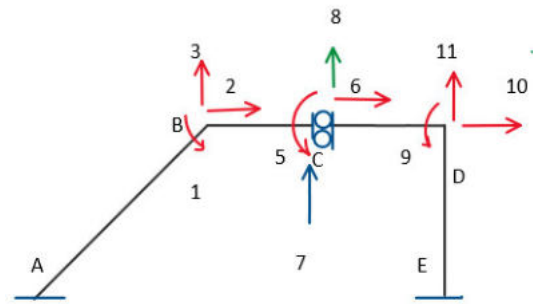


Figura.335 Idealización de grados de libertad.

Deformadas de la estructura.

Rotación en ϑ_B

Para el ejemplo, la deformada en la junta (B) será la rotación de la barra (A-B) y de la barra (B-C), ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

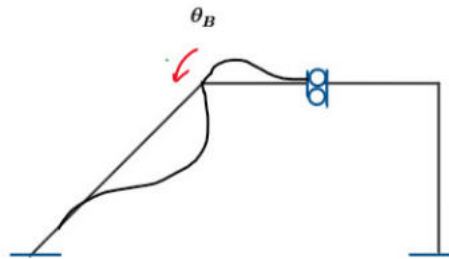


Figura.336 Deformación por rotación en B.



Rotación en ϑ_C

Para el ejemplo, la deformada en la biela será la rotación de la barra (B-C) y de la barra (C-D) manteniendo la abertura de la biela, ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

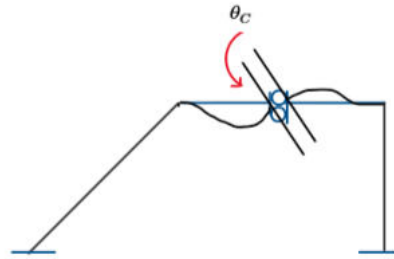


Figura.337 Deformación por rotación en C.

Rotación en ϑ_D

Para el ejemplo, la deformada en la junta (D) será la rotación de la barra (C-D) y de la barra (D-E), ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

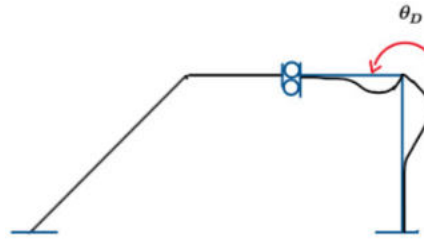


Figura.338 Deformación por rotación en D.

Desplazamiento para X_b

Al realizar el desplazamiento (X_b), se genera la deformada que posee giros como cuerpo rígido en la barra (A-B), (B-C) y (D-E), al necesitar conocer el valor del desplazamiento de la junta en (B), y al no permitir el giro, se desplaza en (x) como en (y), su abertura se genera en relación al triángulo rectángulo, cuyos ángulos internos son 45 grados, por la inclinación de la barra.

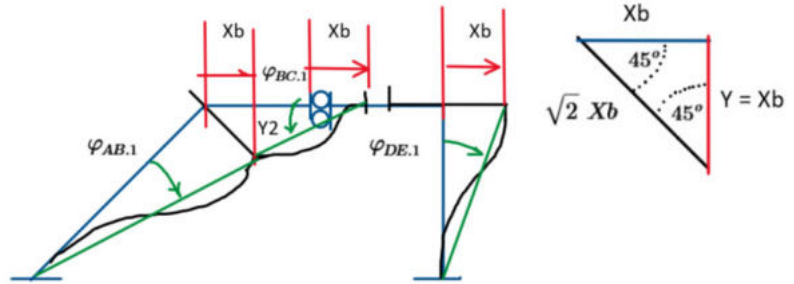


Figura.339 Deformación por desplazamiento en X_b .

El análisis del triángulo, permite conocer que el desplazamiento en (y) como en (x), será igual a (X_b) y su hipotenusa será ($\sqrt{2} X_b$).

$$\varphi_{ab.1} = -\frac{\sqrt{2} \cdot X_b}{L_{ab}} \quad \varphi_{bc.1} = \frac{X_b}{L_{bc}} \quad \varphi_{de.1} = \frac{-X_b}{L_{de}}$$

Desplazamiento en $Y_{c.izq}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado izquierdo, la biela se desplaza, en su eje perpendicular, evitando que afecte su abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido positivo (anti-horario).

$$\varphi_{BC.2} = \frac{Y_{c.izq}}{L_{bc}}$$

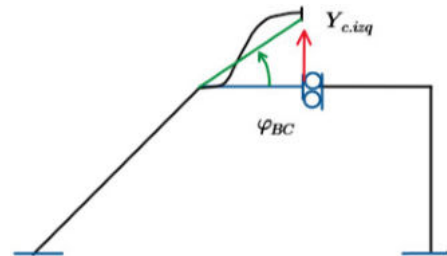


Figura.340 Deformación por desplazamiento en C izquierda.



Desplazamiento en $Y_{c.der}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado derecho, la biela se desplaza, en su eje perpendicular, evitando que afecte su abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido negativo (horario).

$$\varphi_{CD} = \frac{Y_{c.der}}{L_{cd}}$$

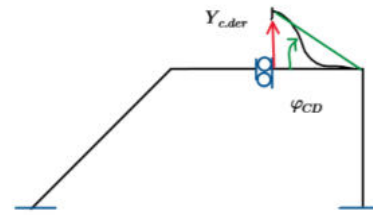


Figura.341 Deformación por desplazamiento en C derecha.

Rotaciones como cuerpo rígidos totales.

$$\varphi_{ab} = \varphi_{ab.1} = -\frac{\sqrt{2} \cdot X_b}{L_{ab}} \quad \varphi_{bc} = \frac{X_b}{L_{bc}} + \frac{Y_{c.izq}}{L_{bc}} \quad \varphi_{cd} = \frac{-Y_{c.der}}{L_{cd}} \quad \varphi_{de} = \frac{-X_b}{L_{de}}$$

Linealizando fuerza distribuida

$$R_y = R \cdot \cos(\alpha)$$

$$R_y = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ ton} \quad w_y = \frac{R_y}{L_{ab}} = 2.5 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

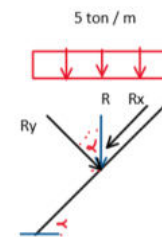


Figura.342 Linealización de fuerza.

Momentos de Empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, para este caso una fuerza puntual. Esta fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.ab.1} = \frac{q_1 \cdot L_{ab}^2}{12} = 6.67 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.ba.1} = \frac{-q_1 \cdot L_{ab}^2}{12} = -6.67 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

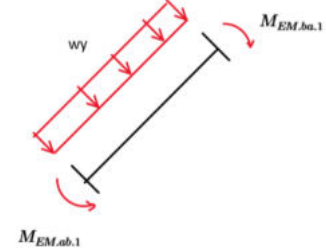


Figura.343 Empotramiento para carga distribuida y momento.

Barra B-C

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza distribuida. Esta fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.bc} = \frac{q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = 1.67 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.cb} = \frac{-q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = -1.67 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

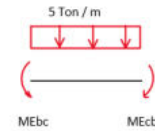


Figura.344 Empotramiento B-C.

Barra C-D

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza distribuida. Esta fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.cd} = \frac{q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = 1.67 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.dc} = \frac{-q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = -1.67 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

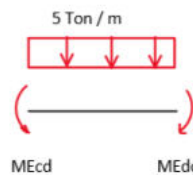


Figura.345 Empotramiento C-D



Barra D-E

Para el ejemplo, al no poseer fuerzas externas, asentamientos o temperatura, no se generan momentos de empotramiento.

$$M_{EM.de} = 0 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.ed} = 0 \text{ ton} \cdot m$$



Figura.346 Empotramiento D-E

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Para el ejemplo, en la barra al tener un empotramiento móvil en (A), la rotación (ϑ_A), es cero, de igual forma para el caso del empotramiento en (D).

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

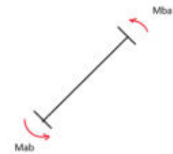


Figura.347 Momentos generales A-B.

Barra B-C

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$



Figura.348 Momentos generales B-C.

Barra C-D

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd}$$

$$M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc}$$



Figura.349 Momentos generales C-D.

Barra D-E

Para el caso de la columna, se considera la ecuación general pero no va a tener valores para el momento de empotramiento, al no tener sollicitaciones externas, en este tramo.

$$M_{de} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de}$$

$$M_{ed} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed}$$

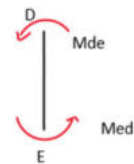


Figura.350 Momentos generales D-E.

Equilibrio en la juntas.

Nodo (B)

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

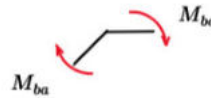


Figura.351 Nodo B.

Biela (C)

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

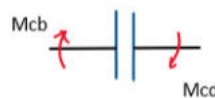


Figura.352 Biela interna C.





$$Ecu.3 = -M_{dc} - M_{de} = 0$$

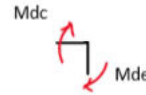


Figura.353 Junta D.

Trabajo virtual

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{C.izq}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza distribuida se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mp).

$$P = 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (2 \text{ m}) = 10 \text{ ton}$$

$$M_p = \frac{p \cdot Lab^2}{2} = 10 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} (-Mp)}{Y_{C.izq}} = 0$$

$$Ecu.4 = \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} (-Mp)}{Y_{C.izq}} = 0$$

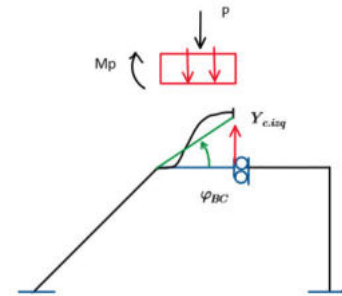


Figura.354 Trabajo virtual por desplazamiento en C izquierdo.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{C.der}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza distribuida se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mr).

$$R = 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (2 \text{ m}) = 10 \text{ ton}$$

$$M_R = \frac{R \cdot Lcd^2}{2} = 10 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{CD} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD} (Mr)}{Y_{C.der}} = 0$$

$$Ecu.5 = \frac{\varphi_{CD} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD} (Mr)}{Y_{C.der}} = 0$$

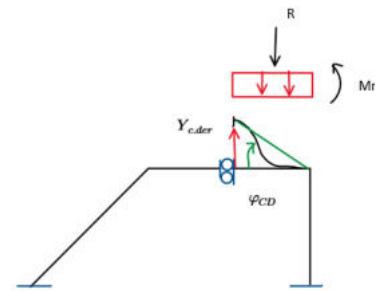


Figura.355 Trabajo virtual por desplazamiento en C derecho.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento X_b

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{AB.1} (M_{AB} + M_{BA}) + \varphi_{AB.1} \cdot (-M_t) + \varphi_{BC.1} (M_{BC} + M_{CB}) + \varphi_{BC.1} \cdot (M_a) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_{de} + M_{ed})}{X_b} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{AB.1} (M_{AB} + M_{BA}) + \varphi_{AB.1} \cdot (-M_t) + \varphi_{BC.1} (M_{BC} + M_{CB}) + \varphi_{BC.1} \cdot (M_a) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_{de} + M_{ed})}{X_b}$$

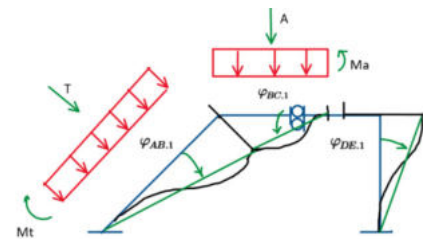


Figura.356 Trabajo virtual por desplazamiento en Xb.

$$M_t = -\frac{q_1 \cdot Lab^2}{2}$$

$$M_a = \frac{q_2 \cdot L_{bc}^2}{2}$$





Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Se muestra el resumen de ecuaciones y de incógnitas que se plantean por el método de rotaciones.

