



UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ

**CARACTERIZACIÓN DE LAS ONDAS  
DE CHOQUE OBLICUAS EN EL  
FLUJO SUPERSÓNICO A TRAVÉS DE  
UN TURBO ESTATOR USANDO  
TÉCNICAS DE CFD**

**Autor:**

José Gregorio Terán Barazarte

C.I.: 22.214.159

Urb. Yuma II, Calle N° 3, Municipio San Diego  
Teléfono: (0241) 8714240 (Master) - Fax: (0241) 871239



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

**CARACTERIZACIÓN DE LAS ONDAS DE CHOQUE OBLICUAS EN EL  
FLUJO SUPERSÓNICO A TRAVÉS DE UN TURBO ESTATOR USANDO  
TÉCNICAS DE CFD**

Proyecto del trabajo de grado para optar al título de  
**INGENIERO MECÁNICO**

**Autor:** José Gregorio Terán Barazarte

C.I.: 22.214.159

**Tutor:** Ing. Gruber A. Caraballo V.

San Diego, Junio 2019





REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

### ACEPTACIÓN DEL TUTOR

Quien suscribe, Ingeniero Gruber A. Caraballo V. portador de la cédula de identidad N° 12.014.408, en mi carácter de tutor del trabajo de grado presentado por el ciudadano José Gregorio Terán Barazarte, cédula de identidad N° 22.214.159, titulado **“CARACTERIZACIÓN DE LAS ONDAS DE CHOQUE OBLICUAS EN EL FLUJO SUPERSÓNICO A TRAVÉS DE UN TURBO ESTATOR USANDO TÉCNICAS DE CFD”** presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Mecánico, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En San Diego, a los diez días del mes de Junio del año dos mil diecinueve.

Firma

Ing. Gruber A. Caraballo V.

C.I.: 12.014.408

Tutor Académico

AGRADECIMIENTOS

A **Dios**, por permitirme llegar tan lejos, con esfuerzos sudor y lagrimas alcanzando y superando todas las metas que te brinda cada semestre, por realizar este trabajo de grado y colocar a cada una de las personas que de una manera u otra influyo en el cumplimiento de este objetivo en tan corto periodo de tiempo, haciendo este desafío posible.

A **mis padres**, por demostrarme con su constancia y dedicación que cualquier objetivo se puede lograr si estamos dispuestos hacer lo que tenemos que hacer de manera oportuna y que cada logro conlleva un sacrificio que vale la pena hacer.

A **mi hermana**, sin cuyo apoyo y palabras de aliento hubiese sido aún más difícil enfrentar este desafío. A **mi familia**, por su apoyo incondicional y su completa disposición a ayudarme en lo que su alcance les permitiese.

A **mi novia**, sin cuyo apoyo y motivación y ayuda hubiese sido aún más difícil enfrentar este semestre extraordinario.

A quien me enorgullece llamar mi amigo, maestro, tutor y padrino de promoción **Gruber Caraballo**, sin cuyo apoyo y largas horas de dedicación, este objetivo de hacer un trabajo de grado en un semestre extraordinario habría quedado en no más que una idea.

## ÍNDICE GENERAL

## ÍNDICE GENERAL

CONTENIDO	PP
ÍNDICE DE CUADROS.....	ix
ÍNDICE DE FIGURAS.....	ix
RESUMEN.....	x
INTRODUCCIÓN.....	1

### CAPÍTULO

#### I EL PROBLEMA

1.1	Plantamiento del problema.....	3
1.2	Formulación del problema.....	6
1.3	Objetivos de la investigación.....	6
1.3.1	Objetivo general.....	6
1.3.2	Objetivos específicos.....	6
1.4	Justificación.....	6
1.5	Limitaciones.....	7
1.6	Alcance.....	7

#### II MARCO TEÓRICO

2.1	Antecedentes de la investigación.....	8
2.2	Bases teóricas.....	11
2.2.1	Expresiones para un gas ideal.....	11
2.2.2	Expresiones para la entropía.....	13
2.2.3	Velocidad del sonido y número de Mach.....	14
2.2.4	Ondas de choque.....	18
2.2.5	Ondas de expansión de Prandtl-Meyer.....	21
2.2.6	Modelación matemática.....	23
2.2.6.1	Ecuación de la continuidad.....	24
2.2.6.2	Ecuación de momentum.....	24
2.2.6.3	Ecuación de la energía total.....	25
2.2.6.4	Ecuación de Navier-Stokes.....	25
2.2.7	Modelo de turbulencia eddy viscosity.....	29
2.2.8	Modelo de turbulencia kappa-epsilon ( $k-\epsilon$ ).....	30
2.2.9	Modelo de turbulencia kappa-omega ( $k-w$ ).....	31
2.2.10	Modelo shear stress transport (SST).....	32
2.2.11	Niveles de aproximación numérica.....	32
2.2.12	Método de solución numérica.....	35
2.2.13	Método de discretización.....	36

2.2.14	Mallado o discretización numérica.....	37
2.2.14.1	Mallas estructuradas.....	41
2.2.14.2	Mallas no estructuradas.....	42
2.3	Definición de terminus básicos.....	44

### III MARCO METODOLÓGICO

3.1	Tipo de investigación.....	46
3.2	Diseño de la investigación.....	46
3.3	Nivel de la investigación.....	47
3.4	Población y muestra.....	47
3.5	Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	48
3.6	Fases metodológicas.....	49

### IV RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1	Investigación sobre las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo supersonico en un turbo estator.....	52
4.2	Modelado mediante una herramienta CAD del turbo reactor.....	52
4.3	Elección del modelo matemático adecuado para el estudio del flujo...	54
4.4	Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD.....	54
4.4.1	Geometría.....	55
4.4.2	Discretización del dominio.....	55
4.4.3	Configuración del dominio.....	56
4.4.4	Covergencia de las simulaciones.....	62
4.4.5	Obtención de resultados.....	63
4.5	Descripción de las variables en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su interpretación.....	65
4.5.1	Caracterización del campo de Flujo para $M=0,8$ .....	67
4.5.2	Caracterización del campo de Flujo para $M=4$ .....	69
4.5.3	Caracterización del campo de Flujo para $M=8$ .....	72
4.5.4	Cálculo del empuje del turbo estator.....	73
	CONCLUSIONES.....	77
	RECOMENDACIONES.....	79
	BIBLIOGRAFÍA.....	80

### ÍNDICE DE TABLAS

TABLA		PP
1	Tipo de flujo según el número de Mach.....	18
2	Escenarios para la simulación.....	59

3	Cambios en las variables para $M=0,8$ .....	67
4	Cambios en las variables para $M=4$ .....	69
5	Cambios en las variables para $M=8$ .....	73
6	Cálculo del empuje en función del número de Mach.....	74

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA		PP
1	Funcionamiento de a) turbojets, b) ramjet y c) scramjets.....	4
2	Propagación de una pequeña onda de presión a lo largo de un ducto.....	15
3	Volumen de control en la onda infinitesimal.....	16
4	Choque oblicuo sobre una pared.....	20
5	Vectores de velocidad descompuestos de un choque oblicuo.....	21
6	Variedad de ondas de choque posible para un determinado número de Mach de flujo libre.....	22
7	Ondas de expansión generadas por una cuña bidimensional.....	24
8	Técnicas de aproximación numérica en mecánica de fluidos.....	36
9	Malla estructurada.....	39
10	Cuadrícula estructurada en 2D.....	40
11	Mallado estructurado con interfaz ajustada.....	41
12	Mallado estructurado en bloque 2D sin interfaces ajustadas.....	41
13	Mallado compuesto en 2D.....	42
14	Malla no estructurada.....	44
15	Ejemplo de mallado no estructurado en 2D.....	44
16	Modelo del turbo estator.....	53
17	Proceso de simulación para ANSYS <sup>®</sup> Workbench CFX <sup>®</sup> .....	54
18	Aspectos generales del mallado.....	56
19	Número de nodos y de elementos.....	57
20	Configuración de los parámetros básicos del dominio.....	57
21	Modelo matemáticos de transferencia de energía y turbulencia.....	58
22	Condiciones de entrada para el dominio fluidizado.....	60
23	Condiciones de salida para el dominio fluidizado.....	60
24	Pared interna del turbo estator.....	61
25	Pared externa del turbo estator.....	61
26	Parámetros para el control de las simulaciones.....	63
27	Convergencia de las ecuaciones para el escenario II.....	64
28	Distribución de presiones de prueba para $DP=600$ kPa.....	66
29	Detalle del frente de onda y las de choque oblicuas.....	66
30	Planos transversales en la entrada y salida del turbo estator...	67
31	Distribución de presiones para $M=0,8$ .....	68

<b>32</b>	Contornos de presiones para $M=0,8$ .....	68
<b>33</b>	Líneas de corriente para $M=0,8$ .....	69
<b>34</b>	Contornos de presiones para $M=4$ .....	70
<b>35</b>	Ondas de choque oblicuas para $M=4$ .....	71
<b>36</b>	Depresión en la parte posterior del cono del turbo estator para $M=4$ .	71
<b>37</b>	Distribución de presiones para $M=8$ .....	72
<b>38</b>	Contornos de presiones para $M=8$ .....	72
<b>39</b>	Ondas de choque oblicuas para $M=8$ .....	73
<b>40</b>	Gráfico del empuje axial en función del número de Mach.....	75



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE MECÁNICA

## **CARACTERIZACIÓN DE LAS ONDAS DE CHOQUE OBLICUAS EN EL FLUJO SUPERSÓNICO A TRAVÉS DE UN TURBO ESTATOR USANDO TÉCNICAS DE CFD**

**Autor:** José Gregorio Terán Barazarte

**Tutor:** Ing. Gruber A. Caraballo V.

**Fecha:** Marzo 2019

### **RESUMEN INFORMATIVO**

La presente investigación consistió en la caracterización de ondas de choque oblicuas como el resultado del flujo supersónico a través de un turbo estator (scramjet) utilizando técnicas de aproximación numérica CFD (computational fluid dynamics por sus siglas en inglés). Con ello se analizó el comportamiento del campo de flujo, su interacción y la influencia que tiene el régimen supersónico por medio del número de Mach en el campo escalar de presión y el campo vectorial de velocidad para obtener patrones de flujo en forma de data, curvas y gráficos que nos permitan comprender las irreversibilidades termodinámicas presentes. El principal objetivo es lograr las diferentes condiciones que permitirían la aparición del fenómeno de ondas de choque oblicuas, por lo que se espera que por medio de la dinámica de fluidos computacional, CFD, se puedan usar isosuperficies y un mallado mixto para visualizar los ángulos de las ondas. La técnica CFD permite evaluar las ecuaciones de dinámica de fluidos que no se pueden trabajar analíticamente debido a sus complejidades matemáticas, es decir, se usa para resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS), evitando así los costos en equipos e instalaciones de pruebas.

**Descriptor:** scramjet, turbo estator, flujo compresible, dinámica de fluidos computacional (CFD), ondas de choque oblicuas.

## INTRODUCCIÓN

Cuando se aborda un problema de mecánica de fluidos se tienen, en principio, tres caminos: el análisis matemático o analítico, las mediciones experimentales en bancos de pruebas o ensayos y la simulación mediante el uso de software de dinámica de fluidos computacional o CFD.

El modelo matemático más general, que describe la dinámica de los fluidos, tales como las ecuaciones de Navier-Stokes, se han mantenido invariantes por casi dos siglos, sin embargo presentan el gran inconveniente de formar, en conjunto, un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, cuya solución analítica resulta inviable excepto para casos muy particulares. Estas soluciones cerradas que pueden conseguirse son útiles para mejorar nuestra comprensión sobre el comportamiento de los fluidos, pero su aplicación a problemas de ingeniería son muy limitadas.

La experimentación es fundamental en todas las áreas de la ingeniería. En el caso particular de la Ingeniería Mecánica, los estudios alrededor de perfiles aerodinámicos, cámaras de combustión, toberas y otros elementos de flujo interno o externo, tienen una desventaja, debido a que los ensayos se realizan en túneles de viento y son altamente costosos, especialmente si se trata de ensayos de flujo supersónico. Por otro lado, existen innumerables situaciones donde la experimentación no es factible por razones técnicas o tecnológicas.

Por su parte, la simulación numérica es en la actualidad una de las principales herramientas para el cálculo y diseño en el campo de la Ingeniería Mecánica, dado que permite abordar problemas cuyo estudio no era posible pocas décadas atrás y, además, a lo largo de su desarrollo ha probado ser un método eficaz, preciso, robusto y sumamente flexible. Si se desea afrontar un problema mediante la dinámica de los Fluidos Computacional (CFD), se tienen en general tres opciones: adquirir un software comercial (ANSYS Fluent, COMSOL Multiphysics, etc.), crear un código nuevo o utilizar paquetes de libre distribución (Dolfin, OpenFOAM, entre otros). Programar

un código para simulación de flujos requiere mucho tiempo y conocimientos específicos sobre programación, métodos numéricos y sobre la física involucrada.

El caso particular del flujo que aquí se estudia es un campo supersónico que se mueve a través de un turboestator usado en motores de propulsión aeroespaciales, con la finalidad de caracterizar los fenómenos de ondas de choque oblicuas que como irreversibilidades termodinámicas crean problemas en el régimen de flujo, desacelerándolo.

Como instrumentos de validación para las simulaciones existen desarrollos analíticos y puede encontrarse en la bibliografía específica con una vasta diversidad de resultados numéricos.

En el **capítulo I** el problema es el protagonista, desglosándolo para obtener su correcto planteamiento, formulación del problema y, por otra parte, plasmar el objetivo general y los específicos, justificando la presente investigación y exponiendo su alcance y limitaciones. Posteriormente en el **capítulo II** se hace referencia a los antecedentes consultados, así como a toda la terminología y conceptos necesarios que representan la base para el desarrollo del estudio.

Por su parte el **capítulo III** muestra la metodología que se va a implementar, se describe el tipo de investigación las técnicas y los procedimientos para llevar a cabo la misma. Donde, se explica detalladamente las diversas fases y actividades que conforman el aspecto experimental. Por último, se lleva a cabo el cumplimiento de los objetivos en el **capítulo IV**, en el cual se detallan los resultados en forma de datos y representaciones gráficas, obtenidos según las fases metodológicas definidas en el capítulo anterior.

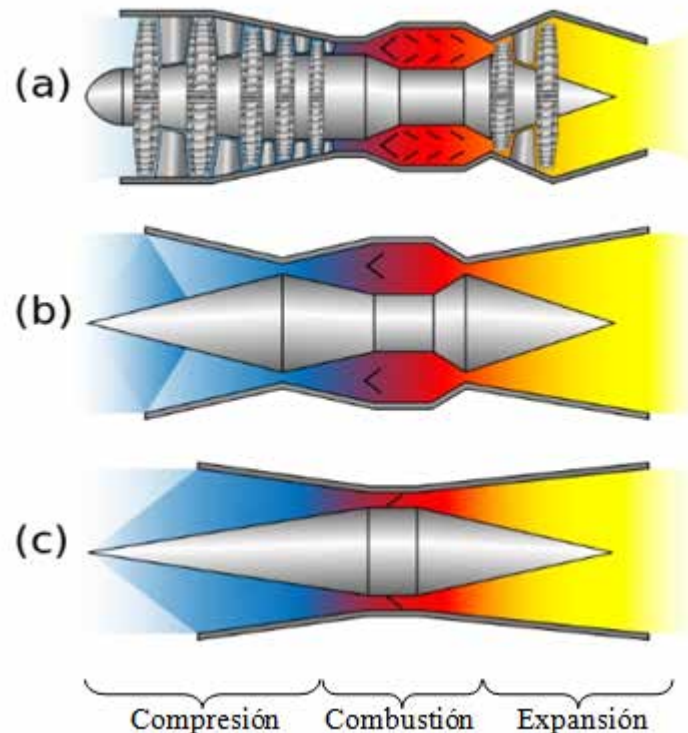
# CÁPITULO I

## EL PROBLEMA

### 1.1 Planteamiento del problema

Para lograr la propulsión en aviones comerciales y militares, cohetes espaciales, o misiles se utilizan diferentes tecnologías, ya sea turbo reactor (turbojet), turbo ventilador (turbofan), turbo estator (ramjet) y turbo estator de combustión supersónica (scramjet) respectivamente. De aquí en adelante se usaran los términos en ingles para los diferentes sistemas de propulsión. En cuanto a turbofan y turbojet el aire es ingresado por un ventilador o compresor que envía aire comprimido hacia una cámara de combustión, y posteriormente estos gases, en su mayoría aire, son expandidos en una turbina de gas que produce trabajo. El aire sale como gases de descarga hacia la atmósfera por medio de una tobera, convirtiendo su energía cinética a fuerza que empuja al sistema. En estos tipos de sistemas encontramos flujo a alta velocidad, toberas supersónicas convergentes divergentes, combustión supersónica o subsónica, compresión y expansión en compresores y turbinas, gases de descarga entre otros. La diferencia entre ramjet y scramjet de turbojet y turbofan es que estos sistemas no cuentan con partes móviles dentro de su funcionamiento, sólo dependen del movimiento de sí mismo para mantener una propulsión uniforme y están diseñados para vuelos supersónicos e hipersónicos. Para un scramjet o un ramjet, al no tener un compresor para la succión de aire, este debe ser introducido por un conducto tipo difusor que lo comprime y lo envía directamente al combustor, como se muestra en la figura 1. Para un vuelo supersónico es necesaria la disminución de la velocidad del flujo para ser quemado posteriormente en una cámara de combustión, aumentar su energía a los gases y posteriormente acelerar los gases por medio de una tobera convergente divergente, entonces estos gases son descargados en un chorro de alta velocidad para producir propulsión.