Una vez identificado el sistema de ecuaciones, se puede resolver, por cualquier método, como matrices, sistema de ecuaciones, o utilizando un software que facilite la obtención de las incógnitas.

Ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Ecu.1} &= -M_{ba} - M_{bc} = 0 \\ \text{Ecu.2} &= -M_{cb} - M_{cd} = 0 \\ \text{Ecu.3} &= -M_{dc} - M_{de} = 0 \\ \text{Ecu.4} &= \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC} (-Mp)}{Y_{C.izq}} = 0 \\ \text{Ecu.5} &= \frac{\varphi_{CD} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD} (Mr)}{Y_{C.der}} = 0 \end{aligned}$$

incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_b \\ \vartheta_c \\ \vartheta_d \\ X_b \\ Y_{c.der} \\ Y_{c.izq} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ecu.6} = \frac{\varphi_{AB.1} (M_{AB} + M_{BA}) + \varphi_{AB.1} \cdot (-M_t) + \varphi_{BC.1} (M_{BC} + M_{CB}) + \varphi_{BC.1} \cdot (M_a) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_{de} + M_{ed})}{X_b}$$

Incógnitas en función de EI

Al resolver el sistema de ecuaciones, el resultado de las incógnitas será en función de EI.

$$\begin{aligned} \vartheta_B &= \frac{-80.54022654}{EI} & \vartheta_C &= \frac{-78.46150976}{EI} & \vartheta_D &= \frac{-76.38279299}{EI} \\ Y_{c.der} &= \frac{151.5109694}{EI} & Y_{c.izq} &= \frac{-381.0286730}{EI} \end{aligned}$$

Momentos en los extremos.

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = 36.181 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = -5.627 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc} = 5.627 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb} = 4.372 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

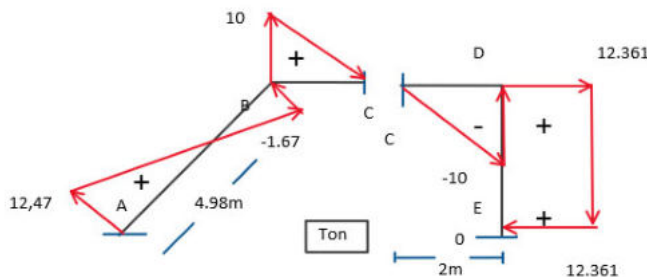
Barra C-D

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd,\Delta t} = -4.372 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc,\Delta t} = -5.627 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra D-E

$$M_{de} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de} = 5.627 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{ed} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed} = 43.819$$

Diagramas de Corte .



Diagramas de Momento.

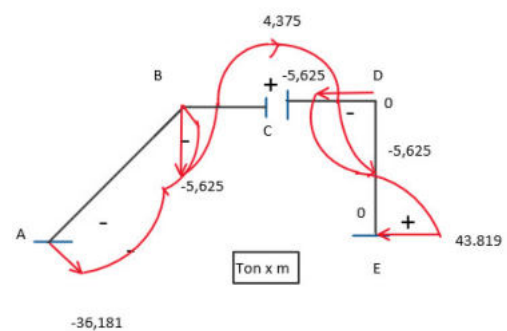


Figura.357 Diagrama de Corte y Momento.



Ejercicio 6.6.7

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilizando el método de rotaciones.

Solución:

Estructura simplificada

Para resolver un sistema estructural que posee volados, se debe realizar la transformación de la estructura, trasladando la fuerza puntual y el momento, que genera la fuerza hacia el nodo o junta.

Grados de libertad

Para el ejemplo, se genera 7 grados de libertad, por tanto, se realiza sus deformadas para conocer si realmente son grados de libertad. Inicialmente, no se considera ninguna fuerza, tampoco ningún valor de temperatura o asentamiento.

$$\vartheta_A = \vartheta_D = 0$$

Deformadas de la estructura.

Rotación en ϑ_B

Para el ejemplo, la deformada en la biela, será la rotación de la barra (A-B) y de la barra (B-C) manteniendo la abertura de la biela, ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

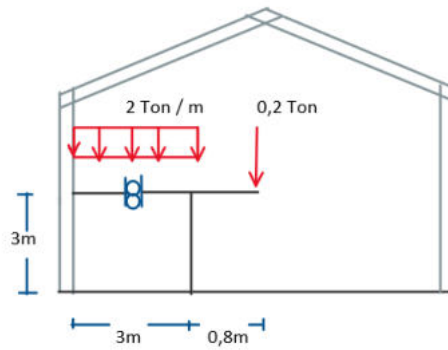


Figura.358 Idealización de Galpón con biela interna.

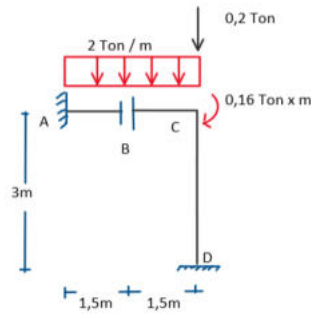


Figura.359 Idealización de Galpón con biela interna simplificada.

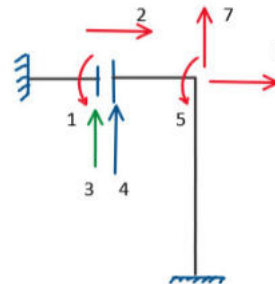


Figura.360 Grados de Libertad.

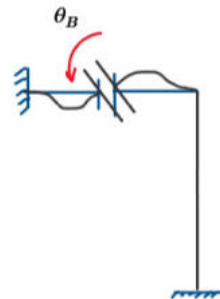


Figura.361 Rotación en Biela B.





Rotación en ϑ_C

Para el ejemplo, la deformada en la junta (C) será la deformación de la barra (B-C) y de la columna (C-D), al girar sobre su propio eje, no se genera giro como cuerpo rígido en el sistema estructural.

Para idealizar el giro en la junta se considera en sentido anti horario, por el criterio de rotaciones.

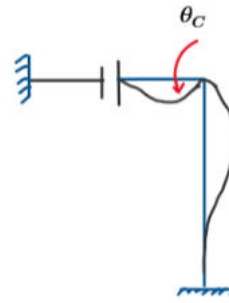


Figura.362 Rotación en Junta C.

Desplazamiento vertical en $Y_{b,izq}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado izquierdo, la biela se desplaza, en su eje perpendicular, evitando que afecte la abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido positivo (anti-horario).

$$\varphi_{AB} = \frac{Y_{b,izq}}{L_{ab}}$$

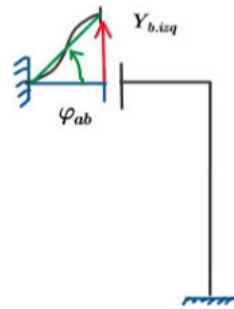


Figura.363 Desplazamiento en biela B Lado izquierdo.

Desplazamiento vertical en $Y_{b,der}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado derecho, la biela se desplaza, en su eje perpendicular, evitando que afecte su abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido negativo (horario).

$$\varphi_{BC} = \frac{-Y_{b,der}}{L_{bc}}$$

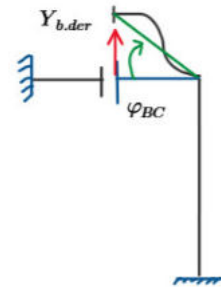


Figura.364 Desplazamiento en biela B lado derecho.

Momentos de Empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza puntual. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM,ab} = \frac{q \cdot L_{ab}^2}{12} = 0.375 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM,ba} = \frac{-q \cdot L_{ab}^2}{12} = -0.375 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

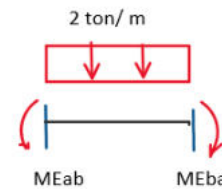


Figura.365 Momento de empotramiento A-B.

Barra B-C

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM,bc} = \frac{q \cdot L_{bc}^2}{12} = 0.375 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM,cb} = \frac{-q \cdot L_{bc}^2}{12} = -0.375 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

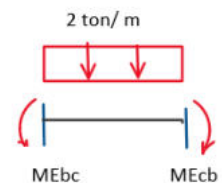


Figura.366 Momento de empotramiento B-C.





Barra C-D

Al no poseer fuerzas externas, ni asentamientos o temperatura, el valor de los momentos de empotramiento en el tramo será cero.

$$M_{EM.cd} = 0 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.dc} = 0 \text{ ton} \cdot m$$



Figura.367 Momento de empotramiento C-D.

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

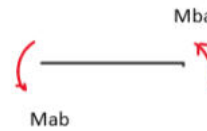


Figura.368 Momento en el extremo A-B.

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$



Figura.369 Momento en el extremo B-C.

Barra C-D

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd.\Delta t}$$

$$M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc.\Delta t}$$



Figura.370 Momento en el extremo C-D.

Equilibrio en la juntas.

Biela (B)

Se establece el equilibrio en las juntas para generar ecuaciones de compatibilidad, se debe evaluar para vínculos de 1era especie y 2da especie, se debe considerar las juntas.

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

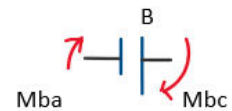


Figura.371 Biela B.

Junta o Nodo (C)

Se considera la junta (c) para obtener la ecuación que relacione los momentos en los extremos (Mcb) y (Mcd).

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} - 0.16 \text{ ton} \cdot m = 0$$

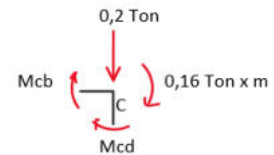


Figura.372 Junta C.





Trabajo virtual

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{b.izq}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza distribuida se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mp).

$$P = 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (1.5 \text{ m}) = 3 \text{ ton}$$

$$M_p = \frac{p \cdot Lab^2}{2} = 2.25 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} (-Mp)}{Y_{b.izq}} = 0$$

$$\text{Ecu.3} = \frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} (-Mp)}{Y_{b.izq}} = 0$$

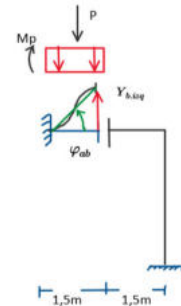


Figura.373 Trabajo virtual desplazamiento en B izquierdo.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{b.der}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza distribuida se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mr).

$$R = 2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cdot (1.5 \text{ m}) = 3 \text{ ton}$$

$$M_R = \frac{p \cdot Lab^2}{2} = 2.25 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{BC} (MR)}{Y_{b.der}} = 0$$

$$\text{Ecu.4} = \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{BC} (MR)}{Y_{b.der}} = 0$$

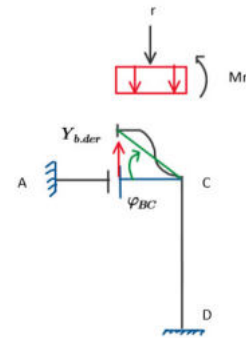


Figura.374 Trabajo virtual desplazamiento en B derecho.

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Ecuaciones:

incógnitas:

Se muestra el resumen de ecuaciones y de incógnitas que se plantean por el método de rotaciones.

Una vez identificado el sistema de ecuaciones, se puede resolver, por cualquier método, como matrices, sistema de ecuaciones, o utilizando un software que facilite la obtención de las incógnitas.

$$\text{Ecu.1} = -M_{ba} - M_{cb} = 0$$

$$\text{Ecu.2} = -M_{cb} - M_{cd} - 0.16 \text{ ton} \cdot \text{m} = 0$$

$$\text{Ecu.3} = \frac{\varphi_{AB} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB} (-Mp)}{Y_{b.izq}} = 0$$

$$\text{Ecu.4} = \frac{\varphi_{BC} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{BC} (-Mp)}{Y_{b.izq}} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_B \\ \vartheta_C \\ Y_{b.izq} \\ Y_{b.der} \end{bmatrix}$$

Incógnitas en función de EI

Al resolver el sistema de ecuaciones, el resultado de las incógnitas será en función de EI.

$$\vartheta_B = \frac{0.402}{EI}$$

$$\vartheta_C = \frac{0.804}{EI}$$

$$Y_{b.izq} = \frac{-0.120375}{EI}$$

$$Y_{b.der} = \frac{-1.326375}{EI}$$

Momentos en los extremos.

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = 1.232 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = 1.018 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc} = -1.018 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb} = -1.232 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



Barra C-D

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd.\Delta t} = 1.072 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc.\Delta t} = 0.536 \text{ ton} \cdot m$$

Diagrama de cortante.

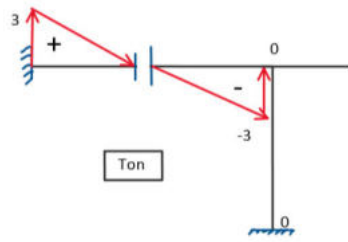


Diagrama de Momento Flector.

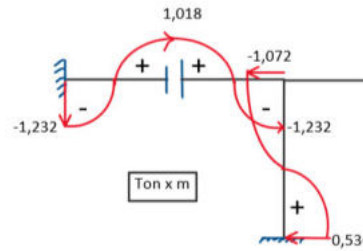


Figura.375 Diagramas de corte y momento.

Ejercicio 6.6.8

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilizando el método de rotaciones.

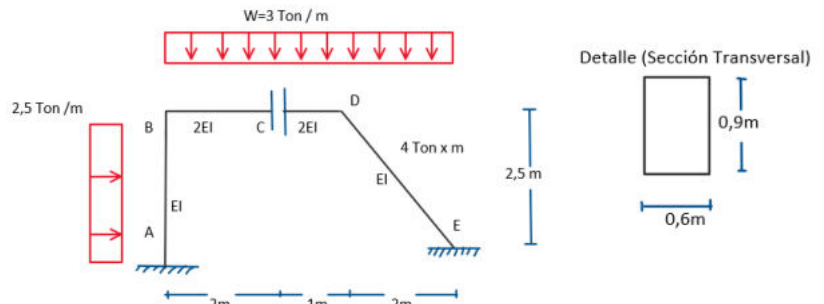


Figura.376 Idealización de estructura con empotramiento móvil interno y externo.

Grados de libertad

Para el ejemplo, se tiene 10 posibles grados de libertad, por tanto, se debe realizar las deformadas para conocer si realmente son grados de libertad. Inicialmente, no se considera ninguna fuerza ni otro valor de temperatura o asentamiento. Las rotaciones en las juntas (A) y (E) serán cero, por la vinculación.

$$\vartheta_A = \vartheta_E = 0$$

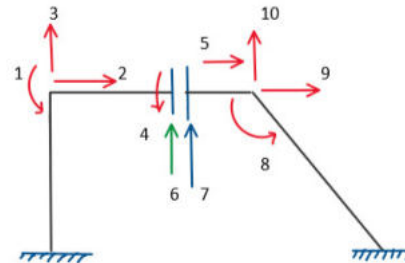


Figura.377 Grados de libertad.

Deformadas de la estructura.

Rotación en la Junta B ϑ_B

Para el ejemplo, la deformada en la junta (B) será la deformación de la barra (B-C) y de la barra (C-D), al girar sobre su propio eje, no se genera giro como cuerpo rígido en el sistema estructural.

Para idealizar el giro en la junta se considera en sentido anti - horario, por el criterio de rotaciones.

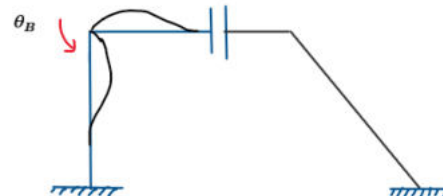


Figura.378 Rotación en Junta B.



Rotación en la biela C ϑ_C

Para el ejemplo, la deformada en la biela será la rotación de la barra (B-C) y de la barra (C-D) manteniendo la abertura de la biela, ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

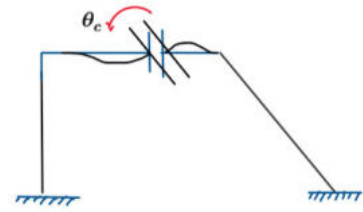


Figura.379 Rotación en Biela C.

Rotación en la Junta D ϑ_D

Para el ejemplo, la deformada en la biela será la rotación de la barra (C-D) y de la barra (D-E) manteniendo la abertura de la biela, ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

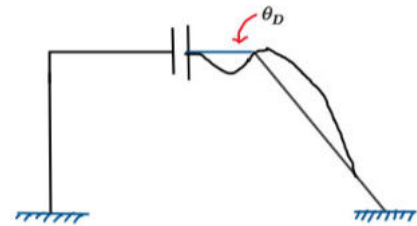


Figura.380 Rotación en junta D.

Desplazamiento en Xb

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento (X_b), la biela se desplaza (X_b), como la junta (D) debe ser perpendicular a la barra (D-E), se desplaza en (Y), generando giros como cuerpo rígido en (AB), (CD) y (DE), se genera la relación triangular.

$$\varphi_{AB.1} = \frac{-X_b}{L_{ab}}$$

$$\varphi_{CD.1} = \frac{\frac{4}{5} X_b}{L_{cd}}$$

$$\varphi_{DE.1} = \frac{-\frac{\sqrt{41}}{5} X_b}{L_{de}}$$

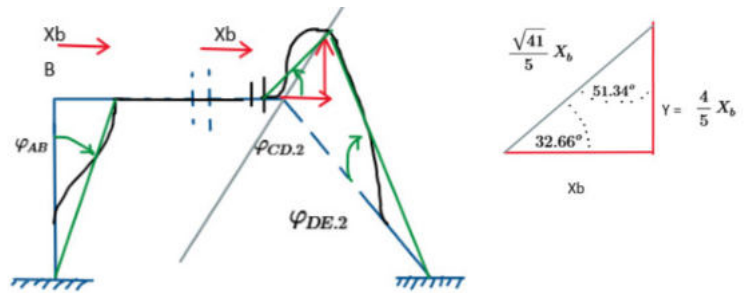


Figura.381 Desplazamiento en Xb

Desplazamiento en la biela C $Y_{C.izq}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado izquierdo, la biela se desplaza, en su eje perpendicular, evitando que afecte su abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido positivo (anti-horario).

$$\varphi_{BC.2} = \frac{Y_{C.izq}}{L_{bc}}$$

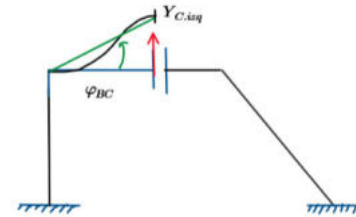


Figura.382 Desplazamiento en biela C izquierdo.

Desplazamiento en la biela C $Y_{C.der}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado derecho, la biela se desplaza, en su eje perpendicular, evitando que afecte su abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido negativo (horario).

$$\varphi_{CD.3} = \frac{Y_{C.der}}{L_{cd}}$$

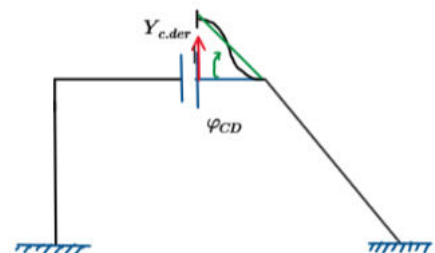


Figura.383 Desplazamiento en biela C derecho.





Giros como cuerpos rígidos totales.

$$\varphi_{ab} = \varphi_{AB.1} = \frac{-X_b}{L_{ab}} \quad \varphi_{bc} = \varphi_{BC.2} = \frac{Y_{C.izq}}{L_{bc}} \quad \varphi_{cd} = \frac{\frac{4}{5} X_b}{L_{cd}} + \frac{Y_{C.der}}{L_{cd}} \quad \varphi_{de} = \frac{-\frac{\sqrt{41}}{5} X_b}{L_{de}}$$

Linealizando fuerza distribuida

$$R_y = R \cdot \cos(\alpha) \quad \alpha = \tan^{-1} \cdot \left(\frac{2.5}{2} \right) = 51.34^\circ$$

$$R_y = 3.748 \text{ ton} \quad w_y = \frac{R_y}{L_{de}} = 1.17 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad q_3 = w_y = 1.17 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

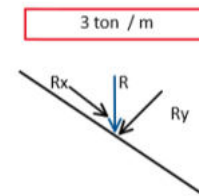


Figura.384 Linealización de fuerza.

Momentos de Empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza puntual. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.ab} = \frac{q_1 \cdot L_{ab}}{12} = 1.302 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.ba} = \frac{q_1 \cdot L_{ab}}{12} = -1.302 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

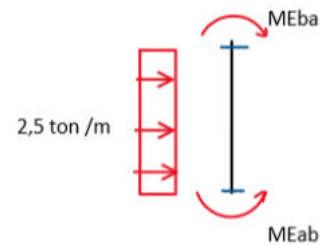


Figura.385 Momento de empotramiento A-B.

Barra B-C

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.bc} = \frac{q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.cb} = \frac{-q_2 \cdot L_{bc}^2}{12} = -1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

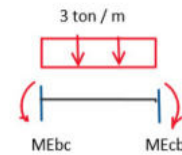


Figura.386 Momento de empotramiento B-C.

Barra C-D

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.cd} = \frac{q_2 \cdot L_{cd}^2}{12} = 0.25 \cdot \text{ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.dc} = \frac{-q_2 \cdot L_{cd}^2}{12} = -0.25 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

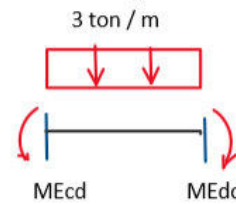


Figura.387 Momento de empotramiento C-D.

Barra D-E

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza puntual. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.de.1} = \frac{w_y \cdot L_{de}^2}{12} = 0.999 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{EM.ed.1} = \frac{w_y \cdot L_{de}^2}{12} = -0.999 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

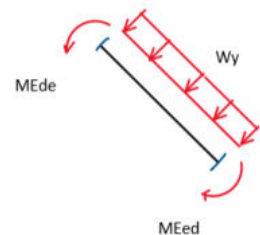


Figura.388 Momento de empotramiento D-E





Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Para este caso en la barra al tener un empotramiento móvil en (A), la rotación (ϑ_A), es cero, de igual forma para el caso del empotramiento en (D).

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$



Figura.389 Momento general A-B.