El flujo de fluidos es un fenómeno común en la vida diaria, esencialmente empleado en diversos procesos afines a la ingeniería como lo son las turbomáquinas, aplicaciones de hidrodinámica, hidráulica, entre otros. Por lo que es importante el estudio, control y manejo de los fluidos.



**Figura 1:**

**Figura 1. Funcionamiento de a) turbojets, b) ramjet y c) scramjets.**

Fuente: Aguilar C. (2014)

La diferencia entre un scramjet y un ramjet es que mientras el ramjet está diseñado para quemar la mezcla aire combustible a velocidades de flujo subsónicas, el scramjet lo hace a velocidades supersónicas. Esta configuración que se presenta en régimen supersónico es más eficiente por el hecho de contener más energía cinética en el chorro. Sin embargo es aquí donde se presenta el problema de quemar la mezcla a velocidades muy altas (supersónicas) ya que la combustión por la velocidad del flujo se debe lograr en un lapso de tiempo muy breve. Mientras el scramjets está limitado por dificultades técnicas extremas, se sabe que su vuelo hipersónico dentro de la atmósfera genera inmenso arrastre, y temperaturas que se encuentran en la aeronave y en el motor puede ser mucho mayor que la del aire circundante. El mantenimiento de la combustión

en el flujo supersónico presenta retos adicionales, como el combustible debe ser inyectado, mezclado, encendido y quemado en cuestión de milisegundos. Por esta razón se estudió el ramjet que puede operar a velocidades subsónicas lentas alrededor de Mach 0,5 pero son altamente ineficaces debido a los bajos índices de presión. La eficiencia es buena en Mach 2 y Mach 4.

Como el ramjet está diseñado para quemar combustible a altas velocidades y alcanzar velocidades hipersónicas se da una compresión del flujo que puede generar una auto-ignición y así surge el problema de tener esfuerzos excesivos adicionales que causan deformaciones y fatiga en los materiales.

En otro sentido una solución al problema ha provenido del uso de nuevos materiales compuestos a base de cerámicas y carbono, así como de su misma capacidad de manejar altos gradientes de temperatura y absorción de calor que junto a sistemas de enfriamiento consiguen enfriar suficientemente el flujo. Esto evita que el combustible detone antes de la combustión. Otra respuesta ha sido dada por el diseño mismo del ramjet. Un conducto que controla la producción de ondas de choque oblicuas que parcialmente comprimen en menor grado, y disminuyen la velocidad en mayor grado, ha sido añadido.

La combustión supersónica presenta uno de los problemas de mayor complejidad debido que la formación de ondas de choque en el chorro de inyección genera bajas eficiencias de mezclado. El problema de la presencia de choques y expansiones dentro del chorro, ha sido observado por medio de técnicas ópticas, experimentales que conlleva un elevado costo de investigación, también son estudiadas de manera analítica mediante complejos sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y cuya solución requiere de una sólida formación en matemáticas, por otro lado en los últimos años se han usado las técnicas de aproximación numérica aplicada a la mecánica de fluidos conocida como “Dinámica de Fluidos Computacional” o CFD y en el mercado existen programas comerciales y/o software libres que permiten simular en forma aceptable las condiciones del flujo supersónico.

Es por esto que el uso de herramientas computacionales, a través de la aproximación numérica o discretización del flujo, es el método con el que se proyecta realizar el estudio de este fenómeno, ya que permite predecir con gran exactitud las propiedades del flujo supersónico considerando la presencia de ondas de choque oblicuas en un turbo estator. Por lo señalado anteriormente, es importante estudiar las condiciones en las cuales se forman las ondas de choque oblicuas en el campo de flujo y caracterizarlas, para describir como afectan al flujo.

## **1.2 Formulación del problema**

¿Cómo se podrían describir las variables que forman el campo de flujo supersónico a través de un turbo estator utilizando dinámica de fluidos computacional?

## **1.3 Objetivos de la investigación**

### **1.3.1 Objetivo general**

Caracterizar las ondas de choque oblicuas en el flujo supersónico a través de un turbo estator usando técnicas de CFD.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

1. Investigar acerca de las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo supersónico en un turbo estator.
2. Modelar mediante una herramienta CAD de un turbo estator.
3. Elegir el modelo matemático adecuado para el estudio del flujo.
4. Simular el campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD.
5. Describir las variables en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su interpretación.

## **1.4 Justificación**

Con el transcurso del tiempo, la era tecnológica y computacional ha dado paso a un sinnúmero de posibilidades de estudio, las mismas otorgan un procesamiento de datos en un corto plazo de tiempo, consiguiendo así resultados que años atrás hubiesen significado días, semanas e incluso meses de cálculos de manera analítica. La

ingeniería se ha visto altamente beneficiada de estos avances, siendo hoy en día esenciales para su continuo desarrollo.

El estudio de comportamiento de fluidos no es excepción de lo anteriormente explicado, la dinámica de fluidos computacional o CFD (Computational fluid dynamics) tiene como objeto la simulación del flujo de gases o líquidos, para simplificar el estudio de una infinidad de fenómenos que estos representan. Esto se logra por medio de la utilización de métodos numéricos, para describir el comportamiento del caso en cuestión, convirtiéndose así en una herramienta inestimable para el análisis y diseño.

En consecuencia, emplear estos métodos para el estudio de la compresibilidad del campo de flujo en la sección de entrada o ataque de un turbo estator, permitirá la caracterización del flujo con mayor detalle y obtener resultados cercanos a la realidad sin recurrir a un banco de ensayos reales que no se disponen o sería muy costoso construirlos.

### **1.5 Limitaciones**

Durante la investigación se presentaron las siguientes limitantes:

El pensum carece de una cátedra especializada en el estudio computacional de la dinámica de fluidos, lo que podría derivar en impedimentos al utilizar la herramienta o software para la resolución de los modelos matemáticos adecuados.

Es necesario el modelado geométrico de gran exactitud y un mallado de alta calidad, requiriéndose así computadores con procesadores de elevado rendimiento, teniendo en cuenta que, para obtener resultados más cercanos a la realidad, es conveniente mallados de alta precisión.

La escasa información de los pocos estudios realizados acerca del comportamiento real de los turbo estatores, cuya gran mayoría son realizados en ambientes sumamente controlados y grandes laboratorios de las empresas aeronáuticas y para aplicaciones específicas en la propulsión civil y militar.

La ausencia de un banco experimental donde se ensaye el turbo estator para la verificación de los resultados obtenidos.

## **1.6 Alcance**

La presente investigación abarcará exclusivamente el estudio del campo de flujo supersónico en la sección de entrada de un turbo estator, ya que tomando en cuenta el tiempo establecido, no se indagará en otro tipo de consideraciones en el campo de flujo y/o procesos de combustión que pudiesen ocurrir. Por lo tanto, tampoco se indagará en los cambios que puedan sufrir las propiedades por la presencia de intercambios de energía externa, como lo son la transferencia de calor generada, por lo que en todo momento se considerará flujo estacionario sin transferencia de calor o interacciones de trabajo y sin cambio de energía potencial y en las ondas de choque oblicuas el flujo será considerado irreversible y adiabático.

El estudio y la simulación numérica sólo serán referidas para un modelo matemático específico, así como los resultados obtenidos sólo serán aplicables a la geometría del turbo estator diseñado. Los resultados obtenidos serán arrojados en forma de datos y mediante el uso de gráficos obtenidos numéricamente de las variables que describen el fenómeno.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 Antecedentes de la investigación

Las investigaciones en el análisis numérico y en el desarrollo de modelos computacionales para el estudio de la dinámica de fluidos son de data reciente, y es muy escasa la cantidad de investigadores que han incursionado en esta área, siendo aún mucho menor el desarrollo de investigaciones en función del análisis y comportamiento numérico/computacional de las ondas de choque oblicuas en regímenes de flujo supersónico a través de un turbo estator. Sin embargo se pueden destacar:

C. Granados (2019). En su tesis de grado titulada **“Estudio del campo de flujo compresible en la descarga de una tobera convergente-divergente utilizando técnicas de aproximación numérica”**, presentada en la Universidad José Antonio Páez y basada en el estudio del campo de flujo compresible en la descarga de una tobera convergente – divergente, analizando su comportamiento según la geometría de las diferentes ondas de choque y de expansión en la estela del flujo, a través de técnicas de aproximación numérica utilizando una herramienta de dinámica de fluidos computacional. Una vez analizados los resultados arrojados por aquella, se llegó a la conclusión de que la principal variable en el comportamiento del campo de flujo compresible en dicha zona, es el diferencial de presión que existe entre la entrada y la salida de la tobera, el cual al estar en el orden de los 750 kPa generara una estela supersónica..

El presentado antecedente, fue la base para la realización de esta investigación, debido al estudio realizado a las ondas de choque oblicuas y como aquellas afectan de manera importante el fluido. No menos importante, siendo también de gran aporte el método de análisis numérico computacional a partir de una CFD de amplio espectro en el mercado como ANSYS® Workbench, para la posterior comparación de los modelos matemáticos existentes, siendo una guía explícita del procedimiento de cálculo.

También, C. Aguilar (2014). En su trabajo titulado **“Simulación numérica de tópicos de flujo supersónico: chorro supersónico subexpandido y flujo supersónico sobre un cuerpo con perfil de cápsula espacial”**, tesis presentada en la escuela de ingeniería mecánica de la Universidad Nacional Autónoma de México y con la finalidad de simular las estructuras de choque en un chorro supersónico circular y analizar su comportamiento frente a la variación del número de Mach para encontrar un intervalo donde las ondas de choque no aumenten y validar el código numérico por medio de la comparación de frecuencias de oscilación con datos experimentales y numérico, estudiando también las zonas características tales como ondas de choque y expansiones para el perfil aerodinámico de una cápsula espacial. El carácter físico de los distintos términos son explicados, tales como: la deformación volumétrica, el gradiente de presión, el término viscoso y convectivo entre otros. Por último se detalla la teoría del modelo de turbulencia de grandes escalas, necesaria para resolver estructuras turbulentas.

Este antecedente apoyó la investigación debido a que se realiza una simulación CFD de un flujo externo compresible y la metodología para su realización es de utilidad, sobre todo en la caracterización de las propiedades del campo, y posteriormente el establecimiento de las características del mismo.

[Así mismo, J.G. Garrido, E. Hernández-Martínez, M. Toledo, J. Ortega y P. Quinto-Diez (2016), en su artículo **“Evaluación de las características de las ondas de choque oblicuas en un perfil aerodinámico de doble cuña”** publicado en Engineer-ing 8, del Instituto Politécnico Nacional y donde se estudió desde el punto de vista numérico y experimental las características aerodinámicas en un flujo supersónico sobre un plano aerodinámico de cuña doble utilizando el software ANSYSÒ Fluentä y un túnel de viento supersónico, respectivamente. También se usó el método de visualización Schlieren para desarrollar la parte experimental del estudio. En el túnel de viento supersónico el número de Mach alcanzó aproximadamente 1.8. El resultado de la experimentación condujo a la visualización de las ondas de choque oblicuas en la

superficie aerodinámica de doble cuña y la simulación numérica, presentó el comportamiento del flujo en función del número de Mach, la presión, la temperatura y la densidad en el campo de flujo del modelo computacional. La simulación permitió observar las ondas de choque y el campo de expansión en el borde anterior y posterior del perfil aerodinámico de doble cuña. Una comparación entre el desarrollo numérico computacional y el aporte experimental, para el ángulo de la onda de choque y el número de Mach, arrojó una diferencia porcentual de 1,17%.

El mencionado antecedente contribuyó como modelo de comparación con la presente investigación ya que por la carencia de datos disponibles en la industria aeroespacial acerca del comportamiento de turboestatores, resulta un importante aporte documental para el presente estudio.

Por último, G. Mohan Kumar, G. Manoj Kannan y R. Vignesh Kumar (2014), en su artículo titulado “**Análisis de las ondas de choque sobre un perfil NACA 66-206 en régimen supersónico**” publicado en *Advances in Aerospace Science and Applications*, el cual consiste en el estudio de un Aerofoil que es un elemento primario que se diseña durante la fase inicial de creación de cualquier avión nuevo. Es el componente que forma la sección transversal del ala. El ala se utiliza para producir una fuerza de elevación que equilibra el peso que actúa hacia abajo. La fuerza de elevación se crea debido a la diferencia de presión sobre la superficie superior e inferior causada por la variación de la velocidad, y precisamente es una velocidad crítica de vuelo donde se produce una pérdida repentina en el número de Mach y la sustentación dependiendo de la forma del perfil aerodinámico, el ángulo de ataque y el grosor del perfil aerodinámico. En esta investigación, se diseñó y analizó un perfil aerodinámico supersónico NACA 66-206 utilizando técnicas de CFD para estudiar el impacto y las propiedades aerodinámicas en diferentes números de Mach (1.2, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0).

Este último antecedente consultado, representó una guía para el procedimiento de cálculo y adecuación de la herramienta computacional con base en el uso del método de elementos finitos en la dinámica de fluidos computacional.

## 2.2 Bases teóricas

De acuerdo con Arias (2006), “Las bases teóricas implican un desarrollo amplio de los conceptos y proposiciones que conforman el punto de vista o enfoque adoptado, para sustentar o explicar el problema planteado” (p.107). Por lo tanto, la correcta realización de las bases teóricas permitirá no solo obtener un sustento sobre el cual se podrá realizar el apropiado y acorde análisis de resultados, sino que también ayudará a explicar la problemática a partir de un conjunto de teorías y supuestos ya establecidos y publicados.