Barra B-C

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$

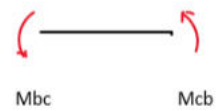


Figura.390 Momento general B-C.

Barra C-D

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{cd} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd}$$

$$M_{dc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc}$$



Figura.391 Momento general C-D.

Barra D-E

Para el caso de la columna, se considera la ecuación general con la sumatoria de los momentos de empotramiento, previamente calculados, para el tramo no se genera giro como cuerpo rígido.

$$M_{de} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de}$$

$$M_{ed} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed}$$

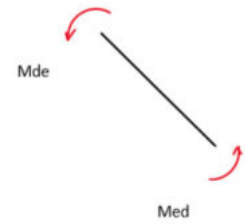


Figura.392 Momento general D-E.

Equilibrio en la juntas.

Junta B

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

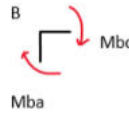


Figura.393 Junta B.

Biel o Empotramiento móvil interno en (C)

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

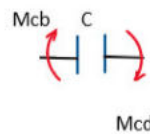
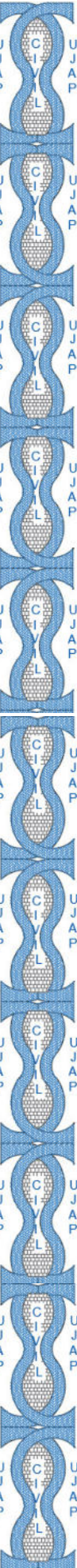


Figura.394 Biela C.





Para hacer equilibrio en la junta (D), se relaciona los momentos (DC) y (DE), ya que ellos llegan a la junta, con signo negativo (horario).

$$Ecu.3 = -M_{dc} - M_{de} = 0$$

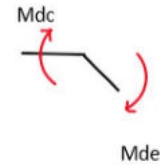


Figura.395 Nodo o Junta D.

Trabajo virtual.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento X_b

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza puntual se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mp).

$$\sum T_V = 0$$

$$M_t = \frac{-q_1 \cdot Lab^2}{2} = -7.81 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_p = \frac{-q_2 \cdot Lcd^2}{2} = -1.5 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_a = \frac{q_3 \cdot Lde^2}{2} = 5.99 \text{ ton} \cdot m$$

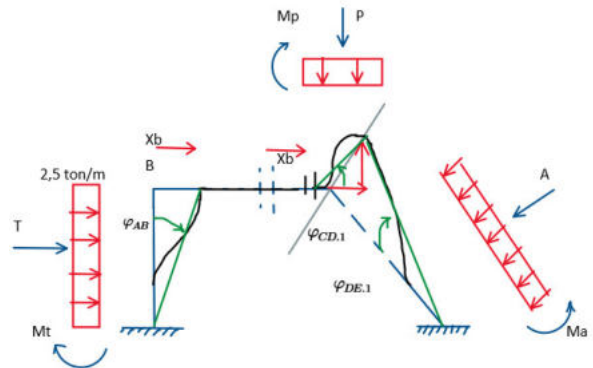


Figura.396 Trabajo virtual para desplazamiento en X_b

$$Ecu.4 = \frac{\varphi_{AB.1} (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB.1} \cdot (-M_t) + \varphi_{cd.1} (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{cd.1} \cdot (-M_p) + \varphi_{de.1} \cdot (M_{de} + M_{ed}) + \varphi_{de.1} \cdot (M_a)}{X_b} = 0$$

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{c.izq}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza distribuida se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mr).

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} (-M_r)}{Y_{c.izq}} = 0$$

$$Ecu.5 = \frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} (-M_r)}{Y_{c.izq}} = 0$$

$$M_r = \frac{-q_2 \cdot Lbc^2}{2} = -6 \text{ ton} \cdot m$$

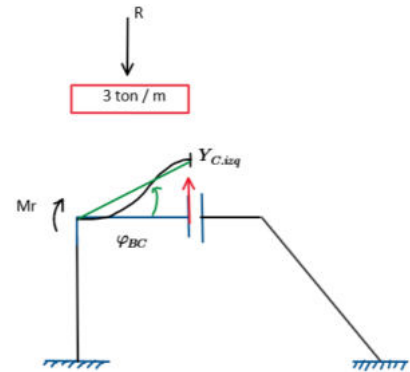


Figura.397 Trabajo virtual para desplazamiento en C izquierdo.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{c.der}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza distribuida se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mt).

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (M_t)}{Y_{c.der}} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (M_t)}{Y_{c.der}} = 0$$

$$M_t = \frac{q_2 \cdot Lcd^2}{2} = 1.5 \text{ ton} \cdot m$$

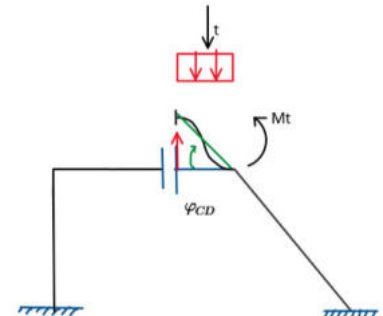


Figura.398 Trabajo virtual para desplazamiento en C derecho.





Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Ecuaciones:

$$Ecu.1 = M_{ba} - M_{bc} = 0$$

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

$$Ecu.3 = -M_{dc} - M_{de} = 0$$

incógnitas:

$$\begin{bmatrix} X_b \\ \vartheta_B \\ \vartheta_C \\ \vartheta_D \\ Y_{c.der} \\ Y_{c.izq} \end{bmatrix}$$

$$Ecu.4 = \frac{\varphi_{AB.1}(M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB.1}(-M_t) + \varphi_{cd.1}(M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{cd.1}(-M_p) + \varphi_{de.1}(M_{de} + M_{ed}) + \varphi_{de.1}(M_o)}{X_b} = 0$$

$$Ecu.5 = \frac{\varphi_{BC.2}(M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2}(-M_r)}{Y_{c.izq}} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{CD.3}(M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3}(M_t)}{Y_{c.der}} = 0$$

Incógnitas en función de EI

$$X_b = \frac{2.467633344}{EI} \quad \vartheta_B = \frac{-3.223263518}{EI} \quad \vartheta_C = \frac{-3.313640469}{EI} \quad \vartheta_D = \frac{-2.608828945}{EI}$$

$$Y_{c.der} = \frac{4.872841383}{EI} \quad Y_{c.izq} = \frac{-7.536903987}{EI}$$

Momentos en los extremos.

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = 1.092 \text{ ton} \cdot m \quad M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = -4.090 \text{ ton} \cdot m$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc} = 4.090 \text{ ton} \cdot m \quad M_{cb} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb} = 1.909 \text{ ton} \cdot m$$

Barra C-D

$$M_{cd} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd,\Delta t} = -1.909 \text{ ton} \cdot m \quad M_{dc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc,\Delta t} = -0.409 \text{ ton} \cdot m$$

Barra D-E

$$M_{de} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de} = -0.779 \text{ ton} \cdot m \quad M_{ed} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed} = -0.409$$

Diagrama de cortante.

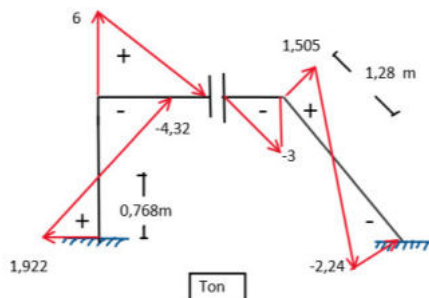


Diagrama de Momento Flector.

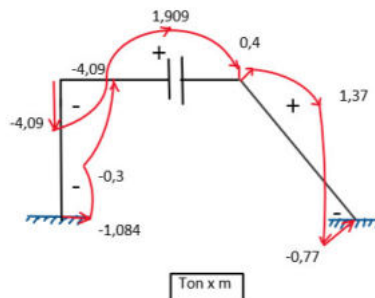
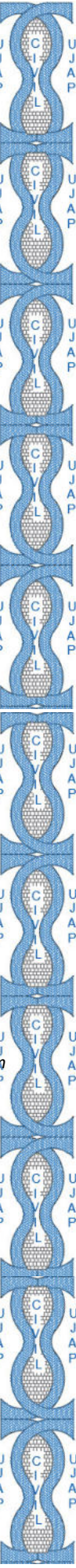


Figura.399 Diagrama de corte y momento.





Ejercicio 6.6.9

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilizando el método de rotaciones.

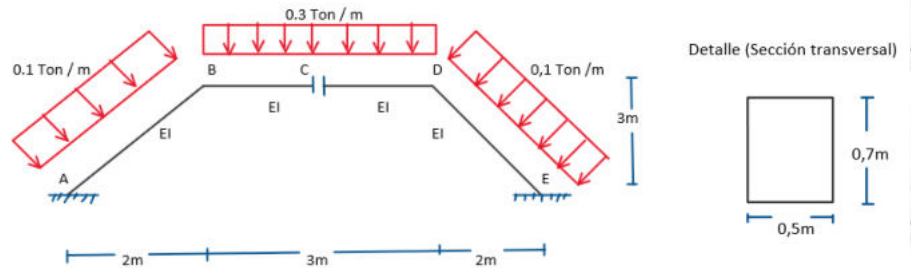


Figura.400 Idealización estructural simétrica con biela interna y vigas inclinadas.

Grados de libertad

Para el ejemplo se tiene 10 posibles grados de libertad, por tanto, se realiza las deformadas para conocer si realmente son grados de libertad. Inicialmente, no se considera ninguna fuerza ni otro valor de temperatura o asentamiento. Las rotaciones en las juntas (A) y (E) serán cero, por la vinculación.

$$\vartheta_A = \vartheta_E = 0$$

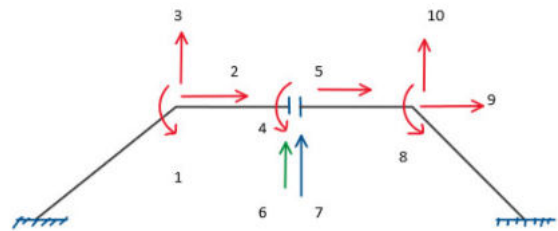


Figura.401 Grados de libertad.

Deformadas de la estructura.

Rotación en la Junta B ϑ_B

Para el ejemplo, la deformada en la biela será la rotación de la barra (A-B) y de la barra (B-C), ya que la rotación es en su eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

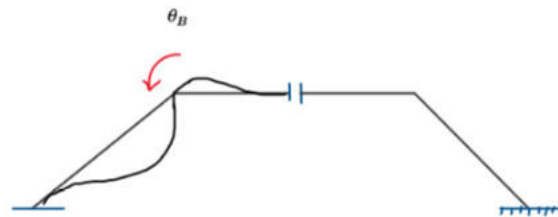


Figura.402 Rotación en junta B.

Desplazamiento en Xb

Para el ejemplo, la deformada al desplazar en (Xb), se genera una rotación como cuerpo rígido (φ), y este será igual a la abertura entre la longitud de la barra.

$$\varphi_{AB.1} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot X_b \quad \varphi_{BC.1} = \frac{2}{3} \cdot X_b$$

$$\varphi_{CD.1} = \frac{2}{3} \cdot X_b \quad \varphi_{DE.1} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \cdot X_b$$

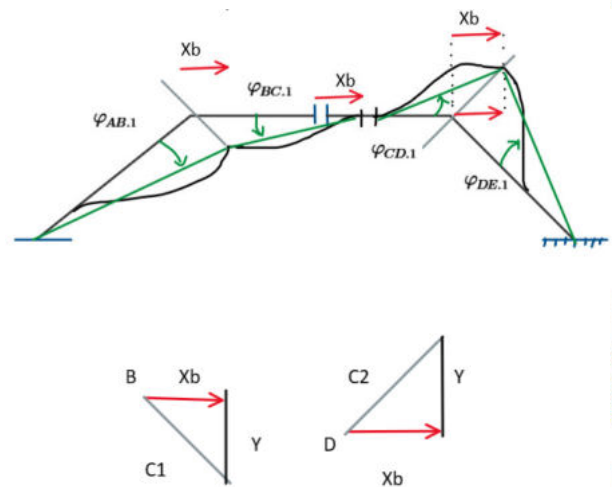


Figura.403 Desplazamiento en A y relaciones triangulares de desplazamientos.



Rotación en la biela C ϑ_C

Para el ejemplo, la deformada en la biela será la rotación de la barra (B-C) y de la barra (C-D) manteniendo la abertura de la biela, ya que la rotación es en su propio eje, no genera rotación como cuerpo rígido.

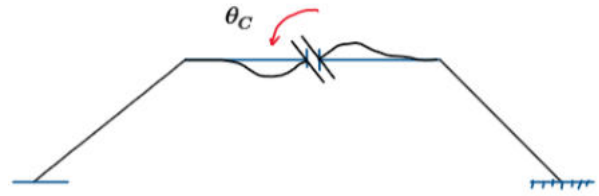


Figura.404 Rotación en biela interna C.

Desplazamiento en la biela C $Y_{C.izq}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado izquierdo, la biela se desplaza, en el eje perpendicular, evitando que afecte la abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido positivo (anti-horario).

$$\varphi_{AB.2} = 0$$

$$\varphi_{BC.2} = \frac{Y_{C.izq}}{L_{bc}}$$

$$\varphi_{CD.2} = 0$$

$$\varphi_{DE.2} = 0$$

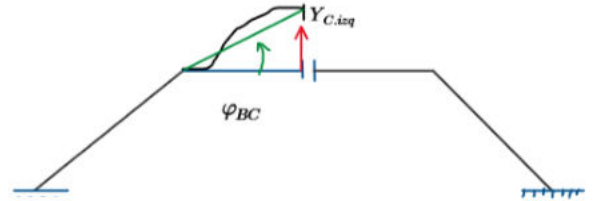


Figura.405 Desplazamiento en biela interna C izquierdo.

Desplazamiento vertical en $Y_{C.der}$

Para conocer la deformada de acuerdo al desplazamiento vertical lado derecho, la biela se desplaza, en su eje perpendicular, evitando que afecte su abertura, por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido negativo (horario).

$$\varphi_{AB.3} = 0$$

$$\varphi_{BC.3} = 0$$

$$\varphi_{CD.3} = \frac{-Y_{C.der}}{L_{cd}}$$

$$\varphi_{DE.3} = 0$$

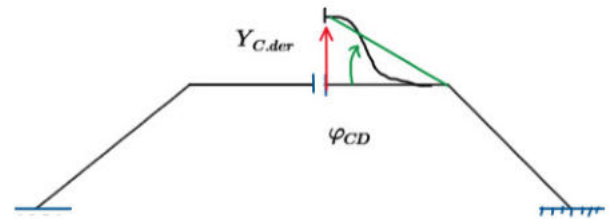


Figura.406 Desplazamiento en biela interna C derecho.

Rotación en la Junta D ϑ_D

Para el ejemplo, la deformada en la biela será la rotación de la barra (C-D) y de la barra (D-E), ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

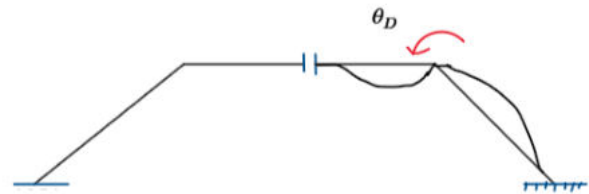


Figura.407 Rotación en junta D.

Giros como cuerpo rígidos totales

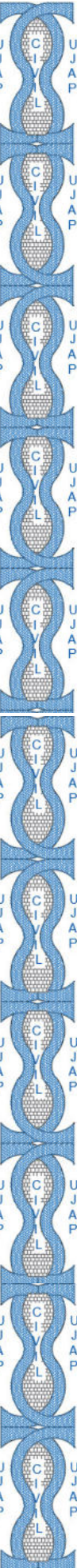
Cuando se generan deformaciones como cuerpos rígidos para cada grado de libertad, es necesario considerar la suma de estos, para generar el giro total como cuerpo rígido, por tanto, la suma de giros como cuerpos rígidos será:

$$\varphi_{ab} = \varphi_{AB.1} + \varphi_{AB.2} + \varphi_{AB.3} = \frac{-1}{3} X_b$$

$$\varphi_{bc} = \varphi_{BC.1} + \varphi_{BC.2} + \varphi_{BC.3} = 0.44 X_b + 0.67 Y_{C.izq}$$

$$\varphi_{cd} = \varphi_{CD.1} + \varphi_{CD.2} + \varphi_{CD.3} = 0.44 X_b + 0.67 Y_{C.der}$$

$$\varphi_{de} = \varphi_{DE.1} + \varphi_{DE.2} + \varphi_{DE.3} = \frac{-1}{3} X_b$$





Momentos de Empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, la fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.ab.1} = \frac{q \cdot L_{ab}^2}{12} = 0.108 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.ba.1} = \frac{-q \cdot L_{ab}^2}{12} = -0.108 \text{ ton} \cdot m$$

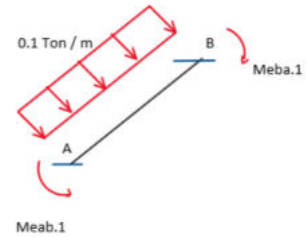


Figura.408 Momentos de empotramiento A-B

Barra B-C

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo la fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.bc} = \frac{q2 \cdot L_{bc}^2}{12} = 0.056 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.cb} = \frac{-q2 \cdot L_{bc}^2}{12} = -0.056 \text{ ton} \cdot m$$

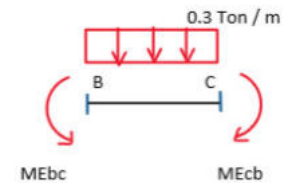


Figura.409 Momentos de empotramiento B-C.

Barra C-D

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, la fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.cd} = \frac{q2 \cdot L_{cd}^2}{12} = \frac{9}{160} \cdot \text{ton} \cdot m$$

$$M_{EM.dc} = \frac{-q2 \cdot L_{cd}^2}{12} = \frac{-9}{160} \text{ ton} \cdot m$$

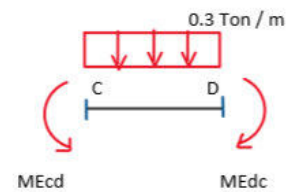


Figura.410 Momentos de empotramiento C-D.

Barra D-E

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, la fuerza puntual. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.de.1} = \frac{w \cdot L_{de}^2}{12} = \frac{13}{120} \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.ed.1} = \frac{w \cdot L_{de}^2}{12} = \frac{-13}{120} \text{ ton} \cdot m$$

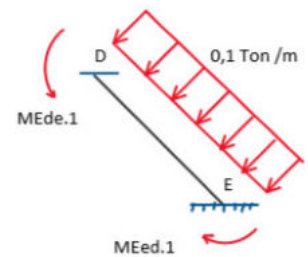


Figura.411 Momentos de empotramiento D-E.

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Para el ejemplo, en la barra al tener un empotramiento en (A), la rotación (ϑ_A), es cero, de igual forma para el caso del empotramiento en (D).

$$M_{ab} = \frac{2 \cdot EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{2 \cdot EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

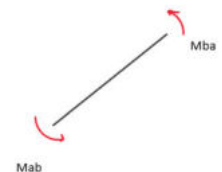


Figura.412 Momentos generales A-B.



Barra B-C

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$



Figura.413 Momentos generales B-C.

Barra C-D

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd}$$

$$M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc}$$



Figura.414 Momentos generales C-D.

Barra D-E

Para el caso de la columna, se considera la ecuación general con la sumatoria de los momentos de empotramiento, previamente calculados, para el tramo no se genera giro como cuerpo rígido.

$$M_{de} = \frac{1.5 \cdot EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de}$$

$$M_{ed} = \frac{1.5 \cdot EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed}$$

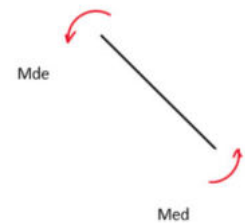


Figura.415 Momentos generales D-E.

Equilibrio en la juntas.

Junta B

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

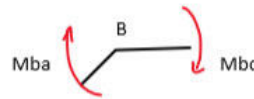


Figura.416 Junta B.

Biela o Empotramiento móvil interno en (C)

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

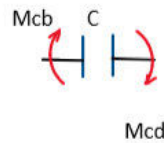


Figura.417 Biela interna C.

Junta o Nodo D

$$Ecu.3 = -M_{dc} - M_{de} = 0$$

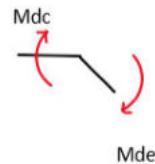


Figura.418 Junta D.





Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza puntual se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (M_t , M_r , M_s , M_p) para cada viga que se genere, giro como cuerpo rígido.

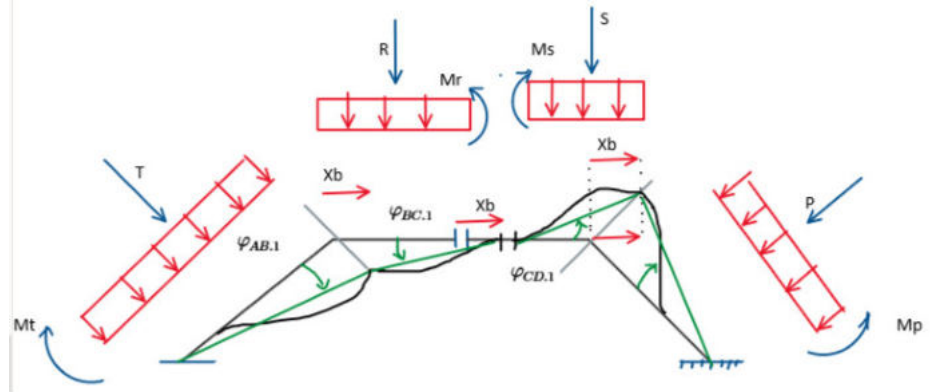


Figura.419 Trabajo virtual para desplazamiento en X_b .

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{AB.1} \cdot (M_{ob} + M_{ba}) + \varphi_{AB.1} (-M_t) + \varphi_{BC.1} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.1} \cdot (M_r) + \varphi_{CD.1} (M_{cd} + M_{ed}) + \varphi_{CD.1} \cdot (-M_s) + \varphi_{DE.1} (M_{DE} + M_{ED}) + \varphi_{DE.1} (M_p)}{X_b} = 0$$

$$M_t = \frac{-q1 \cdot Lab^2}{2} = -0.65 \text{ ton} \cdot m \quad M_s = \frac{-q2 \cdot Lcd^2}{2} = -0.338 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_r = \frac{q2 \cdot Lbc^2}{2} = 0.338 \text{ ton} \cdot m \quad M_p = \frac{q1 \cdot Lde^2}{2} = 0.65 \text{ ton} \cdot m$$

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{c.izq}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza puntual se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (M_r).