### 2.2.1 Expresiones para un gas ideal

Cualquier ecuación que relacione la presión, la temperatura y la densidad (o volumen específico) de una sustancia se llama ecuación de estado. La ecuación de estado más sencilla y conocida para sustancias en la fase gaseosa es la ecuación de estado del gas ideal, expresada como:

$$P = \rho RT \quad (1)$$

Un gas ideal es una sustancia hipotética que obedece la ecuación 1. De manera experimental se ha observado que esta relación se aproxima con una buena precisión al comportamiento P-v-T de los gases reales a bajas densidades. A bajas presiones y altas temperaturas, la densidad de un gas decrece y tal gas se comporta como un gas ideal. En el rango del interés práctico, muchos gases conocidos como aire, nitrógeno, oxígeno, hidrógeno, helio, argón, neón y kriptón, e inclusive gases más pesados, entre ellos bióxido de carbono, se pueden tratar como gases ideales con error despreciable. Sin embargo, los gases densos, como el vapor de agua en las plantas generadoras y el vapor refrigerante empleado en los refrigeradores, no deben tratarse como gases ideales porque suelen existir en un estado cercano a la saturación. Para un gas ideal se definen dos capacidades caloríficas molares: a volumen constante ( $C_v$ ), y a presión constante ( $C_p$ ). Donde:

$C_v$ : Es la cantidad de calor que es necesario suministrar a un mol de gas ideal para elevar su temperatura mediante una transformación isocórica (volumen constante).

$$c_v = \left( \frac{du}{dt} \right)_v \quad (2)$$

Cp: Es la cantidad de calor que es necesario suministrar a un mol de gas ideal para elevar su temperatura mediante una transformación isóbara (presión constante).

$$c_p = \left( \frac{d}{dt} \right)_p$$

$$Cv = \frac{R}{k-1} \quad (13)$$

### 2.2.2 Expresiones para la entropía.

Para flujos compresibles, los cambios en la propiedad termodinámica, entropía (s), son importantes. Para cualquier sustancia pura incluidos los gases ideales, la "primera ecuación Tds" es:

$$Tds = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (14)$$

La cual relaciona las propiedades termodinámicas y debe ser válida para todas las sustancias puras. Dividiendo toda la ecuación anterior entre la temperatura

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T}d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (15)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 1 y 4 en 15, se obtiene:

$$ds = Cv \frac{dT}{T} + R\rho d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (16)$$

Por otro lado, diferenciando la ecuación 6

$$d = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)dp \quad (17)$$

Ahora si se sustituye la ecuación 1 y 5 en la ecuación 15 se obtiene:

$$ds = Cp \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{\rho} \quad (18)$$

Si tanto Cv como Cp se asumen constantes para un gas dado, las ecuaciones 16 y 18 pueden integrarse para obtener:

$$S_2 - S_1 = Cv \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (19)$$

$$S_2 - S_1 = Cp \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (20)$$

Las ecuaciones 19 y 20 nos permiten calcular el cambio de entropía de un gas ideal que fluye de una sección a otra con calor específico constante (Cv y Cp).

La segunda ley de la termodinámica establece que un flujo adiabático y sin fricción en cualquier fluido resulta en  $ds = 0$  o lo que es lo mismo  $S_2 - S_1 = 0$ , es decir la entropía es constante (flujo isentrópico). Entonces, para un flujo isentrópico de un gas ideal con calores específicos constante resulta la siguiente ecuación.

$$Cv \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = Cp \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \quad (21)$$

Por último, combinando la ecuación anterior con la 12 y 13 se obtiene

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = \frac{p_2}{p_1} \quad (22)$$

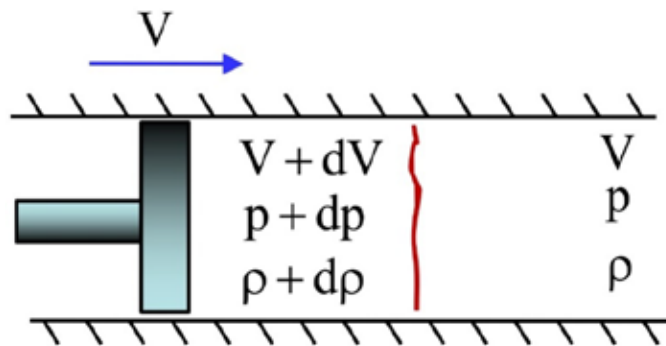
La cual es una relación útil entre temperatura, densidad y presión para flujo isentrópico de un gas ideal. De la ecuación podemos concluir que:

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{constante} \quad (23)$$

### 2.2.3 Velocidad del sonido y número de Mach

. El sonido implica un fenómeno vinculado a la difusión de una onda de características elásticas que produce una vibración en un cuerpo, aun cuando estas ondas no se escuchen. El sonido está formado por las variaciones que se producen en la presión del aire, que el oído convierte en ondas mecánicas para que el cerebro pueda percibir las y procesarlas. Al propagarse, el sonido transporta energía pero no materia. Las vibraciones se generan en idéntico rumbo en el que se difunde el sonido: puede hablarse, por lo tanto, de ondas longitudinales. La velocidad en la que una onda de presión de amplitud pequeña se propaga a través de un medio se denomina velocidad sónica. Esta velocidad no solo depende del tipo de medio y su estado termodinámico, sino también es una función de la fuerza de la onda. Cuanto más fuerte es la onda, más rápido se mueve. Para demostrar el comportamiento de una onda sónica y su velocidad, se considera un ducto largo de sección transversal constante lleno de fluido en reposo con un pistón en uno de sus extremos, como se muestra en la figura 1. A medida que el pistón se mueve con una velocidad infinitesimal constante ( $dV$ ) las partículas del fluido inmediatamente próximos al pistón se comprimen una cantidad muy pequeña y

se crea la onda sónica. El frente de la onda se desplaza a través del fluido a la velocidad del sonido ( $c$ ) y separa el fluido adyacente al pistón, que ya está en movimiento, del fluido que aún está en reposo. El fluido que esta antes de la onda, se ve afectado por esta, aumentando sus propiedades termodinámicas, mientras que el fluido que esta posterior a la onda mantiene sus propiedades originales. (Ver figura 2)



**Figura 2. Propagación de una pequeña onda de presión a lo largo de un ducto**

Fuente: G. Caraballo. Diapositivas de Dinámica de Gases – UC (2008)

Para un observador colocado en la onda tal como se muestra en la figura 2, presencia una velocidad del sonido ( $c$ ) del fluido en su contra, y el fluido, antes de la onda, se aleja a una velocidad  $c-dV$ . El observador (que se encuentra encerrado en el mismo volumen de control en el cual se esta la onda) está en reposo, siendo testigo de un proceso estacionario. Para un flujo estable unidimensional, se tiene que el flujo másico viene dado por la ecuación:

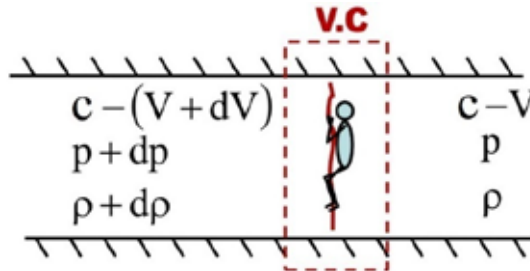
$$m = \rho VA = \text{constante} \quad (24)$$

Tomando en cuenta que el área del ducto es constante, la ecuación se expresa como:

$$\rho V = \text{Constante} \quad (25)$$

Aplicando la ecuación anterior en el volumen de control mostrado en la figura 3, resulta la siguiente ecuación:

$$\rho C = (\rho + d\rho)(c + dv) \quad (26)$$



**Figura 3. Volumen de control en la onda infinitesimal**

Fuente: G. Caraballo. Diapositivas de Dinámica de Gases – UC (2008)

Resolviendo el producto notable la ecuación tiene el resultado siguiente:

$$\rho dV = C d\rho \quad d\rho dV \quad (27)$$

Asumiendo despreciable el término de orden superior y despejando  $dV$  se obtiene:

$$dV = \frac{C d\rho}{\rho} \quad (28)$$

Como ningún trabajo o calor atraviesa las fronteras del volumen de control durante este proceso y despreciando cualquier cambio de energía potencial, la ecuación de conservación de la energía se demuestra en la siguiente ecuación:

$$+ d + \frac{[c + dV]^2}{2} = + \frac{(c)^2}{2} \quad (29)$$

Simplificando la ecuación anterior, donde se desprecia el efecto del diferencial de energía cinética, queda:

$$d + c dV = 0 \quad (30)$$

La amplitud de la onda sónica es muy pequeña y no genera ningún cambio en la temperatura del fluido. Por ello la propagación de una onda de presión no solo es adiabática, sino también isotrópica. Entonces:

$$T ds = d + v dp = d + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (31)$$

Luego:

$$d = \frac{dp}{\rho} \quad (32)$$

Sustituyendo dh en la ecuación 2.30

$$\frac{dp}{\rho} \quad cdV = 0 \quad (33)$$

Sustituyendo la ecuación 28 en la ecuación anterior da como resultado lo siguiente:

$$\frac{dp}{\rho} \quad (cc) \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (34)$$

Para un campo de presiones:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=ctte} = c^2 \quad (35)$$

Por otro lado, para un proceso isentrópico, se conoce que:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = k \frac{P}{\rho} \quad (36)$$

Sustituyendo la ecuación 35 en la ecuación 36 Se obtiene

$$c^2 = k \left( \frac{p}{\rho} \right) = kRT \quad (37)$$

$$c = \overline{kRT} \quad (38)$$

El número de Mach, M, llamado así en honor al físico austriaco Ernst Mach, se define como la relación entre el valor de la velocidad de flujo local, V, a la velocidad local del sonido c.

$$M = \frac{V}{c} \quad (39)$$

El número de Mach es el parámetro dominante en el análisis de flujos compresibles, con efectos distintos dependiendo de su magnitud. Los estudiosos de la

aerodinámica suelen distinguir entre los diferentes rangos del número de Mach, siendo la siguiente clasificación aproximada de uso extendido (Ver tabla 1):

**Tabla 1. Tipo de flujo según el número de Mach.**

Fuente: Y. Cengel, Fundamentos de mecánica de fluidos (2007)

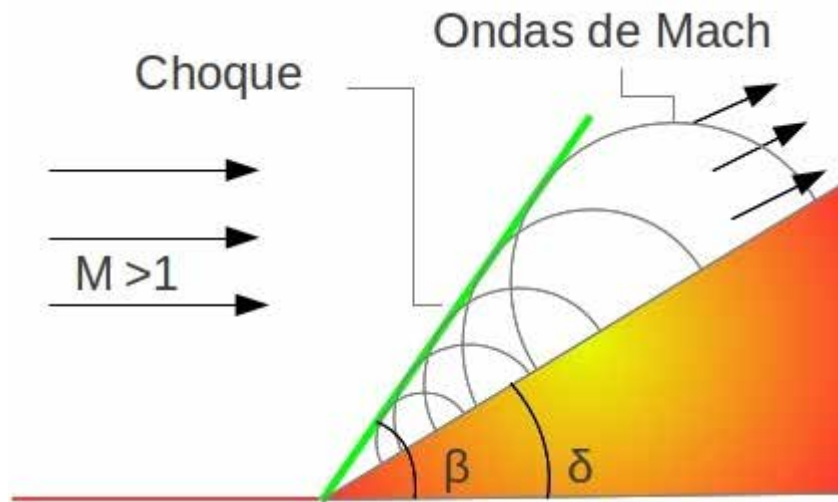
Rango del Numero de Mach	Tipo de flujo	Descripción
$M < 0,3$	Flujo incompresible	Los efectos de la densidad son despreciables
$0,3 < M < 0,8$	Flujo subsónico	Los efectos de la densidad son importantes, pero no aparecen ondas de choque.
$0,8 < M < 1,2$	Flujo transónico	Aparecen por primera vez ondas de choque que separan regiones subsónicas y supersónicas dentro del flujo
$1,2 < M < 3,0$	Flujo supersónico	Hay ondas de choque pero ya no existen regiones subsónicas.

#### 2.2.4 Ondas de choque

En los fluidos compresibles la información de una propiedad dada se transmite al medio a través de ondas acústicas de presión, estas viajan a la velocidad del sonido. Cuando el flujo se mueve con una velocidad superior a esta, entonces el medio no es capaz de captar la información inmediatamente y por lo tanto las ondas de presión tienden a acumularse en una región del medio hasta colapsar, dando lugar a una onda

de choque. El efecto de este fenómeno provoca un aumento abrupto en las propiedades del medio y una disminución de la velocidad. Las ondas de choque también tienen relevancia en aviones militares donde la disminución del ruido es indispensable para condiciones de detectabilidad y cumplimiento de la normatividad internacional. Otro caso donde los choques aparecen, es en el pistón de un motor de combustión. Estos son algunos ejemplos de las áreas de interés de las investigaciones científicas sobre las ondas de choque.

El efecto de estas discontinuidades sobre el flujo es desviar las líneas de corriente a un mismo ángulo de deflexión. Aumentando las propiedades como la presión y la temperatura de forma drástica e inesperada y al mismo tiempo reduciendo la velocidad. Si el número de Mach es menor a la unidad después de pasar por la onda de choque entonces se dice que el choque es de tipo fuerte. En el presente trabajo sólo se predicen choques de tipo débil, es decir  $Ma < 1$ . Considerando una zona cerca del borde de una cuña, cada partícula va cambiando de dirección ligeramente y al chocar con la cuña esta emite una onda de presión de manera continua, esta información viaja por el medio y perturba al resto de las partículas para ajustar su velocidad. Una vez que estas ondas se propagan para cada partícula, existirá una superficie donde todas las ondas de presión se colapsan tal como se muestra en Figura 4.

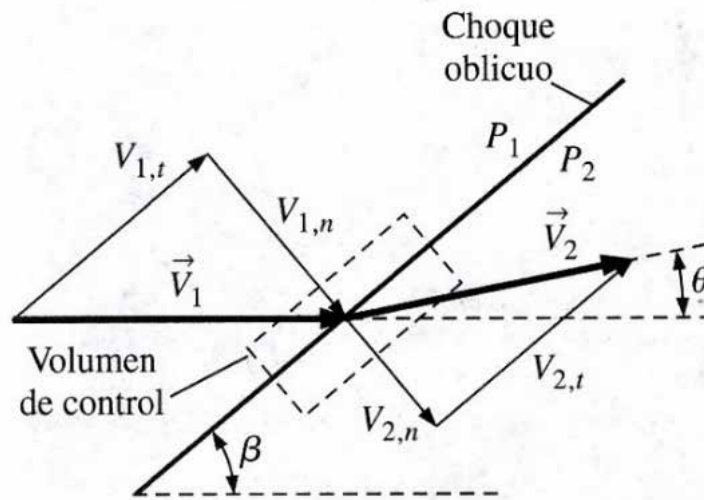


**Figura 4. Choque oblicuo sobre una pared**

Fuente: Aguilar C. (2014)

El flujo supersónico sobre una cuña es la típica configuración que se analiza en la literatura de la dinámica de gases (Figura 4). En el estado 1 (aguas arriba) el flujo es supersónico con  $M > 1$  y las propiedades son conocidas. En el momento en que el flujo se encuentra con la cuña, se ve obligado a cambiar de dirección abruptamente y se genera una onda de choque oblicua (Figura 5). Como el flujo es informado demasiado tarde por las ondas acústicas, no se percata de la presencia de la cuña y el flujo choca consigo mismo, creando un aumento de presión, de temperatura y densidad. Esto significa que la onda de choque es la pequeña región que divide al flujo perturbado de aquel que no está perturbado. El flujo que se obtiene después del choque está desacelerado. El ángulo de inclinación de la onda de choque está asociado al número de Mach en la corriente libre, a la razón de compresión y principalmente al ángulo de la cuña.

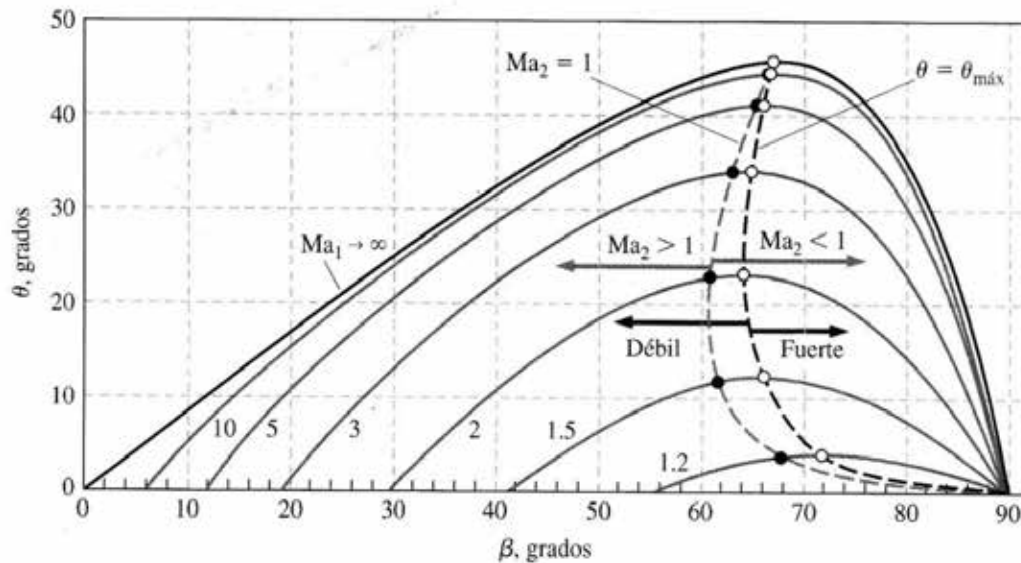
$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{M_1^2 (k + \cos 2\beta) + 2} \quad (40)$$



**Figura 5: Vectores de velocidad descompuestos de un choque oblicuo**

Fuente: Çengel y Cimbala. Fundamentos de mecánica de Fluidos (2012)

La dependencia del ángulo de deflexión del choque oblicuo recto respecto del ángulo de choque para diferentes valores del número de Mach  $M_1$  corriente arriba se representa en las curvas de la figura 6. Los cálculos están hechos para que un gas ideal con  $k=1.4$ . La línea negra punteada conecta los puntos con un ángulo de deflexión  $\theta_{máx}$ ). Los choques oblicuos débiles están a la izquierda de esta línea, mientras que los choques oblicuos fuertes están a la derecha de esta línea. La línea gris punteada conecta los puntos donde el numero de mach corriente abajo es sónico ( $M_2 = 1$ ). El flujo supersónico corriente abajo ( $M_2 > 1$ ) está a la izquierda de esta línea, mientras que el flujo subsónico corriente abajo ( $M_2 < 1$ ) queda a la derecha de esta línea.