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} (-Mr)}{Y_{c.izq}} = 0$$

$$Ecu.5 = \frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} (-Mr)}{Y_{c.izq}} = 0$$

$$M_r = \frac{q2 \cdot Lab^2}{2} = 0.338 \text{ ton} \cdot m$$

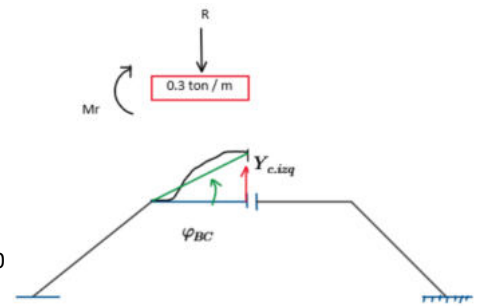


Figura.420 Trabajo virtual para desplazamiento en C izquierda.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento $Y_{c.der}$

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza puntual se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (M_t).

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (Mt)}{Y_{c.der}} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (Mt)}{Y_{c.der}} = 0$$

$$M_t = \frac{q2 \cdot Lab^2}{2} = 0.3375 \text{ ton} \cdot m$$

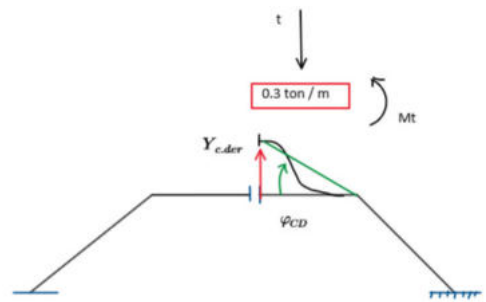


Figura.421 Trabajo virtual para desplazamiento en C derecha.





Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Ecuaciones:

incógnitas:

$$Ecu.1 = -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

$$Ecu.3 = -M_{dc} - M_{de} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_B \\ \vartheta_C \\ \vartheta_D \\ X_b \\ Y_{c.der} \\ Y_{c.izq} \end{bmatrix}$$

$$Ecu4 = \frac{\varphi_{AB.1} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB.1} (-M_t) + \varphi_{BC.1} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.1} \cdot (M_r) + \varphi_{CD.1} (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.1} \cdot (-M_s) + \varphi_{DE.1} (M_{DE} + M_{ED}) + \varphi_{DE.1} (M_p)}{X_b} = 0$$

$$Ecu.5 = \frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} (-Mr)}{Y_{c.izq}} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (Mt)}{Y_{c.der}} = 0$$

Incógnitas en función de EI

$$X_b = \frac{0.8112490370}{EI} \quad \vartheta_B = \frac{-0.4713127289}{EI} \quad \vartheta_C = \frac{-0.4056245185}{EI} \quad \vartheta_D = \frac{-0.3399363081}{EI}$$

$$Y_{c.der} = \frac{-1.036722061}{EI} \quad Y_{c.izq} = \frac{-1.261816877}{EI}$$

Momentos en los extremos.

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = 0.296 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = -0.181 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc} = 0.181 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{cb} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb} = 0.156 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra C-D

$$M_{cd} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd,\Delta t} = -0.156 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{dc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc,\Delta t} = -0.181 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Barra D-E

$$M_{de} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de} = 0.181 \text{ ton} \cdot \text{m} \quad M_{ed} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed} = 0.1$$

Diagrama de cortante.

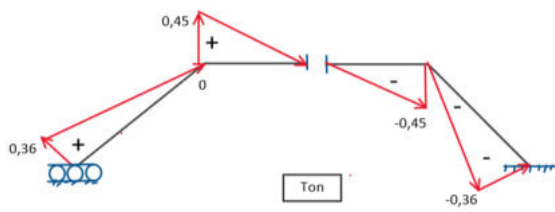


Diagrama de Momento Flector.

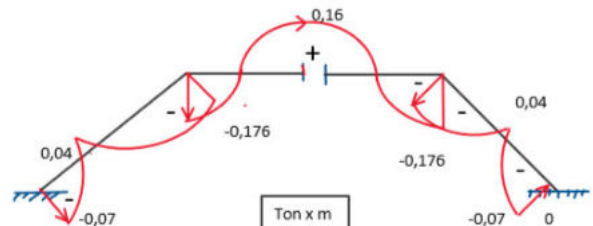


Figura.422 Diagrama de corte y momento.





Ejercicio 6.6.10

Calcular el diagrama de corte y momento para el siguiente sistema estructural, utilizando el método de rotaciones.

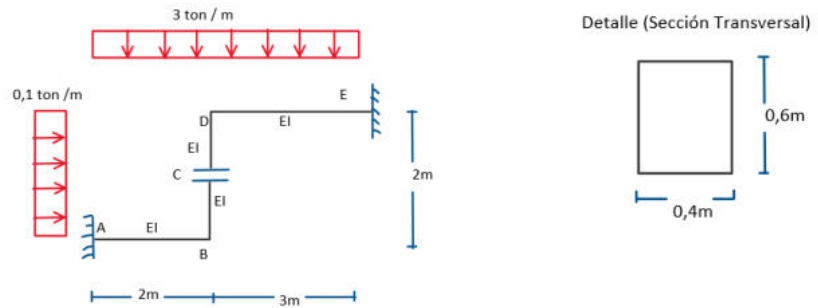


Figura.423 Idealización estructural con biela interna.

Rotación en la junta B ϑ_B

Para el ejemplo, la deformada en la junta (B) será la rotación de la barra (A-B) y de la barra (B-C), ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

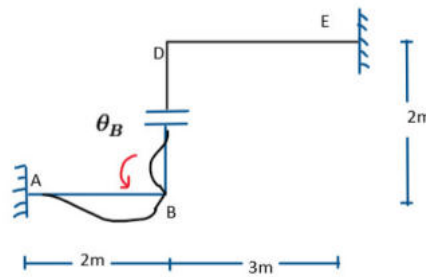


Figura.424 Deformación por rotación en B.

Rotación en la biela C ϑ_C

Para el ejemplo, la deformada en la biela será la rotación de la barra (B-C) y de la barra (C-D) manteniendo la abertura de la biela, ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

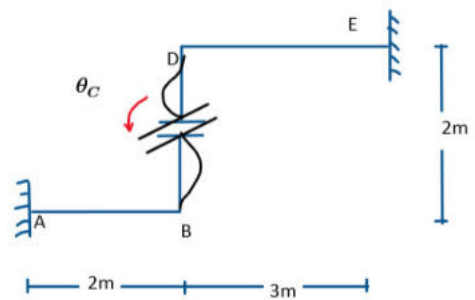


Figura.425 Deformación por rotación en C.

Rotación en la junta D ϑ_D

Para este caso la deformada en la junta (D) será la rotación de la barra (C-D) y de la barra (D-E), ya que la rotación es en su propio eje, no se genera rotación como cuerpo rígido.

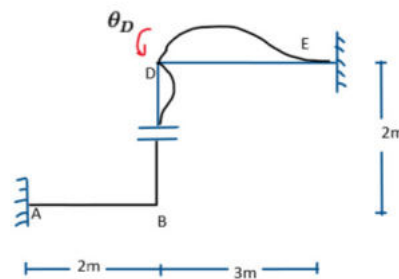


Figura.426 Deformación por rotación en D.





Desplazamiento vertical en B Y_B

La deformada, va a generar un desplazamiento en (Y_b), desde la junta (B), como la biela (C), y la junta (D), todos por el mismo desplazamiento.

Debido al desplazamiento de (Y_b) se generar giros como cuerpo rígido en la barra (A-B) y la barra (D-E).

$$\varphi_{AB.1} = \frac{Y_B}{L_{ab}}$$

$$\varphi_{BC.1} = 0$$

$$\varphi_{CD.1} = 0$$

$$\varphi_{DE.1} = \frac{-Y_B}{L_{ab}}$$

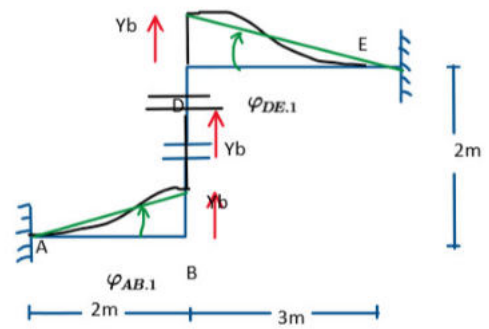


Figura.427 Deformación por desplazamiento en Y_b .

Desplazamiento vertical en C $Y_{c.abaj}$

La deformada, va a generar un desplazamiento en la biela inferior (Y_c), por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido (φ).

Ya que las demás barras (A-B), (C-D), (D-E) no generar giros como cuerpos rígidos serán cero.

$$\varphi_{AB.2} = 0$$

$$\varphi_{BC.2} = \frac{-Y_{c.abaj}}{L_{bc}}$$

$$\varphi_{CD.2} = 0$$

$$\varphi_{DE.2} = 0$$

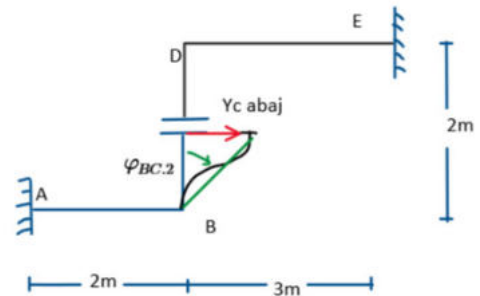


Figura.428 Deformación por desplazamiento en Y_c abajo.

Desplazamiento vertical en C $Y_{c.arr}$

La deformada, va a generar un desplazamiento en la biela superior (Y_c), por tanto, se genera un giro como cuerpo rígido (φ).

$$\varphi_{AB.3} = 0$$

$$\varphi_{BC.3} = 0$$

$$\varphi_{CD.3} = \frac{Y_{c.arr}}{L_{cd}}$$

$$\varphi_{DE.3} = 0$$

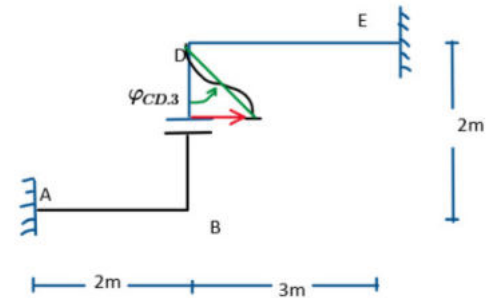


Figura.429 Deformación por desplazamiento en Y_c arriba.

Giros como cuerpo rígidos totales.

Los giros como cuerpo rígidos totales será la suma que se genera para cada deformación.

$$\varphi_{ab} = \varphi_{AB.1} + \varphi_{AB.2} + \varphi_{AB.3} = \frac{Y_B}{L_{ab}}$$

$$\varphi_{bc} = \varphi_{BC.1} + \varphi_{BC.2} + \varphi_{BC.3} = \frac{-Y_{c.abaj}}{L_{bc}}$$

$$\varphi_{cd} = \varphi_{CD.1} + \varphi_{CD.2} + \varphi_{CD.3} = \frac{Y_{c.arr}}{L_{cd}}$$

$$\varphi_{de} = \varphi_{DE.1} + \varphi_{DE.2} + \varphi_{DE.3} = \frac{-Y_B}{L_{ab}}$$



Momentos de Empotramiento.