**Figura 6: Variedad de ondas de choque posible para un determinado número de Mach de flujo libre.**

Fuente: Çengel y Cimbala. Fundamentos de mecánica de Fluidos (2012)

### 2.2.6 Ondas de expansión de Prandtl-Meyer

Cuando el flujo supersónico gira en dirección opuesta, se le conoce como flujo expansivo o de expansión. Al igual que el flujo de compresión que produce un choque oblicuo, el flujo cambia de dirección para preservar la masa. A pesar de esto un flujo de expansión no genera una onda de choque, al contrario, aparece una región expansiva continua denominada abanico de expansión, la cual esta constituida por infinitas ondas de Mach, las que son denominadas ondas expansivas o de Prandtl-Meyer. Lo anteriormente explicado indica que el flujo gira gradualmente, a diferencia de las ondas de choque oblicuas que lo hacen de manera instantánea, esto se debe a que cada onda de Mach sucesiva gira el flujo en una cantidad infinitesimal. Es importante destacar que en virtud de que cada onda expansiva es isentrópica, el flujo a lo largo de todo el abanico es también isentrópico. En el transcurso de este fenómeno expansivo el numero de Mach sufre un aumento a medida que la presión, densidad y temperatura disminuyen, muy similar al comportamiento del flujo cuando atraviesa la zona de

divergencia de una tobera de Laval. Las ondas expansivas de Prandtl-Meyer (Figura 7) son inclinadas a un ángulo local de Mach como lo muestra la figura 9. Sin embargo, para simplificar el estudio, solamente se muestran tres ondas expansivas en la figura, no obstante, el número de ondas es infinito.

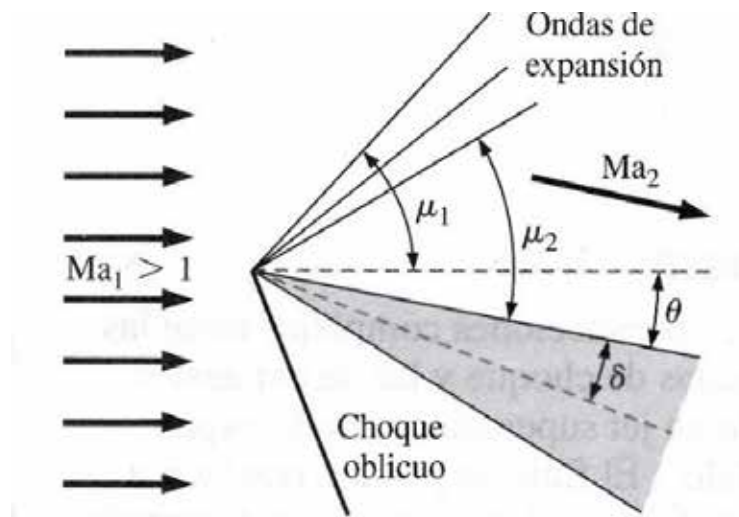
El ángulo de Mach de la primera onda expansiva se determina de manera sencilla como  $\theta_1 = \sin^{-1}(1/M_1)$ . De modo similar,  $\theta_2 = \sin^{-1}(1/M_2)$ , donde se debe ser cuidadoso al medir el ángulo con respecto a la nueva dirección del flujo corriente debajo de la expansión; a precisar, la dirección paralela de la pared superior a lo largo de la cuña si se ignora la influencia de la capa límite a lo largo de la pared.

Para determinar el valor de  $M_2$  teniendo ya los valores de  $M_1$ ,  $k$  y  $\theta$ , se calcula el ángulo función de Prandtl-Meyer el cual es el ángulo a través del cual se debe expandir el flujo tanto para los valores antes de la onda expansiva como para los posteriores a la misma. La ecuación para el cálculo de este ángulo viene dada por:

$$v(Ma) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (Ma^2 - 1)} \right] + \tan^{-1} \left( \sqrt{Ma^2 - 1} \right) \quad (41)$$

Para lograr obtener un flujo supersónico debe comenzar en  $n=0$  para  $M=1$ , e ir creciendo a medida que el número de Mach adquiere valores supersónicos ( $M>1$ ). Una vez calculado  $v(M_1)$  y  $v(M_2)$ , se procede a calcular el ángulo de giro en un abanico de expansión, cuya ecuación es:

$$\theta = v(Ma_2) - v(Ma_1) \quad (42)$$



**Figura 7: Ondas de expansión generadas por una cuña bidimensional.**

Fuente: Çengel y Cimbala. Fundamentos de mecánica de Fluidos (2012)

En otras palabras “El flujo gira un ángulo  $\theta$ , y el número de Mach se incrementa a través del abanico de expansión” Por lo que se puede concluir que las ondas expansivas inducen una aceleración al flujo, lo cual lo lleva a velocidades supersónicas.

### 2.2.7 Modelación matemática

A continuación se presentan los modelos matemáticos utilizados para realizar la simulación del campo de flujo, a través de la geometría, basados en las leyes de conservación.

#### 2.2.7.1 Ecuación de la continuidad

En forma diferencial la ecuación de la continuidad se puede expresar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (43)$$

donde  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  y  $\nabla \cdot$  es la divergencia de la velocidad y el término  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  en realidad expresa la derivada material  $D/Dt$ , esta forma de la ecuación de continuidad no hace referencia a ningún sistema de coordenadas en específico, es la forma para expresarla empleando diversos sistemas de coordenadas, en el caso de un flujo incompresible, en el que la densidad de una partícula de fluido no

cambia durante su trayecto  $D\rho/Dt=0$ , la ecuación (43) se expresa en forma diferencial y vectorial respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (44)$$

$$V = 0 \quad (45)$$

### 2.2.7.2 Ecuación de momentum

Una forma de escribir la segunda ley de Newton para un fluido es:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + (\rho V \cdot \nabla)V = -\nabla p + \tau + S_M \quad (46)$$

Donde el esfuerzo cortante  $\tau$ , está relacionado con la velocidad de deformación por:

$$\tau = \mu \left( \nabla \cdot V + \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (47)$$

Las ecuaciones diferenciales de momentum se pueden escribir para flujos incompresibles, utilizando la derivada material:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \nabla^2 u \quad (48)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \nabla^2 v \quad (49)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \nabla^2 w \quad (50)$$

Y en forma vectorial:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p - \rho g + \mu \nabla^2 V \quad (51)$$

Se ha añadido tres ecuaciones adicionales a la ecuación de continuidad para obtener cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. Con las condiciones de

frontera iniciales apropiadas, es posible obtener una solución para el campo de velocidad y de presión para el flujo incompresible.

### 2.2.7.3 Ecuación de la energía total

Por su parte para tomar en cuenta las interacciones de energía se usa la ecuación:

$$\frac{\partial(\rho h_{tot})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V h_{tot}) = (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot T + \nabla \cdot (\rho \tau) + V S_M + S_E \quad (52)$$

Donde  $h_{tot}$  es la entalpía total, relacionada con la entalpía estática  $h(T, p)$  por la siguiente ecuación:

$$h_{tot} = h + \frac{1}{2} U^2 \quad (53)$$

El término  $\nabla \cdot (\rho \tau)$  representa el trabajo debido a los esfuerzos viscosos y es llamado término de trabajo viscoso.

El término  $V S_M$  representa el trabajo debido a las fuentes de momentum externo y se desprecia en la actualidad.

### 2.2.7.4 Ecuación de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones que definen el comportamiento dinámico de un fluido. Derivan de aplicar los principios de conservación de la mecánica y de la termodinámica al fluido, de donde se obtiene una formulación integral que generalmente se suele transformar en una formulación diferencial más práctica. Existen diferentes formulaciones para estas ecuaciones, en función del problema que se desea resolver.

Muchos fluidos exhiben una relación lineal entre las componentes del esfuerzo y los gradientes de velocidad. Se llaman fluidos newtonianos a tales materiales, que incluyen fluidos comunes tales como agua, aceite y aire. Si además de la linealidad se exige que el fluido sea isotrópico (las propiedades del fluido son independientes de la dirección) es posible relacionar las componentes del

esfuerzo y los gradientes de velocidad empleando sólo dos propiedades del fluido, -  
 velocidad-gradiente, conocidas como ecuaciones constitutivas, se presentan en las ecuaciones:

$$\sigma_{xx} = P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \quad V\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (54)$$

$$\sigma_{yy} = P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \quad V\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (55)$$

$$\sigma_{zz} = P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \quad V\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (56)$$

Para la generalidad de los gases, y con exactitud para los gases monoatómicos, el segundo coeficiente de viscosidad está relacionado con la viscosidad como se muestra en la ecuación:

$$\lambda = \frac{2}{3}\mu \quad (57)$$

Condición conocida como hipótesis de Stokes. Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos normales es igual a la presión, es decir:

$$\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = P \quad (58)$$

Utilizando las ecuaciones 48; 49 y 50, se puede demostrar que esto siempre se cumple para un líquido en el que  $V = 0$ , y con la hipótesis de Stokes también se cumple para un gas.

Si sustituimos las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de momentum, se obtiene, utilizando las hipótesis de Stokes:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (59)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (60)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (61)$$

Donde se ha supuesto un fluido homogéneo, es decir, que las propiedades del fluido (incluida la viscosidad) son independientes de la posición. En el caso de un flujo incompresible la ecuación de continuidad permite reducir las ecuaciones anteriores como muestra las ecuaciones:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (62)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (63)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (64)$$

Éstas se denominan ecuaciones de Navier-Stokes; con estas tres ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de continuidad se tienen cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w, y p. Se supone que las propiedades de viscosidad y

densidad del fluido se conocen. Con las condiciones de borde apropiadas, es de esperar que se puedan resolver las ecuaciones. Varias geometrías relativamente sencillas permiten soluciones analíticas; aunque para muchos flujos de interés ingenieril se han determinado soluciones numéricas. Puesto que las ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, no se puede confiar en que la solución que se obtenga se pueda reproducir realmente en el laboratorio; es decir, las soluciones no son únicas. Por ejemplo un flujo laminar y uno turbulento pueden tener condiciones iniciales y de frontera idénticas, a pesar de que los dos flujos (las dos soluciones) son muy diferentes. Se puede expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en forma vectorial multiplicando las ecuaciones por  $i, j, \hat{k}$ , respectivamente, y sumando:

$$\frac{Du}{Dt}i + \frac{Dv}{Dt}j + \frac{Dw}{Dt}\hat{k} = \frac{DV}{Dt} \quad (65)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}i + \frac{\partial p}{\partial y}j + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} = -\rho \nabla p \quad (66)$$

$$\nabla^2 u i + \nabla^2 v j + \nabla^2 w \hat{k} = \frac{1}{\mu} \nabla^2 V \quad (67)$$

Donde se ha utilizado el operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (68)$$

Combinando lo anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes adoptan la forma vectorial como:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\rho \nabla p + \mu \nabla^2 V \quad (69)$$

Esta forma nos permite utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando otros sistemas de coordenadas (rectangulares, cilíndricas y esféricas).

### 2.2.8 Modelo de turbulencia eddy viscosity

Una propuesta sugiere que la turbulencia se compone de pequeños remolinos que se forman y disipan continuamente, en la cual los esfuerzos de Reynolds se asumen proporcionales a los gradientes de la velocidad media. Esto define a los modelos “Eddy-Viscosity”. Esta hipótesis supone que los esfuerzos de Reynolds pueden estar relacionados con los gradientes de velocidad promedio y la viscosidad de “Eddy”, a través de la hipótesis del gradiente de difusión. Se representan mediante:

$$\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = \nu_t (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) - \frac{2}{3} (k + \nu_t \nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \quad (70)$$

Donde  $\nu_t$  es la viscosidad turbulenta o viscosidad de Eddy.

Análoga a la hipótesis de viscosidad de Eddy, la difusividad de Eddy es la hipótesis que afirma que los flujos de Reynolds son un escalar linealmente relacionadas con el gradiente de la media escalar como se muestra en la ecuación 103:

$$\overline{\mathbf{u}} = \nu_t \nabla \phi \quad (71)$$

Donde  $\nu_t$ , el número de turbulencia de Prandtl.

Las ecuaciones anteriores sólo pueden expresar los términos de las fluctuaciones de la turbulencia en función de la velocidad promedio si la viscosidad turbulenta  $\nu_t$  se conoce, tomando en cuenta que tanto los modelos  $k - \epsilon$  y  $k - \omega$  proporcionan esta variable; sujeto a esta hipótesis, tanto la ecuación de momento promedio de Reynolds y la ecuación escalar de transporte se pueden expresar como:

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) = \mathbf{B} - \nabla p + \nabla \cdot \left( \nu_{eff} (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \right) \quad (72)$$

Donde  $\mathbf{B}$  es la suma de las fuerzas en el cuerpo y  $\nu_{eff}$  es la viscosidad efectiva definida en la ecuación:

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_t \quad (73)$$

Y  $p'$  es la presión modificada definida por:

$$p = p + \frac{2}{3}pk + \frac{2}{3} \tau \quad (74)$$

### 2.2.9 Modelo de turbulencia kappa- epsilon (k - )

El modelo de turbulencia empleado para el flujo multifásico es una generalización del modelo K - para una sola fase. Implementando el modelo K - sólo para la fase continua no teniendo en cuenta los efectos de la fase dispersa sobre la turbulencia de la fase continua

$$\frac{(r_a k)}{t} + \dots (r U k) = \dots \left( r \frac{eff}{C_k} k \right) + P_k \quad (75)$$

$$\frac{(r_a)}{t} + \dots (r U ) = \dots \left( r \frac{eff}{C} \right) + \frac{1}{k} (C_1 P_k - C_2 ) \quad (76)$$

Donde:

k=energía cinética de turbulencia

= Disipación viscosa

El modelo k - tiene cinco constantes, que garantizan la homogeneidad dimensional. Las cuales son:

$$C_\mu = 0,09, \quad C_1 = 1,44, \quad C_2 = 1,92, \quad k = 1,0, \quad = 1,3$$

Si bien los modelos estándar de dos ecuaciones, como el modelo k - ε, dan una buena predicción para muchos problemas de fluidos en ingeniería, existen otras aplicaciones para las cuales estos modelos pueden no ser los más adecuados. Entre estos se encuentran: Flujos con separación de capa límite, corrientes con cambios bruscos en la tasa promedio de los esfuerzos, flujos rotativos, flujos sobre superficies curvas. Entre las principales ventajas e inconvenientes del modelo de turbulencia kappa - epsilon son las siguientes:

### 2.2.10 Modelo de turbulencia kappa-omega k - $\omega$ .

Una de las ventajas de la formulación k -  $\omega$  es el tratamiento para zonas cercanas a la pared para cálculos con bajo número de Reynolds. El modelo no requiere la resolución de ecuaciones no lineales complejas, como en el modelo k -  $\epsilon$  y por lo tanto es más preciso y más robusto. El modelo k -  $\omega$  asume que la viscosidad turbulenta está relacionada con la energía cinética de la turbulencia, mediante la relación siguiente:

$$\mu_f = \rho \frac{k}{\omega} \quad (77)$$

Donde  $\omega$  = Rata de disipación específica

El punto inicial de la presente formulación es que el modelo k -  $\omega$  desarrollado por Wilcox resuelve dos ecuaciones de transporte, una para la energía cinética de la turbulencia, k y otra para la frecuencia de la turbulencia.

#### Ecuación k

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U k) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - B' \rho k \omega \quad (78)$$

#### Ecuación $\omega$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \omega) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k\omega}} \right) \nabla \omega \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - B' \rho k \omega^2 \quad (79)$$

Las variables independientes, la densidad,  $\rho$ , y el vector de velocidad, U, son tratadas como variables conocidas provenientes del método de Navier-Stokes.  $P_k$  es la tasa de producción de turbulencia, la cuales se calculan en el modelo k -  $\omega$ .

### 2.2.11 Modelo shear stress transport (SST)

El modelo k- $\omega$  basado en el transporte de esfuerzos cortantes, brinda una alta precisión en la predicción de la aparición y cantidad de la separación de flujos bajo condiciones de gradientes de presión adversas; esta alta precisión se obtiene limitando la formulación de “Eddy Viscosity” restringiendo el limitador de la capa límite de la

pared. Su formulación se basa en la distancia más cercana a la superficie y en las variables de flujo.

### **2.2.12 Niveles de aproximación numérica**

El desarrollo de las técnicas numéricas y su aplicación a cualquier ciencia o tecnología han dado lugar al desarrollo y a la concienciación generalizada de uno de los conceptos básicos en ingeniería como es el de grado de aproximación. Esta idea es bastante clara si se considera que lo que se pretende con cualquier técnica numérica es conocer las variables físicas a partir de la resolución numérica de una serie de ecuaciones que gobiernan el fenómeno.

Se han de definir y establecer las distintas aproximaciones que introducen los métodos numéricos. En lo referente a la Mecánica de Fluidos, la primera aproximación que aparece es el planteamiento del modelo físico-matemático que defina el comportamiento real de un determinado flujo. Dicho modelo matemático está habitualmente basado en la hipótesis del continuo, válida para la mayor parte de problemas industriales, pero que tiene sus limitaciones para casos extremos de flujos de gases. Una vez hecha esta salvedad, aplicando las leyes básicas de la física clásica se puede establecer una serie de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento matemático de toda partícula fluida. La resolución exacta de dichas ecuaciones serviría para determinar completamente cualquier movimiento en el seno de un fluido. Se puede decir que un modelo matemático se define únicamente tras haber considerado el nivel de aproximación a la realidad requerido a la hora de obtener la exactitud deseada en el cálculo de una serie de variables dependientes. Desafortunadamente, debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales que aparecen, a la complejidad geométrica de los flujos, y a la complejidad de las condiciones de contorno iniciales, no resulta posible obtener soluciones analíticas de dichas ecuaciones de gobierno.

Establecidas las ecuaciones de gobierno resulta imprescindible introducir una segunda aproximación al problema. La forma clásica de abordarlo sería

construir un modelo a escala reducida del flujo en cuestión y analizarlo experimentalmente en el laboratorio. La aproximación numérica implica introducir algunas hipótesis simplificadas que aproximen lo más posible los resultados finales a los que se obtendrían si se pudiera calcular la solución exacta. Dichas hipótesis se dirigen habitualmente hacia la simplificación tanto de la geometría a estudiar como de las ecuaciones a resolver. Obviamente, al no disponerse de la solución analítica exacta resulta bastante complicado establecer de antemano qué hipótesis sirven y cuales son descartables y, por tanto, en cualquier simulación aplicada a la Mecánica de Fluidos, es preciso dedicar mucho esfuerzo al análisis de los resultados obtenidos antes de aceptarlos como válidos.

Una vez definidas las ecuaciones diferenciales simplificadas, aparece otro problema relacionado con el posible tratamiento que se pueda hacer de dichas ecuaciones usando técnicas computacionales. Por medio de los ordenadores resulta muy fácil resolver una ecuación o sistema de ecuaciones algebraico, sin embargo, las ecuaciones que estudian el movimiento de los fluidos son ecuaciones diferenciales no lineales. Resulta obligatorio realizar la transformación de las ecuaciones de forma que puedan ser resueltas por un ordenador. El paso de las ecuaciones diferenciales a sus equivalentes lineales constituye otro nivel de aproximación y normalmente recibe el nombre de discretización de las ecuaciones.

En cuanto a la geometría a estudiar, se debe señalar que la aproximación a la que debe someterse no sólo es de orden descriptivo respecto a su contorno, sino que además ha de establecerse la definición del espacio ocupado por el fluido. En este sentido, resulta imprescindible referir los puntos a un determinado sistema de coordenadas en los que se pretenderá resolver las ecuaciones para obtener soluciones de las variables deseadas. Aunque el campo fluido sea un continuo, no se puede pretender resolver las ecuaciones en todos los puntos de un determinado volumen, porque entonces se tendría un número enorme de ecuaciones a resolver. Por tanto, hay que elegir cierto conjunto de puntos en los que se resolverán las

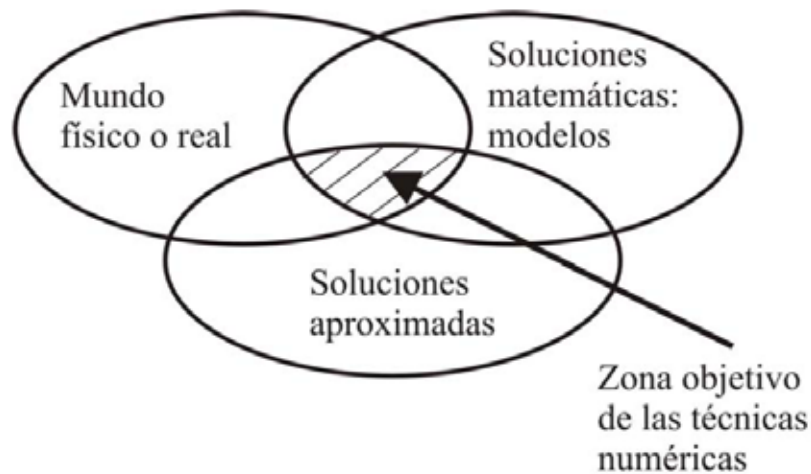
mencionadas ecuaciones y que serán los puntos dónde finalmente se conocerán los valores de las variables fluidas. La definición de estos puntos es lo que se denomina habitualmente discretización espacial del dominio (también se habla de generación del mallado). El proceso descrito no deja de ser otra aproximación que se introduce en el cálculo y que define el nivel de aproximación espacial.

En el caso de tener ecuaciones que dependan de la variable tiempo (flujo no estacionario) es esencial la definición de un nivel de aproximación temporal. No es posible tampoco estudiar la evolución de las variables en el tiempo de forma continua. El nivel indicará la forma de modelizar la evolución real introduciendo lo que se denomina discretización temporal del sistema de ecuaciones. A partir de la solución calculada se podrá realizar un promediado temporal oportuno para estudiar ciertas características medias de flujo que dependan de la evolución de las variables con el tiempo.

Finalmente, se pueden manipular las ecuaciones eliminando ciertos términos cuya influencia en un determinado problema se considere despreciable. La conclusión de que algún término no afecta a la solución de un determinado flujo se debe alcanzar tras analizar detenidamente la sensibilidad del problema ante valores dispares de dicho término. Normalmente dicho estudio se hace tras dimensionalizar convenientemente las ecuaciones y realizar el correspondiente análisis de semejanza (técnicas asintóticas). Esta cuestión es de importancia capital en la Mecánica de Fluidos y está en el origen de cualquier estudio experimental. Desde el punto de vista numérico, la eliminación de algún término en las ecuaciones introduce lo que se denomina nivel de aproximación dinámico de las ecuaciones consideradas.

Resumiendo, desde el modelo matemático (ecuaciones diferenciales no lineales) que aproxima la realidad física en un medio continuo se llega a un número finito de ecuaciones algebraicas que eliminan algún término de las ecuaciones de partida y que aproximan la evolución temporal real que, tras resolver con técnicas apropiadas, proporcionan una aproximación al valor de

las variables incógnita en los puntos elegidos como discretización espacial del dominio de cálculo. En definitiva, se establece un nivel de aproximación numérico límite por debajo del cual será imposible acercarse al valor real de las variables en los puntos elegidos. Sin embargo, desde un punto de vista ingenieril, el proceso descrito es perfectamente válido y ha significado a lo largo de la evolución de las técnicas numéricas, la posibilidad de mejorar diseños y ahorrar mucho esfuerzo que de otra manera supondría trabas insalvables a la evolución de muchos sectores industriales. En la figura 8 se muestra gráficamente la panorámica explicada en este apartado.



**Figura 8: Técnicas de aproximación numérica en mecánica de fluidos**

Fuente: ANSYS CFX-SolverTheory Guide

### 2.2.13 Método de solución numérica

Existen dos métodos fundamentales para el diseño y el análisis de sistemas en ingeniería relacionados con el flujo de fluidos: uno es la experimentación y otro es el cálculo. La experimentación, es basada mediante la construcción de modelos que son ensayados en instalaciones, mientras el segundo, el cálculo significa la resolución de ecuaciones diferenciales, estas ecuaciones se resuelven por métodos analíticos tradicionales o por métodos alternativos como se aplica a este trabajo,

la cual es el método de volumen finito, en ambos métodos se puede hacer el uso de las herramientas computacionales para rapidez de cálculos.

Ambos métodos se complementan entre sí, por ejemplo, los ingenieros podrían obtener propiedades globales, como sustentación, fuerza de arrastre, caída de presión o potencia, experimentalmente; pero emplean la CFD para obtener detalles acerca del campo de flujo, como los esfuerzos de corte, velocidad y perfiles de presión y líneas de corriente. Además, los datos experimentales se emplean con frecuencia para validar soluciones de CFD al comparar cantidades globales determinadas de manera computacional y experimental. La CFD se emplea para reducir la cantidad necesaria de análisis experimental. Actualmente la dinámica de fluidos computacional puede manejar flujos laminares, pero los flujos turbulentos de interés práctico son difíciles de resolver sin tener que recurrir a los modelos de turbulencia. Por desgracia, ningún modelo de turbulencia es universal y una buena solución en CFD de flujo turbulento depende de que tan apropiado sea el modelo de turbulencia aplicado. A pesar de esta limitación, los modelos estándares producen resultados razonables para muchos problemas prácticos de ingeniería. Continuando con lo antes dicho, se tiene que el punto de partida de cualquier método numérico es el modelo matemático, la selección las ecuaciones diferenciales o integrales y las condiciones de borde. Se elige un modelo apropiado para la aplicación (flujos compresibles o incompresibles, turbulentos, de dos o tres dimensiones, etc.). Como ya dijimos, este modelo podría incluir simplificaciones de las leyes de conservación. Un método de solución es designando un modelo para una ecuación en particular seleccionada.

#### **2.2.14 Método de discretización**

Después de seleccionar el modelo matemático, se tiene que elegir un método de discretización apropiado, un método de aproximación de las ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en estudio de localizaciones discontinuas en espacio y tiempo. Hay muchos enfoques, pero los más importante son: diferencia finita (FD), volumen finito (FV) y los

métodos de elemento finito (FE). Cada método produce la misma solución si el mallado es muy refinado. Sin embargo, algunos métodos son más apropiados para alguna clase de problemas que otros. A menudo la preferencia es determinada por la actitud del desarrollador.

### **2.2.15 Mallado o discretización numérica**

La generación de la malla donde se definen las celdas que es el punto de partida para el cálculo de las variables de flujo (velocidad y presión, etc.), en todo el dominio computacional. Los modernos paquetes comerciales de CFD vienen con sus propios generadores de malla y también están disponibles programas para generar mallas independientes.

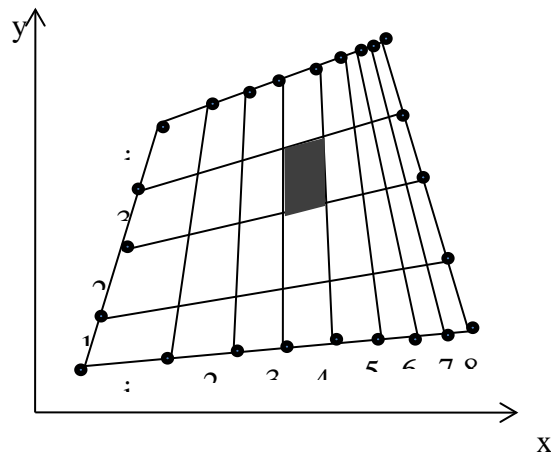
Las ubicaciones discontinuas en las que las variables calculadas son definidas por la discretización numérica que es esencialmente una representación discontinua del dominio geométrico sobre el cual el problema será solucionado. Divide el dominio de solución en un número finito de subdominios (elementos, volúmenes de control, etc.). Algunas de las opciones disponibles son las siguientes:

#### **2.2.15.1 Mallas estructuradas**

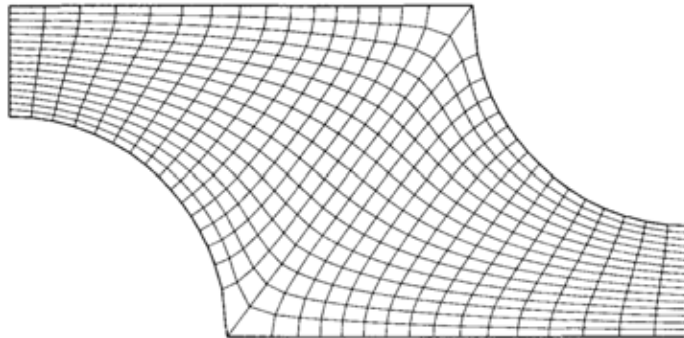
Consta por celdas planas con cuatro lados (2D) o celdas volumétricas con seis caras (3D). Aunque la forma rectangular de las celdas podría estar distorsionada, cada celda se enumera de acuerdo con los índices (i, j, k) que no necesariamente corresponden a las coordenadas “x”, “y” y “z”.

A continuación, en la figura 9 se muestra un ejemplo de malla estructurada bidimensional con nueve nodos y ocho intervalos en el lado superior e inferior, y cinco nodos y cuatro intervalos en los lados derecho e izquierdo. Se muestran los índices i y j. La celda sombreada esta en (i=4, j=3)

El mallado estructurado o regular está constituido por familias de cuadrículas lineales con la propiedad de que miembros de una familia no cruzan con otras y cada miembro cruza con otra familia sólo una vez. Esto permite que las líneas de una selección en particular sean enumeradas consecutivamente. La posición de cualquier punto de la cuadrícula (o el volumen de control) dentro del dominio es excepcionalmente identificado para la selección de dos o tres dimensiones. Esta es la estructura de cuadrícula más simple, ya que es de manera lógica equivalente a una cuadrícula cartesiana. Cada punto tiene cuatro vecinos cercanos en dos dimensiones y seis en tres dimensiones; uno de los índices de cada vecino del punto  $p$  ( $i, j, k$ ) es diferente por  $\pm 1$  del índice correspondiente de  $p$ . Un ejemplo de una cuadrícula de 2D estructurada es indicado la figura 10.



**Figura9: Malla estructurada**  
Fuente: ANSYS CFX-SolverTheory Guide

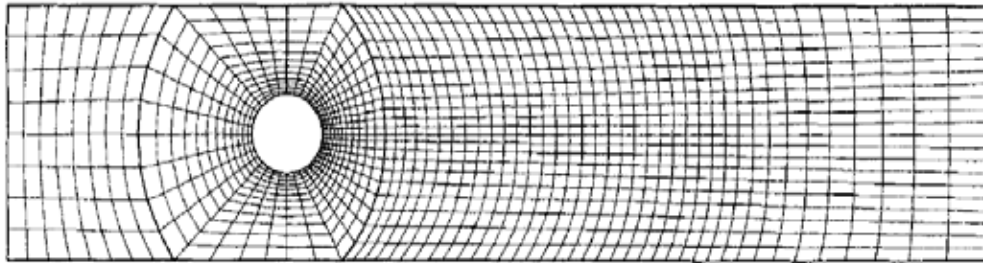


**Figura 10: Cuadrícula estructurada en 2D**

Fuente: A. Pérez y C. Garre

Efectivamente, hay muchos solvers eficientes aplicables solamente a cuadrículas estructuradas. La desventaja de cuadrículas estructuradas es que pueden ser usadas solamente para dominios de solución geométrica simple. Otra desventaja es que podría ser difícil controlar la distribución de los puntos de la cuadrícula: la concentración de puntos en una región para razones de exactitud produce pequeños espacios innecesarios en otras partes del dominio solución y un desperdicio de recursos. Este problema es exagerado en los casos de 3D. Las celdas largas también podrían afectar la convergencia adversamente.