Barra A-B

Se consideran las fuerzas externas, para el ejemplo, una fuerza distribuida. La fuerza debe ser perpendicular a la barra para aplicar las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.ab} = \frac{q1 \cdot L_{ab}^2}{12} = 1 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.ba} = \frac{-q1 \cdot L_{ab}^2}{12} = -1 \text{ ton} \cdot m$$

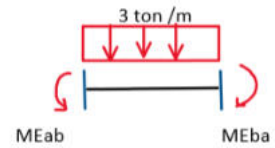


Figura.430 Momento de empotramiento A-B.

Barra B-C

De igual forma, el momento de empotramiento será de acuerdo a las tablas para el caso de carga distribuida.

$$M_{EM.bc} = \frac{q2 \cdot L_{bc}^2}{12} = 8.33 \cdot 10^{-3} \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.cb} = \frac{-q2 \cdot L_{bc}^2}{12} = -8.33 \cdot 10^{-3} \text{ ton} \cdot m$$

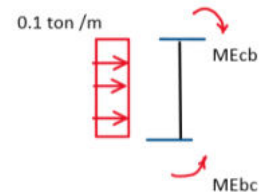


Figura.431 Momento de empotramiento A-B.

Barra C-D

De igual forma, el momento de empotramiento será de acuerdo a las tablas para el caso de carga distribuida.

$$M_{EM.cd} = \frac{q2 \cdot L_{cd}^2}{12} = 8.33 \cdot 10^{-3} \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.dc} = \frac{-q2 \cdot L_{cd}^2}{12} = -8.33 \cdot 10^{-3} \text{ ton} \cdot m$$

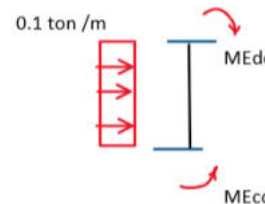


Figura.432 Momento de empotramiento C-D.

Barra D-E

Finalmente, para la barra (D-E) vamos a considerar la carga distribuida con los sentidos de las tablas de momentos de empotramiento.

$$M_{EM.de} = \frac{q1 \cdot L_{cd}^2}{12} = 2.25 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{EM.ed} = \frac{-q1 \cdot L_{cd}^2}{12} = -2.25 \text{ ton} \cdot m$$

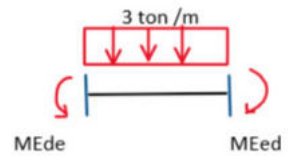


Figura.433 Momento de empotramiento D-E.

Ecuaciones generales de rotaciones.

Barra A-B

Para este caso en la barra al tener un empotramiento en (A), la rotación (ϑ_A), es cero, de igual forma para el caso del empotramiento en (D).

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab}$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba}$$

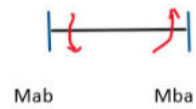


Figura.434 Momentos generales A-B.

Barra B-C

Se considera inicialmente todos los valores de momentos en sentido positivo (anti-horario), al resolver el sistema de ecuaciones los signos señalarán el sentido de los momentos en los extremos.

$$M_{bc} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc}$$

$$M_{cb} = \frac{EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb}$$

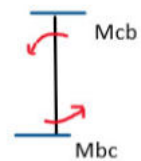


Figura.435 Momentos generales B-C.



Barra C-D

$$M_{cd} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd}$$

$$M_{dc} = \frac{EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc}$$

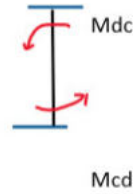


Figura.436 Momentos generales C-D.

Barra D-E

$$M_{de} = \frac{1.5 \cdot EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de}$$

$$M_{ed} = \frac{1.5 \cdot EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed}$$



Figura.437 Momentos generales D-E.

Trabajo virtual.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento Yb

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mp) y (Mt).

$$M_p = \frac{q1 \cdot Lab^2}{2} = 6 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_t = \frac{q1 \cdot L_{de}^2}{2} = 13.5 \text{ ton} \cdot m$$

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{AB.1} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB.1} \cdot (-Mp) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_{de} + M_{ed}) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_t)}{Y_b} = 0$$

$$ECU.4 = \frac{\varphi_{AB.1} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB.1} \cdot (-Mp) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_{de} + M_{ed}) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_t)}{Y_b} = 0$$

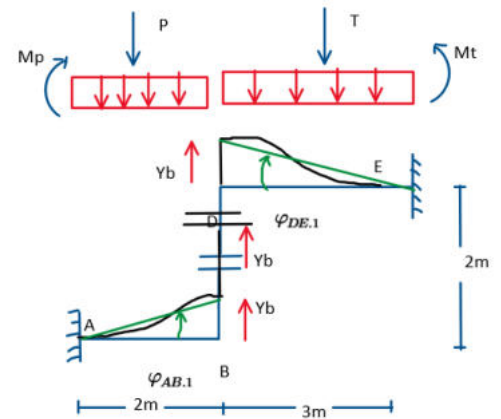


Figura.438 Trabajo virtual para el desplazamiento Yb.

Trabajo virtual aplicado al desplazamiento Yc abajo.

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Ms).

$$M_s = \frac{q2 \cdot Lbc^2}{2} = 0.05 \text{ ton} \cdot m$$

$$\sum T_V = 0$$

$$\frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} \cdot (-Ms)}{Y_{c.abaj}} = 0$$

$$ECU.5 = \frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} \cdot (-Ms)}{Y_{c.abaj}} = 0$$

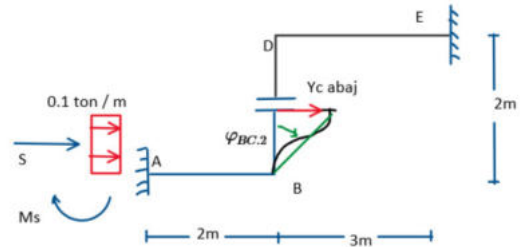


Figura.439 Trabajo virtual para el desplazamiento Yc abajo.





Trabajo virtual aplicado al desplazamiento Yc arriba.

Para aplicar trabajo virtual, se debe trasladar la fuerza externa aplicada sobre el giro como cuerpo rígido, para el ejemplo, la fuerza se transmite al lado opuesto del desplazamiento. Conocido como (Mk).

$$M_k = \frac{q_2 \cdot Lbc^2}{2} = 0.05 \text{ ton} \cdot m$$

$$\sum T_v = 0$$

$$\frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (-Mk)}{Y_{c.arr}} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (-Mk)}{Y_{c.arr}} = 0$$

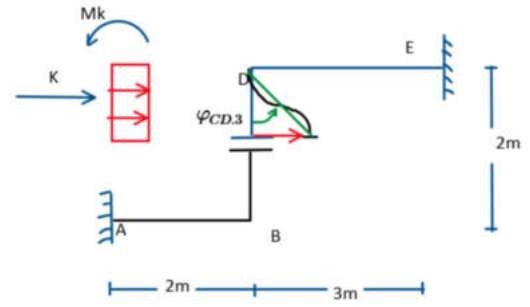


Figura.440 Trabajo virtual para el desplazamiento Yc arriba.

Resolviendo el sistema de ecuaciones.

Ecuaciones:

incógnitas:

$$Ecu.1 = M_{ba} - M_{bc} = 0$$

$$Ecu.2 = -M_{cb} - M_{cd} = 0$$

$$Ecu.3 = -M_{dc} - M_{de} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_B \\ \vartheta_C \\ \vartheta_D \\ Y_b \\ Y_{c.abaj} \\ Y_{c.arr} \end{bmatrix}$$

$$Ecu.4 = \frac{\varphi_{AB.1} \cdot (M_{ab} + M_{ba}) + \varphi_{AB.1} (-Mp) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_{de} + M_{ed}) + \varphi_{DE.1} \cdot (M_t)}{Y_b} = 0$$

$$Ecu.5 = \frac{\varphi_{BC.2} \cdot (M_{bc} + M_{cb}) + \varphi_{BC.2} (-Ms)}{Y_{c.abaj}} = 0$$

$$Ecu.6 = \frac{\varphi_{CD.3} \cdot (M_{cd} + M_{dc}) + \varphi_{CD.3} (-Mk)}{Y_{c.arr}} = 0$$

Incógnitas en función de EI

$$Y_b = \frac{-6.714364641}{EI} \quad \vartheta_B = \frac{-3.591344383}{EI} \quad \vartheta_C = \frac{-1.669152855}{EI} \quad \vartheta_D = \frac{0.2530386738}{EI}$$

$$Y_{c.abaj} = \frac{-2.634415285}{EI} \quad Y_{c.arr} = \frac{-0.7038904237}{EI}$$

Momentos en los extremos.

Barra A-B

$$M_{ab} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (4 \cdot \vartheta_A + 2 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ab} = 7.480 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{ba} = \frac{EI}{L_{ab}} \cdot (2 \cdot \vartheta_A + 4 \cdot \vartheta_B - 6 \cdot \varphi_{AB}) + M_{EM.ba} = 1.888 \text{ ton} \cdot m$$

Barra B-C

$$M_{bc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (4 \cdot \vartheta_B + 2 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.bc} = -1.888 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{cb} = \frac{2 \cdot EI}{L_{bc}} \cdot (2 \cdot \vartheta_B + 4 \cdot \vartheta_C - 6 \cdot \varphi_{BC}) + M_{EM.cb} = 1.938 \text{ ton} \cdot m$$

Barra C-D

$$M_{cd} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (4 \cdot \vartheta_C + 2 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.cd,\Delta t} = -1.938 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{dc} = \frac{2 \cdot EI}{L_{cd}} \cdot (2 \cdot \vartheta_C + 4 \cdot \vartheta_D - 6 \cdot \varphi_{CD}) + M_{EM.dc,\Delta t} = 1.888 \text{ ton} \cdot m$$

Barra D-E

$$M_{de} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (4 \cdot \vartheta_D + 2 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.de} = -1.888 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{ed} = \frac{EI}{L_{de}} \cdot (2 \cdot \vartheta_D + 4 \cdot \vartheta_E - 6 \cdot \varphi_{DE}) + M_{EM.ed} = -6.557$$





Diagrama de cortante.

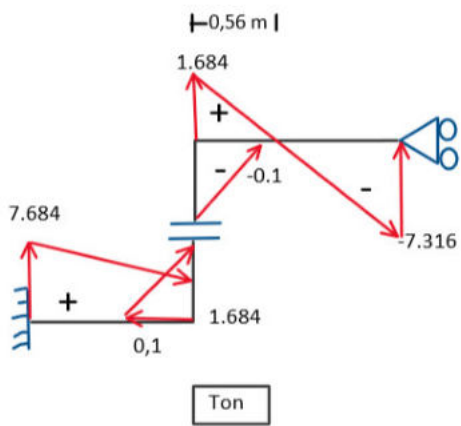


Diagrama de Momento Flector.