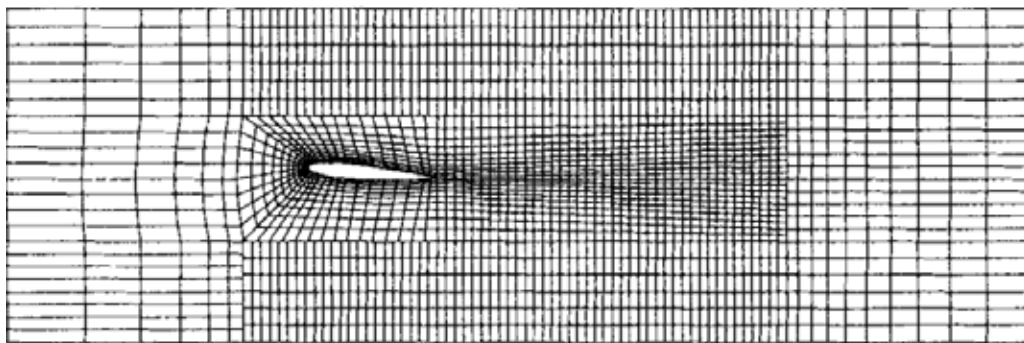
En las cuadrículas estructuradas en un bloque, hay dos (o más) niveles de subdivisión del dominio solución. Sobre el nivel rugoso, hay bloques en el que son relativamente grandes los segmentos del dominio; su estructura podría ser irregular y pueden o no ser superpuestos. Sobre el nivel (dentro de cada bloque) es definida una cuadrícula estructurada. El trato especial es necesario en las interfaces. En la figura 11 un mallado estructurado de bloque con combinación en las interfaces, es designado para el cálculo de la circulación del flujo en 2D alrededor de un canal cilíndrico y contiene tres bloques.



**Figura 11: Mallado estructurado con interfaz ajustada**

Fuente: A. Pérez y C. Garre

En la figura 12 se presenta un mallado estructurado en bloque sin ajuste en la interface; usado para calcular la circulación alrededor de un hidrodensizador sumergido (hydrofoil). Consta de cinco bloques de cuadrículas de diferentes tamaños. Esta clase de cuadrícula es más flexible que los previos, cuando admite el uso de cuadrículas más finas en las regiones donde es requerida una gran resolución. El no ajuste en las interfaces puede ser tratado de una manera completamente conservadora. La programación es más difícil que para tipos de cuadrícula descritos antes. El Solver para mallas estructuradas puede ser aplicable como bloque, y los dominios de flujo complicados pueden ser tratados con estas cuadrículas. Es posible la refinación local del modo bloque (la cuadrícula puede ser refinada en algunos bloques).

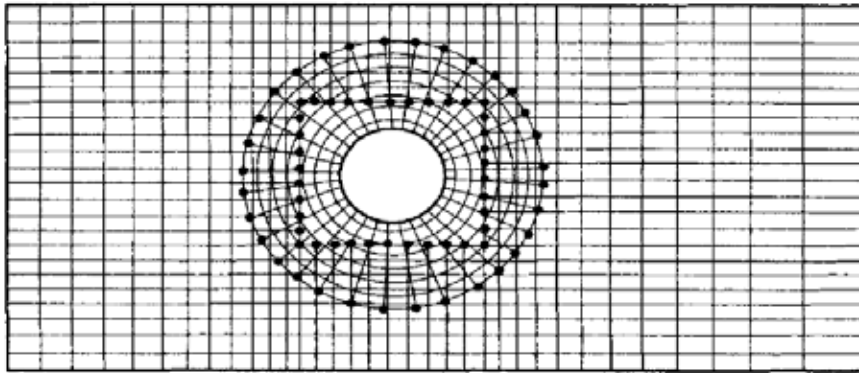


**Figura 12: Mallado estructurado en bloque 2D sin interfaces ajustadas**

Fuente: A. Pérez y C. Garre

Las cuadrículas estructuradas con bloques con superposición se muestran en la figura 13. En la región de superposición, las condiciones de bordes para un

bloque son obtenidas interpolando la solución del otro bloque (en superposición). La desventaja de estas cuadrículas es que las leyes de conservación no se hacen cumplir fácilmente en los límites del bloque. La ventaja de este enfoque es que los dominios complicados son arreglados con más facilidad y puede ser usado en los siguientes cuerpos móviles: un bloque es fijado al cuerpo y se mueve con él, mientras que una cuadrícula inactiva cubre los entornos.



**Figura 13: Mallado compuesto en 2D**

Fuente: A. Pérez y C. Garre

### 2.2.15.2 Cuadrículas (mallado) poco estructuradas

Consta de celdas de varias formas, comúnmente se emplean triángulos o cuadriláteros (2D) o tetraedros o hexaedros (3D). Se generan dos mallas no estructuradas para el mismo dominio que el de la figura 11, con la misma distribución de intervalo en los lados. A diferencia de la malla estructurada, en la no estructurada, no puede identificarse a las celdas de manera única mediante los índices  $i$  y  $j$ , en cambio, las celdas se numeran internamente de alguna otra manera por el paquete de la CFD.

Para configuraciones geométricas complejas, por lo general, es más fácil para el usuario del paquete de generación de malla crear una no estructurada. Por ejemplo, algunos paquetes de CFD (usualmente antiguos) están escritos de manera específicas para mallas estructuradas, estos convergen con mayor rapidez y con mayor exactitud, por utilizar la identificación celdas por índices como se hace en

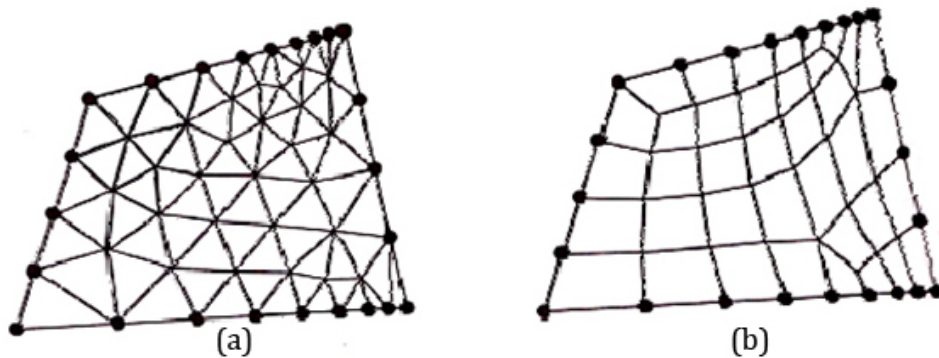
caso de mallas estructuradas; los modernos paquetes de CFD de aplicación general ya no presentan este problema ya que pueden manejar mallas estructuradas y no estructuradas. Por lo que se generan menos celdas con una malla estructuradas que con una no estructurada.

En la figura 6 la malla estructurada de  $8 \times 4 = 32$  celdas, mientras que la malla triangular no estructurada de la figura 11(a) tiene 76 celdas, y la malla cuadrilátera no estructurada de la figura 11(b) tiene 38 celdas, aun cuando se aplica la distribución de nodos en los lados de los tres casos.

A continuación, se presenta un ejemplo de malla no estructurada bidimensional con 9 nodos y 8 intervalos en los lados superior e inferior, y 5 nodos y 4 intervalos en los lados izquierdo y derecho. También la misma distribución de nodos que en la figura 14 (a) malla triangular no estructurada y (b) malla cuadrilátera no estructurada. La celda sombreada en (a) es levemente sesgada.

Útil para configuraciones muy complicadas, es el tipo de cuadrícula más flexible que puede ajustarse al límite de un dominio de solución arbitraria. En principio, tales cuadrículas podían ser usadas con cualquier plan de discretización, pero se adaptan mejor al volumen finito y aproximaciones a elemento finito. Los elementos o los volúmenes de control podrían tener cualquier forma; no hay una restricción sobre el número de elementos vecinos o nodos. En la práctica, las cuadrículas hechas de triángulos o cuadriláteros en 2D, y tetraedros o hexaedros en 3D son usados a menudo. Tales cuadrículas pueden ser generadas automáticamente por los algoritmos existentes. Si se desea, la cuadrícula puede ser hecha de forma ortogonal, el radio de aspecto es fácilmente controlado, y la cuadrícula puede ser refinada fácilmente a nivel local. La ventaja de la flexibilidad es compensada por la desventaja de la irregularidad de la estructura de los datos. Las ubicaciones de los nodos y las conexiones vecinas necesitan ser especificadas explícitamente. Los “Solvers” para los sistemas de ecuaciones algebraicas son generalmente más lentos que para cuadrículas regulares.

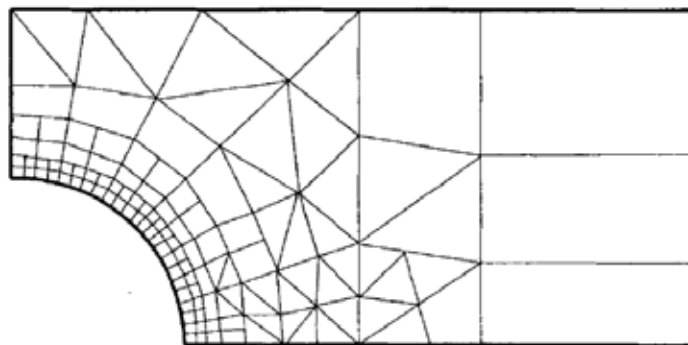
Malla triangular no estructurada.    Malla cuadrilátera no estructurada.



**Figura 14: Malla no estructurada**

Fuente: A. Pérez y C. Garre

Las mallas poco estructuradas son usadas con métodos de elemento finitos, y cada vez más, con los métodos de volumen finitos. Los códigos de computación para cuadrículas poco estructuradas son más flexibles. No necesitan ser cambiados cuando la cuadrícula es refinada a nivel local, o cuando son usados los elementos o volúmenes de control de formas diferentes. Sin embargo, la generación del mallado y el pre-procesamiento son generalmente más difíciles. Un ejemplo de una cuadrícula poco estructurada, se muestra en la figura 15.



**Figura 15: Ejemplo de mallado no estructurado en 2D**

Fuente: A. Pérez y C. Garre

En las capas límite, donde las variables de flujo cambian con rapidez en la dirección normal de la pared y requieren de mallas de alta resolución en la cercanía de ésta, las mallas estructuradas permiten una resolución mucho más fina que las no estructuradas para el mismo número de celdas. Las celdas de mallas

estructuradas son más delgadas y están muy compactadas cerca del lado derecho a diferencia que las celdas de mallas no estructuradas.

### **2.3 Definición de términos básicos**

**Caudal:** cantidad de fluido que pasa por segundo por un área determinada.

**Cantidad de movimiento:** es la cantidad de movimiento por unidad de volumen integrada sobre el volumen, donde la cantidad de movimiento por unidad de volumen es la densidad de la partícula material multiplicada por su velocidad.

**Chorro Libre:** es considerado como un flujo fluido que fluye desde un conducto hacia una zona relativamente grande que contiene fluido, el cual tiene una velocidad respecto al chorro que es paralela a la dirección del flujo en el chorro.

**Condición de estancamiento:** estado termodinámico en el cual la sustancia alcanza el reposo de forma adiabática y toda su energía se encuentra en forma de entalpía.

**Entalpía:** es la cantidad de energía que un sistema puede intercambiar con su entorno.

**Entropía:** puede definirse esquemáticamente como el "progreso para la destrucción" o "desorden inherente a un sistema".

**Ecuación de continuidad:** se usa para relacionar la densidad del fluido, el área del fluido y la velocidad de éste en dos secciones del sistema donde existe flujo estable. Es válido para todos los fluidos, ya sean gases o líquidos.

**Estabilidad:** una medida de la capacidad de un sistema de resistir la perturbación. La capacidad de recuperar la posición original tras el cambio.

**Flujo:** el flujo de una cantidad por una superficie. Por ejemplo, el flujo de la energía siempre va desde algún lugar a otro lugar, es decir que la naturaleza del vector es importante.

**Flujo compresible:** es aquel en los cuales los cambios de densidad de un punto a otro son considerables y no pueden despreciarse.

**Flujo permanente:** llamado también flujo estacionario. Este tipo de flujo se caracteriza porque las condiciones de velocidad de escurrimiento en cualquier punto no cambian con el tiempo, o sea que permanecen constantes con el tiempo o bien, si las variaciones en ellas son tan pequeñas con respecto a los valores medios.

**Flujo unidimensional:** es un flujo en el que el vector de velocidad sólo depende de una variable espacial, es decir que se desprecian los cambios de velocidad transversales a la dirección principal del escurrimiento. Dichos flujos se dan en tuberías largas y rectas o entre placas paralelas.

**Fluido:** se define como una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo de corte, por tanto, en ausencia de este, no habrá deformación. Los fluidos pueden clasificarse de manera general de acuerdo con la relación entre el esfuerzo de corte aplicado y la relación de deformación.

**Flujo ideal:** es aquel flujo incompresible y carente de fricción. La hipótesis de un flujo ideal es de gran utilidad al analizar problemas que tengan grandes gastos de fluido, como en el movimiento de un aeroplano o de un submarino. Un fluido que no presente fricción resulta no viscoso y los procesos en que se tenga en cuenta su escurrimiento son reversibles.

**Gradiente:** el índice de mayor cambio por unidad de longitud de una variable en el espacio a partir de un punto de interés.

**Número de Mach:** es la razón entre la velocidad del objeto y la velocidad del sonido en el medio donde viaja.

**Onda:** perturbación de la propiedad de un medio que se propaga transportando energía.

**Onda de choque:** distorsión irreversible del campo de flujo supersónico, puede ser normal a la sección transversal del flujo u oblicua.



materiales impresos u otro tipo de documentos para realizar la simulación del fenómeno de cavitación, en este caso con ayuda de una herramienta computacional de análisis de volúmenes finitos y la técnica de CFD. Por lo tanto, el estudio se encuentra alineado en este nivel documental.

Según Zorrilla (1993), la investigación documental es aquella que se realiza a través de la consulta de documentos (libros, revistas, periódicos, memorias, anuarios, registros, códigos, constituciones, etc.).

### **3.3 Nivel de la investigación**

El nivel de conocimiento es descriptivo, y éste consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. Hernández (2004), señala que la investigación descriptiva busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice. Teniendo como objetivo indagar la incidencia y los valores en que se manifiestan una o más variables al ubicar, categorizar y proporcionar la visión de una comunidad, un evento, un contexto, un fenómeno o situación.

En este orden de ideas, la investigación se basa en describir las ondas de choque oblicuas en el flujo supersónico a través de un turbo estator usando técnicas de CFD, en una situación rigurosamente controlada y de esta manera fijar los parámetros por los cuales se regirá la investigación.

### **3.4 Población y muestra**

La población Hurtado y Toro (2001), la definen como: “es la composición de todos los elementos a ser estudiados y a quienes podrán ser generalizados los resultados de la investigación, una vez concluida ésta, para lo que es necesario que la muestra con la cual se trabaje sea representativa de la población”. Por ende, la población será las diferentes curvas características y gráficas experimentales que muestran los fabricantes. La muestra a emplear en este proyecto es una muestra del tipo no probabilística, donde Véliz, y Arredondo determinan en su trabajo de grado titulado Aspectos Teóricos sobre tipos de Muestreo, que este tipo de muestra es: “aquel tipo de muestra para el cual no

puede no puede calcularse la probabilidad de extracción de una determinada muestra (p. 30)”.