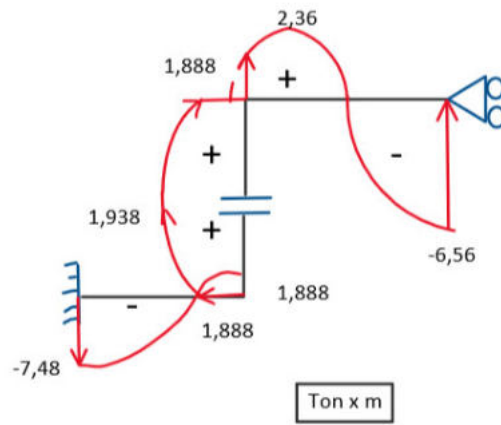


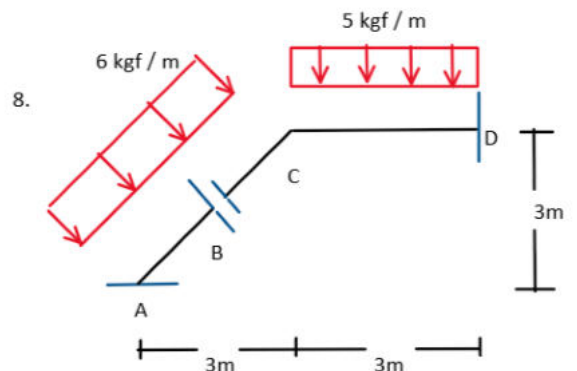
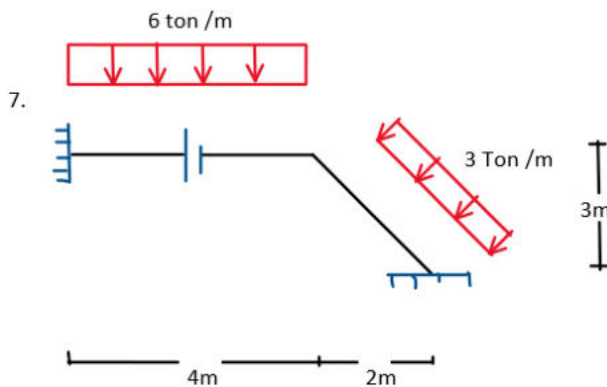
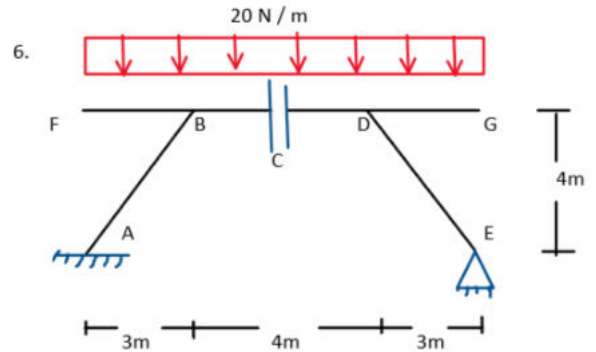
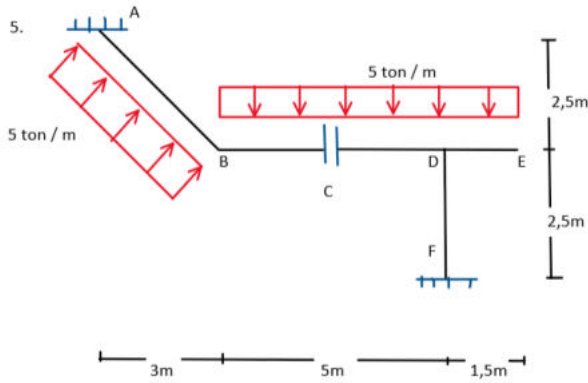
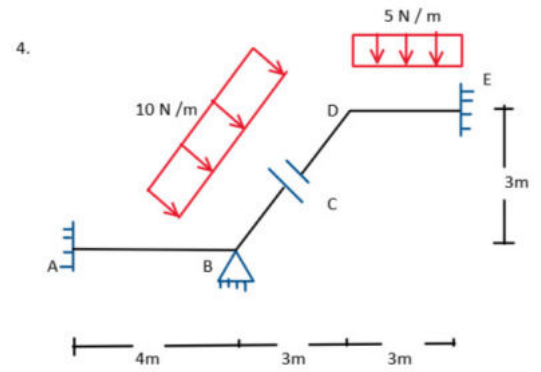
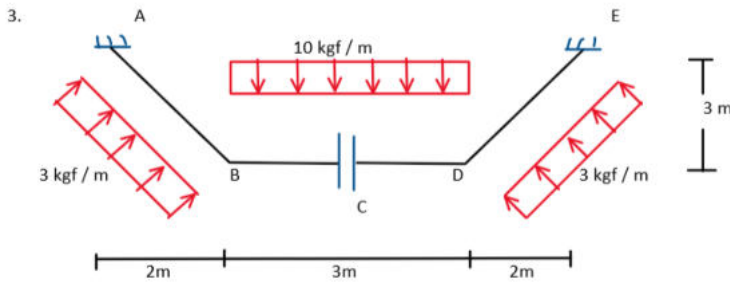
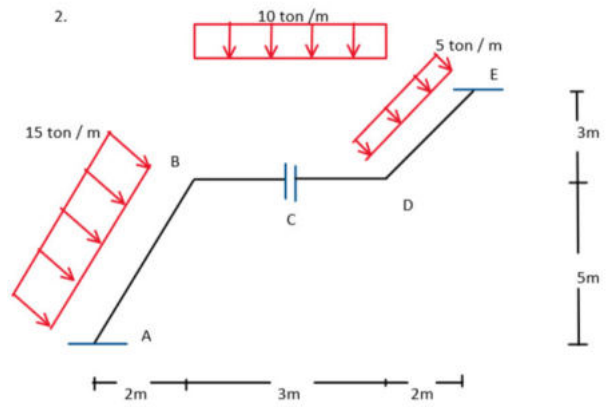
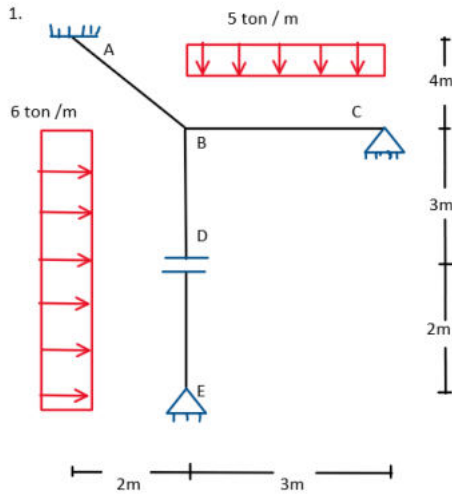
Figura.441 Diagrama de corte y momento del sistema real.





7. Ejercicios Propuestos.

Resolver mediante el método de fuerzas y rotaciones los siguientes ejercicios, obtener los diagramas de corte y momento del sistema real.





Solución Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 1: Grado de Hiperestaticidad GH =3

$$M_{AB} = 2.2 \text{ ton} \cdot m \quad M_{BD} = 15 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BA} = 4.42 \text{ ton} \cdot m \quad M_{DB} = 12 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BC} = 10.58 \text{ ton} \cdot m \quad M_{DE} = 12 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{CB} = 0 \text{ ton} \cdot m \quad M_{ED} = 0 \text{ ton} \cdot m$$

Ejercicio 3: Grado de Hiperestaticidad GH =2

$$M_{AB} = 6.54 \text{ kgf} \cdot m \quad M_{CD} = 7.82 \text{ kgf} \cdot m$$

$$M_{BA} = 3.44 \text{ kgf} \cdot m \quad M_{DC} = 3.44 \text{ kgf} \cdot m$$

$$M_{BC} = 3.44 \text{ kgf} \cdot m \quad M_{DE} = 3.44 \text{ kgf} \cdot m$$

$$M_{CB} = 7.82 \text{ kgf} \cdot m \quad M_{ED} = 6.54 \text{ kgf} \cdot m$$

Ejercicio 5: Grado de Hiperestaticidad GH =2

$$M_{AB} = 6.33 \text{ ton} \cdot m \quad M_{CD} = 11.3 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BA} = 4.35 \text{ ton} \cdot m \quad M_{DC} = 4.35 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BC} = 4.35 \text{ ton} \cdot m \quad M_{DE} = 5.63 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{CB} = 11.3 \text{ ton} \cdot m \quad M_{ED} = 0 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{DF} = 1.28 \text{ ton} \cdot m \quad M_{FD} = 8.88 \text{ ton} \cdot m$$

Ejercicio 7: Grado de Hiperestaticidad GH =2

$$M_{AB} = 7.11 \text{ ton} \cdot m \quad M_{CD} = 7.11 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BA} = 4.9 \text{ ton} \cdot m \quad M_{DC} = 1.39 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BC} = 4.9 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{CB} = 7.11 \text{ ton} \cdot m$$

Ejercicio 2: Grado de Hiperestaticidad GH =2

$$M_{AB} = 104.35 \text{ ton} \cdot m \quad M_{CD} = 40.79 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BA} = 29.53 \text{ ton} \cdot m \quad M_{DC} = 29.53 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{BC} = 29.53 \text{ ton} \cdot m \quad M_{DE} = 29.53 \text{ ton} \cdot m$$

$$M_{CB} = 40.79 \text{ ton} \cdot m \quad M_{ED} = 103.04 \text{ ton} \cdot m$$

Ejercicio 4: Grado de Hiperestaticidad GH =1

$$M_{AB} = 5.46 \text{ N} \cdot m \quad M_{CD} = 11.48 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{BA} = 11.03 \text{ N} \cdot m \quad M_{DC} = 11.03 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{BC} = 11.03 \text{ N} \cdot m \quad M_{DE} = 11.03 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{CB} = 11.48 \text{ N} \cdot m \quad M_{ED} = 0.35 \text{ N} \cdot m$$

Ejercicio 6: Grado de Hiperestaticidad GH =1

$$M_{AB} = 0 \text{ N} \cdot m \quad M_{CD} = 15.43 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{BA} = 34.59 \text{ N} \cdot m \quad M_{DC} = 55.45 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{BC} = 55.45 \text{ N} \cdot m \quad M_{DE} = 34.59 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{CB} = 15.43 \text{ N} \cdot m \quad M_{ED} = 0 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{FB} = 0 \text{ N} \cdot m \quad M_{DG} = 90.04 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{BF} = 90.04 \text{ N} \cdot m \quad M_{GD} = 0 \text{ N} \cdot m$$

Ejercicio 8: Grado de Hiperestaticidad GH =2

$$M_{AB} = 8.17 \text{ kgf} \cdot m \quad M_{CD} = 8.17 \text{ kgf} \cdot m$$

$$M_{BA} = 5.34 \text{ kgf} \cdot m \quad M_{DC} = 1.71 \text{ kgf} \cdot m$$

$$M_{BC} = 5.34 \text{ kgf} \cdot m$$

$$M_{CB} = 8.17 \text{ kgf} \cdot m$$





8. Referencias.

Bibliografía:

Aguiar Falconi, R. (2004). *Análisis Matricial de Estructuras* . Quito: CEINCI.

Blanco Claraco, J. L., González Herrera, A., & García Manriquez, J. M. (2012). *Análisis Estático de Estructuras por el Método Matricial* . Málaga: PUBLIDISA.

Leet, K., & Ming Uang, C. (2006). *Fundamentos de Análisis Estructural* . México D.F: Litográfica Ingramex, S.A.

Luchsinger, C. (1980). *Estructuras*. Caracas: Constructora Mayca, C.A.

Malavé Cariello , J., & Ojeda Meléndez , A. (2017). *Método de las fuerzas* . Valencia: Universidad de Carabobo.

Soto Ortiz, D. (2014). *Análisis de Estructuras* . México. D.F: LIMUSA.

Timoshenko, S. (1957). *Resistencia de Materiales Teoría Elemental* . Madrid: Spasa-Calpe, S.A.