Por lo tanto, la muestra seleccionada son: los diferentes puntos o nodos que se generen por la discretización del dominio fluidizado y en los cuales se evaluarán las características del fluido.

### **3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos**

Los datos según Sabino C (1992) son “Cada uno de los elementos de información que se recoge durante el desarrollo de una investigación y sobre la base de los cuales, convenientemente sintetizados, podrán extraerse conclusiones con relevancia en relación al problema inicial planteado”. (p. 28).

Con el propósito de recolectar datos se dispondrá de técnicas, tanto cuantitativas como cualitativas. La Torre M. (2007) define las técnicas y métodos de recolección de datos como:

Herramientas que se manipulan para obtener información y para llevar a cabo las observaciones de una investigación o estudio determinado. Conforme a lo que se desea investigar o estudiar, la característica a observar, sus propiedades y factores relacionados con aspectos naturales, económicos, políticos, sociales, etc., cuando se selecciona uno de estos instrumentos. En otras palabras, estos son los que permiten efectuar observaciones, de uno u otro fenómeno en una forma más despejada y precisa de la descripción de los hechos a estudiar.

En esta investigación se hizo uso de las siguientes herramientas de recolección de datos: localización y consolidación de los datos, revisión documental la cual es definida por Candelo (2006) Esta técnica se realizará con el fin de profundizar la información recopilada con todas las aplicadas anteriormente, esta comprende la búsqueda de la información de documentos empresariales, que contribuyan al conocimiento del comportamiento de sucesos realizados que sirvan de apoyo para el desarrollo de teorías pertinentes para la resolución de problemas.

Y, por último, en el presente trabajo se contó con la utilidad de computadoras para conseguir los resultados obtenidos por la simulación que describen el comportamiento

del campo de flujo, con los cuales se procede a comparar con valores experimentales realizados anteriormente y/o formular hipótesis en base a los principios de conservación para lograr la validación de los mismos.

### **3.6 Fases metodológicas**

Se describirán de manera individual, las respectivas acciones, procedimientos, técnicas y actividades a realizar, para dar cumplimiento a cada uno de los objetivos específicos planteados.

#### **Fase I: “Investigación sobre las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo supersónico en un turbo estator”**

A través de los diferentes antecedentes seleccionado y apoyados por material bibliográfico técnico sobre flujos compresibles supersónicos, se identificarán las variables que permiten la explicación fenomenológica del campo de flujo y las irreversibilidades que producto de todas las condiciones externas puedan presentarse.

#### **Fase II: “Modelado mediante una herramienta CAD del turbo reactor”**

Luego de una exhaustiva investigación y documentación en base a varios artículos científicos y estudios sobre el campo de flujo supersónico a través de un ramjet (turbo estator), se diseñará el modelo a estudiar. Se determinan los parámetros dimensionales y condiciones de flujo para la aplicación de la investigación y los estudios, a fin de manejarlos como data necesaria para realizar los objetivos del proyecto de investigación. Luego se modelará mediante una herramienta de dibujo asistido por computadora CAD.

#### **Fase III: “Elección del modelo matemático adecuado para el estudio del flujo”**

Una vez realizada la revisión bibliográfica satisfactoria, se determinan los modelos matemáticos más apropiados para la realización de la simulación numérica basándose en la interpretación de la investigación bibliográfica y de ser necesario la comparación de los resultados obtenidos en la simulación de modelos similares al seleccionado en esta investigación. La idea es establecer las condiciones para que aparezcan las ondas de choque oblicuas y caracterizar su estado.

#### **Fase IV: “Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD”**

La simulación del campo de flujo se realiza a través de la configuración del software ANSYS® Workbench CFX®, es decir, una herramienta que aplica CFD (computational fluid dynamics) para ejecutar algoritmos computacionales seleccionados para la solución de los modelos matemáticos, estableciendo también los criterios de convergencia que tendrá a la hora de realizar los cálculos, donde se especifica el número máximo de iteraciones o pasos a realizar para el cálculo, así como el valor objetivo del criterio de convergencia ya sea residual o máximo. El cálculo se detendrá al cumplirse cualquiera de estas dos condiciones y así poder generar la data, gráficos y/o diagramas para la descripción de las variables involucradas.

#### **Fase V: “Descripción de las variables en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su interpretación”**

Los datos obtenidos serán extraídos del programa en forma de data, que posteriormente usando una hoja de cálculo se transformarán en representaciones gráficas, las cuales representarán el comportamiento de las curvas de conservación de masa y momento, así como los modelos de turbulencia. Luego esta información será presentada principalmente en forma de videos donde se puedan visualizar las ondas de choque oblicuas y cualquier otro fenómeno relacionado con el flujo en régimen supersónico.

## CAPÍTULO IV

El presente capítulo explica el desarrollo de la investigación para llevar a cabo el cumplimiento de los objetivos planteados y basados en las fases metofológicas planteadas, abarcando de manera individual cada uno de ellas.

### **4.1. Investigación sobre las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo supersónico en un turbo estator.**

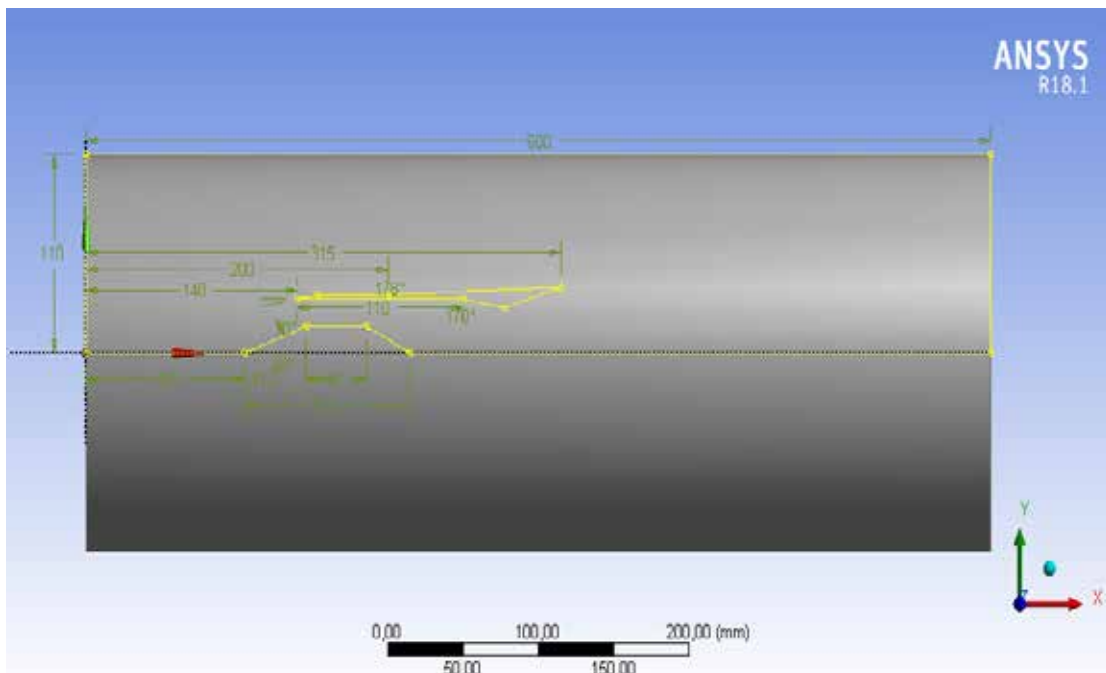
El estudio de la incidencia de las ondas de choque oblicuas en dispositivos o accesorios de flujo compresible está restringido exclusivamente a investigaciones publicadas en revistas especializadas y trabajos de grado, algunos de ellos elaborados en proyectos conjuntos entre universidades, centros de investigación y organizaciones gubernamentales o empresas que trabajan en el área militar o aeroespacial. Tal es el caso de las investigaciones llevadas a cabo en el Glenn Research Center de Cleveland, Ohio EEUU, laboratorio aeroespacial abscrito a la Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio NASA por sus siglas en inglés y publicadas en su página web donde se explica que los tuboestatores (ramjets) están diseñados para quemar combustible a altas velocidades y alcanzar velocidades hipersónicas, se da una compresión del flujo puede generar una auto-ignición y así surge el problema de tener ondas de expansión oblicuas. Por esa razón es importante describir las variables responsables de dichas discontinuidades en el campo de flujo, es decir, velocidad de entrada, número de Mach, presión, temperatura y velocidad en la descarga del dispositivo, para poder obtener el empuje generado y así la factibilidad de vuelo supersónico.

### **4.2. Modelado mediante una herramienta CAD del turbo reactor.**

Se selecciona un turbo estator, de un modelo real a escala de los usados en aplicaciones específicas de propulsión para la aviación militar y comercial, cuyo esquema fué obtenido a través de la información disponible en [www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/ramth.html](http://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/ramth.html), y cuyas condiciones del flujo se consideran adiabáticas y sin fricción para enfocarse exclusivamente en los abruptos

cambios de presión y para expansiones del número de Mach en regímenes supersónicos, esto se debe a las altas velocidades del volumen de control que atraviesa el dispositivo, permitiendo así observar las características del campo de flujo, y con ello los fenómenos que ocurren en la zona de la entrada del turbo estator y el comportamiento a través del mismo.

El diseño de la geometría del turbo estator fue realizado mediante la ayuda del módulo *Design Modeler*, software CAD, incluido en ANSYS® Workbench. Consta de un turbo estator similar al usado en el Glenn Research Center, con un dominio fluidizado (DF) para el estudio del campo de flujo compresible (ver figura 16). Realizado en dos dimensiones para facilitar el estudio y solución de los modelos matemáticos de manera de disminuir el costo computacional. Esta particularidad no afecta la obtención de los resultados, debido a la simetría que presenta el fenómeno en cuestión. para más detalle de las dimensiones seleccionadas del turbo estator y el DF consultar Apéndice A.



**Figura 1: Modelo del turbo estator**

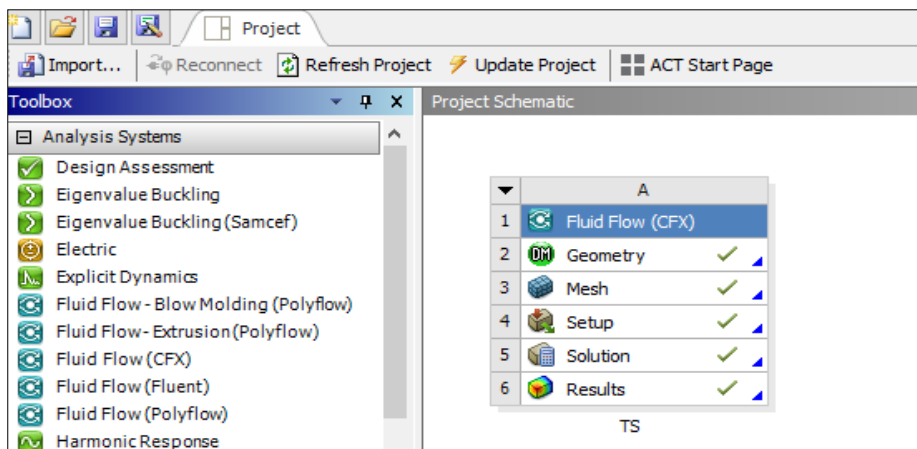
Fuente: Terán (2019)

### 4.3. Elección del modelo matemático adecuado para el estudio del flujo.

Fundamentándose en los antecedentes consultados, diferentes fuentes bibliográficas y guías de ANSYS® Workbench, se concluyó que las ecuaciones y modelos matemáticos más adecuados para la realización del estudio son las ecuaciones RANS (Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds), la ecuación de la energía o primera ley de la termodinámica para un proceso de flujo adiabático y el modelo de turbulencia del transporte del esfuerzo cortante o SST por sus siglas en inglés, buscando siempre las condiciones apropiadas para la aparición de fenómenos irreversibles como las ondas de choque oblicuas, en el campo de flujo compresible estudiado por medio del DF previamente definido.

### 4.4. Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD.

El proceso de simulación por medio de la herramienta de CFD ANSYS® CFX®, consta de una serie de pasos en los cuales se debe tener especial cuidado y dominio de lo que se está programando y con qué fin se desea hacerlo. Inicialmente el software consta de un espacio de trabajo donde se programan las instrucciones de la simulación, como se muestra en la figura 17.



## **Figura 17: Proceso de simulación para ANSYS® WorkbenchCFX**

Fuente: Terán (2019)

### **4.1.1 Geometría**

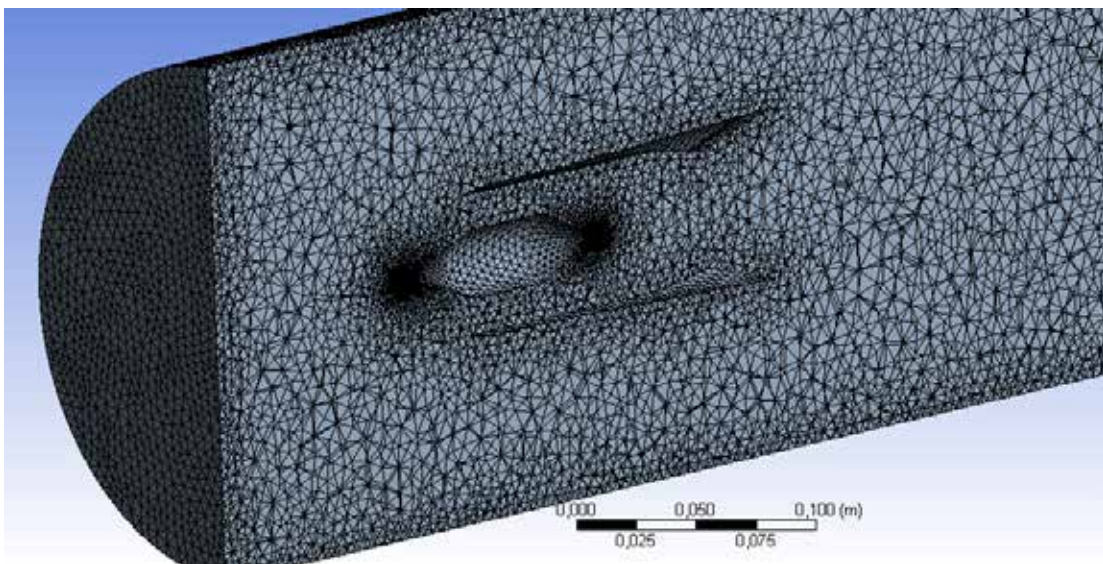
El modelado del turbo estator se realizó en base a un boceto (sketch para la mayoría de los software de diseño CAD) en el cual se dimensiona por completo el área de estudio con ANSYS® Workbench *Design Modeler*. Como se explicó anteriormente, y en virtud de que el turbo estatores completamente simétrico, se dibujó la parte superior de dicho boceto para posteriormente hacer una revolución del mismo alrededor del eje x (seleccionado como el eje de simetría), esta característica de análisis tridimensional se definió en las propiedades del modelador, puesto que el software predetermina su configuración para este tipo de estudio. Partiendo del boceto generado, se realizó el volumen o lecho fluidizado, también llamado dominio fluidizado DF.

### **4.4.2. Discretización del dominio**

La generación numérica de mallas o discretización del dominio fluidizado juega un papel fundamental en cualquier problema de simulación, aún con las actuales herramientas de software, la generación de mallas en un problema computacional científico se lleva una gran parte del esfuerzo necesario para resolver el problema. Así pues, la investigación acerca de la generación de mallas está principalmente dirigida hacia la elaboración de algoritmos que las generen de manera automática. Aquí el término automático se refiere a que el esfuerzo necesario por parte del usuario para generar una malla sea reducido al mínimo: que sea la computadora la que realice la

mayor parte del trabajo, sin embargo, esto no siempre es posible, pues solo el usuario es quien sabe a ciencia cierta que es lo que se desea estudiar.

La generación y posterior control se realiza el módulo ANSYS® Workbench *Mesh*, la discretización numérica seleccionada para el caso estudio, fue un mallado tetrahédrico fino y adaptado a la curvatura, donde el tamaño máximo de cada elemento de la malla fue de 0,025 mm en términos generales, sin embargo, se dimensionó de manera más adecuada en la puntas del turbo estator, donde se apreciará la formación de ondas. En la figura 18 se observa los aspectos generales del mallado, así como características cuantitativas como lo son el número de nodos de 121350 y 643115 elementos (ver figura 19). En cuanto a la calidad del mallado, se observó que los elementos presentan una calidad mínima de 0,94035 y máxima de 1, con un promedio de 0,99824. Referido en porcentaje, se obtiene que la calidad de la ortogonalidad de los elementos para el caso estudio es en promedio de 99,82%, lo que traduce en una excelente calidad para proceder con la simulación del campo de flujo compresible.

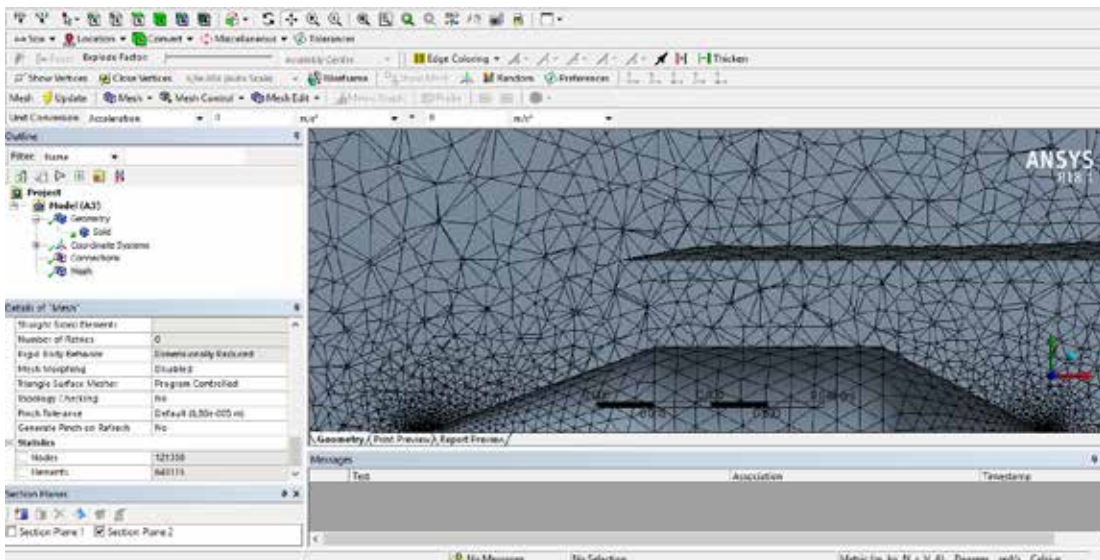


**Figura 18: Aspectos generales del Mallado**

Fuente: Terán (2019)

### 4.4.3. Configuración del dominio

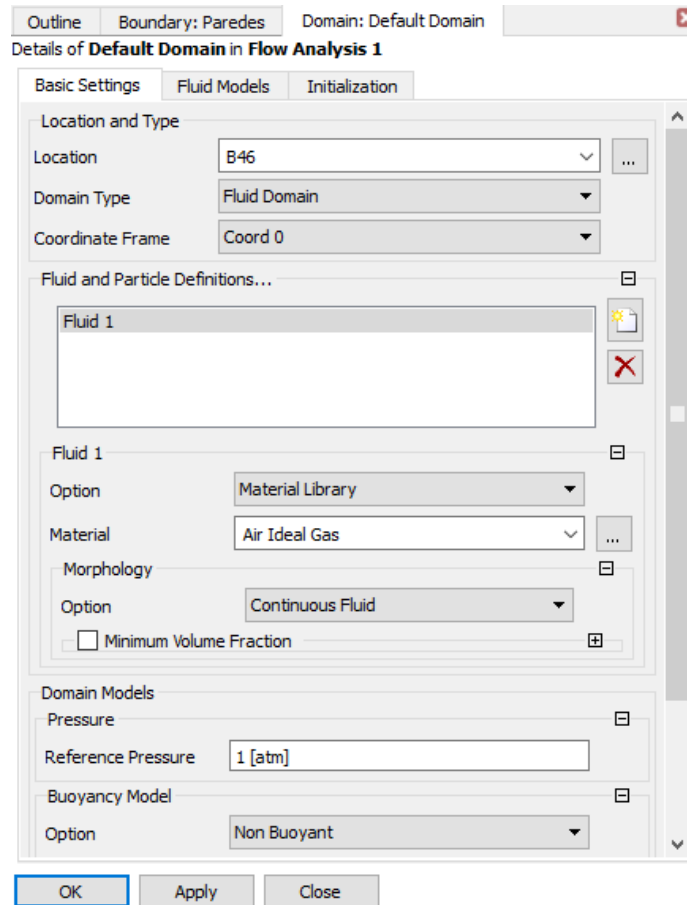
En este paso se definen las constantes conocidas: presión y temperatura, tanto a la entrada como a la salida, para la resolución de las ecuaciones necesarias para lograr una correcta simulación y obtención de resultados a través del módulo de *Set Up* (ver figura 20). Como primer paso el software de resolución de ecuaciones, se define el



dominio fluidizado como el generado por el módulo *Mesh* con fluido definido como aire (gas ideal), ya que de esa forma se incorpora la ecuación de estado al sistema de ecuaciones a resolver y mejora la calidad de la convergencia numérica.

**Figura 19: Número de nodos y de elementos**

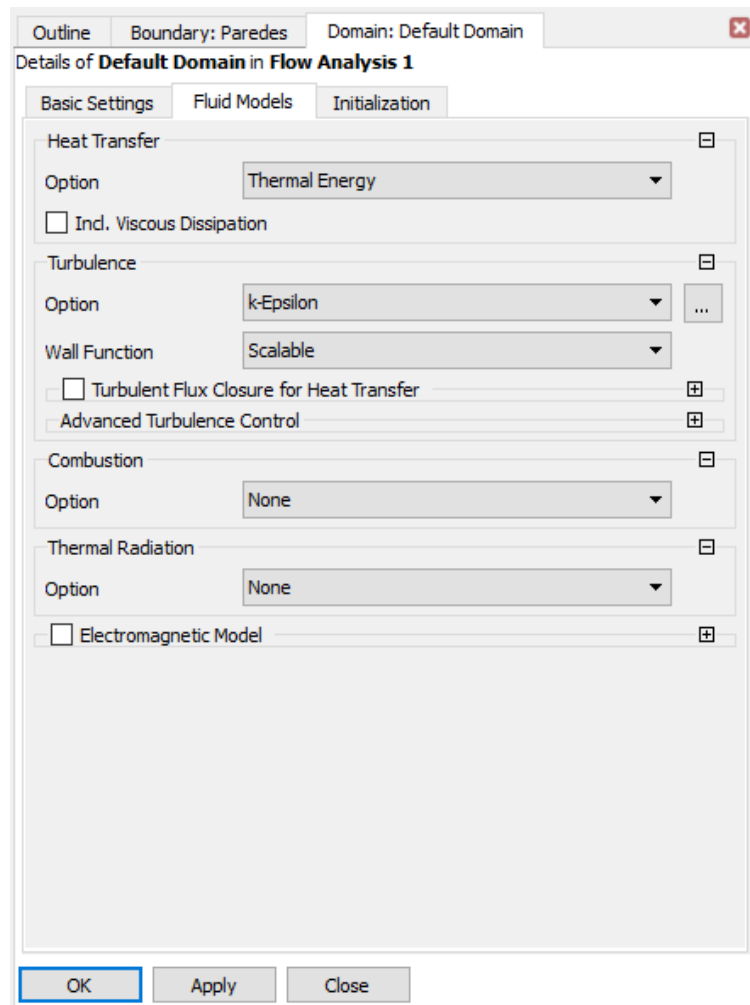
Fuente: Terán (2019)



**Figura 20: Configuración de los parámetros básicos del dominio**

Fuente: Terán (2019)

En la sección del modelo del fluido, como se muestra en la figura 21, se selecciona la opción de energía térmica para tomar en cuenta la primera ley de la termodinámica aplicada a flujo compresible, y la ecuación del modelo de turbulencia que complementa el sistema formado por las ecuaciones de Navier-Stokes para el momento y la ecuación de estado de los gases ideales.



**Figura 21: Modelo matemático de transferencia de energía y turbulencia**

Fuente: Terán (2019)

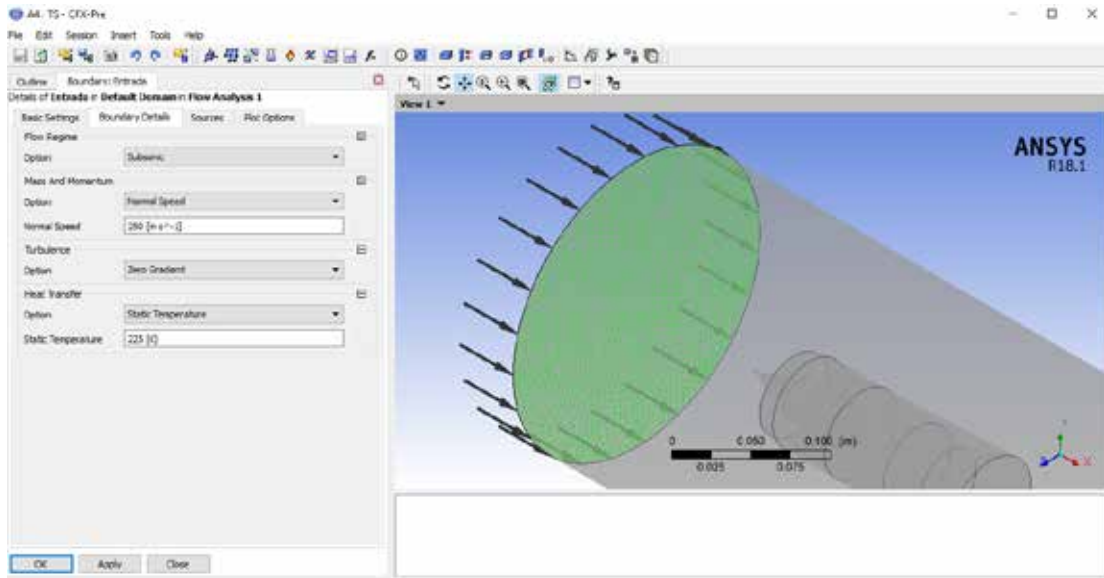
También es importante seleccionar unas adecuadas condiciones de borde para adaptar la simulaciones a casos reales de vuelo supersónico, pues sólo así se garantizaría la aparición de ondas de expansión u choque oblicuas. Debido a la altitud en la que se desrrollan estos vuelos, para minimizar el efecto de la fricción, se asume una altitud de 9144 m (30000 pies) para los cuales la temperatura externa de la

atmosfera ronda los  $-48^{\circ}\text{C}$  y la velocidad del sonido según la ecuación 38, es 300,67 m/s, la cual se usa para variar la velocidad de entrada del aire al dominio fluidizado, según se muestra en la tabla 2.

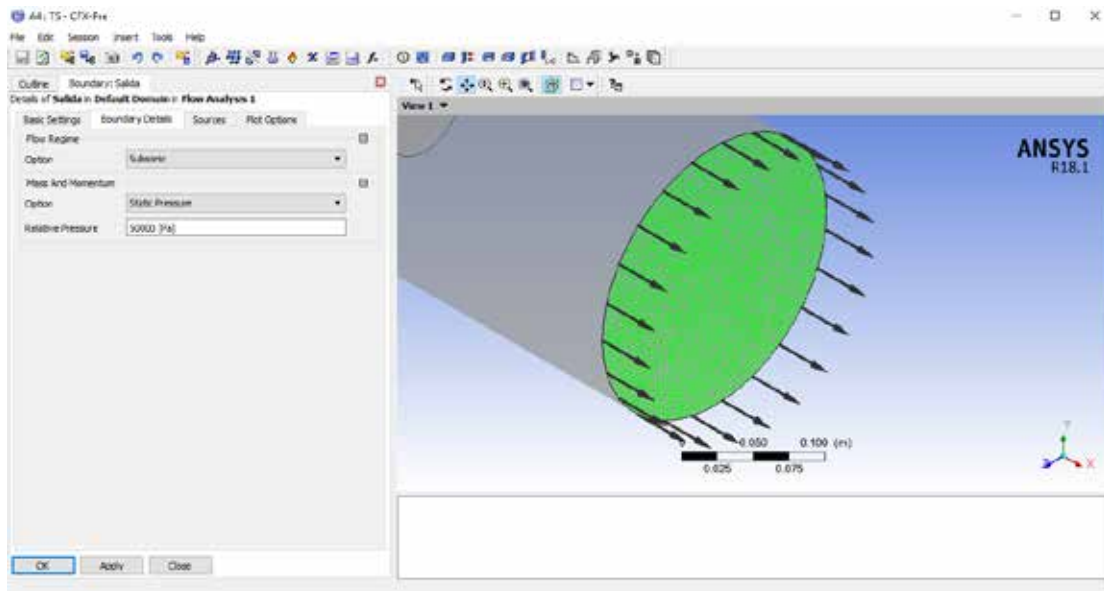
**Tabla 2. Escenarios para la simulación.**

Fuente: Terán (2019)

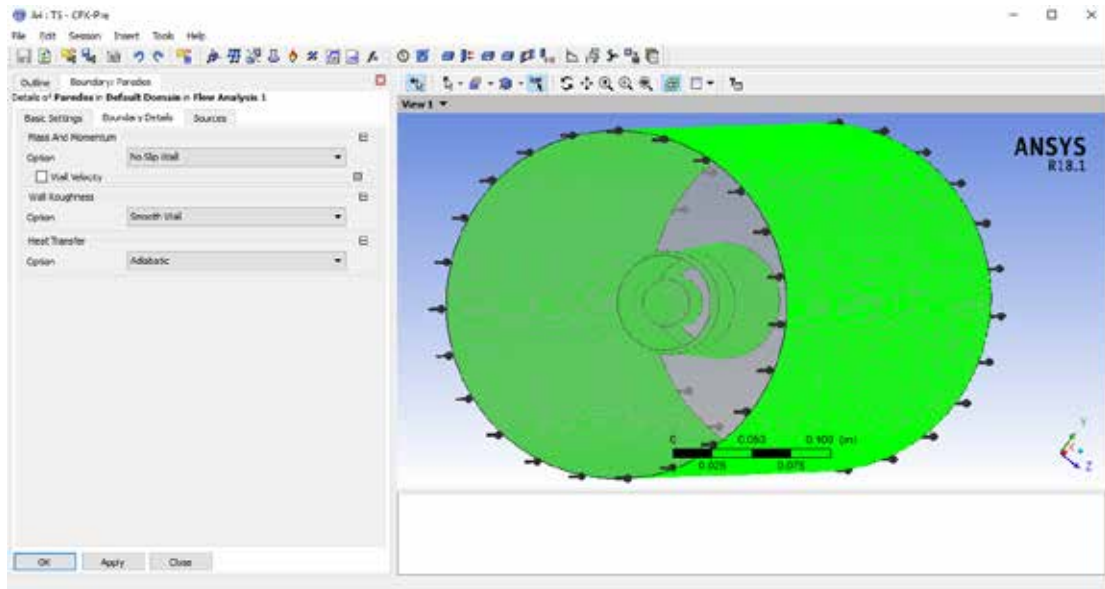

Los escenarios mostrados en la tabla 2, se ajustan a las condiciones teóricas basadas en las referencias bibliográficas como las presentadas en la tabla 1 del capítulo 2. En primer lugar se opta por un flujo transónico ( $M=0,8$ ), para luego pasar a los siguientes escenarios con flujos supersónico ( $M=4$ ) e hipersónico ( $M=8$ ). La configuración de estas condiciones se realiza en el módulo ANSYS® Workbench *setup*, definiendo las diferentes regiones del dominio como la entrada, salida y los bordes sólidos, correspondientes a la pared. En las figura 22 se muestra la configuración de la entrada del dominio para el primer escenario con una velocidad de 250 m/s. En la figura 23 las correspondientes condiciones para la salida y en las figuras 24 y 25, se muestran las selección de las paredes interior y exterior respectivamente.



**Figura 22: Condiciones de entrada para el dominio fluidizado**  
Fuente: Terán (2019)

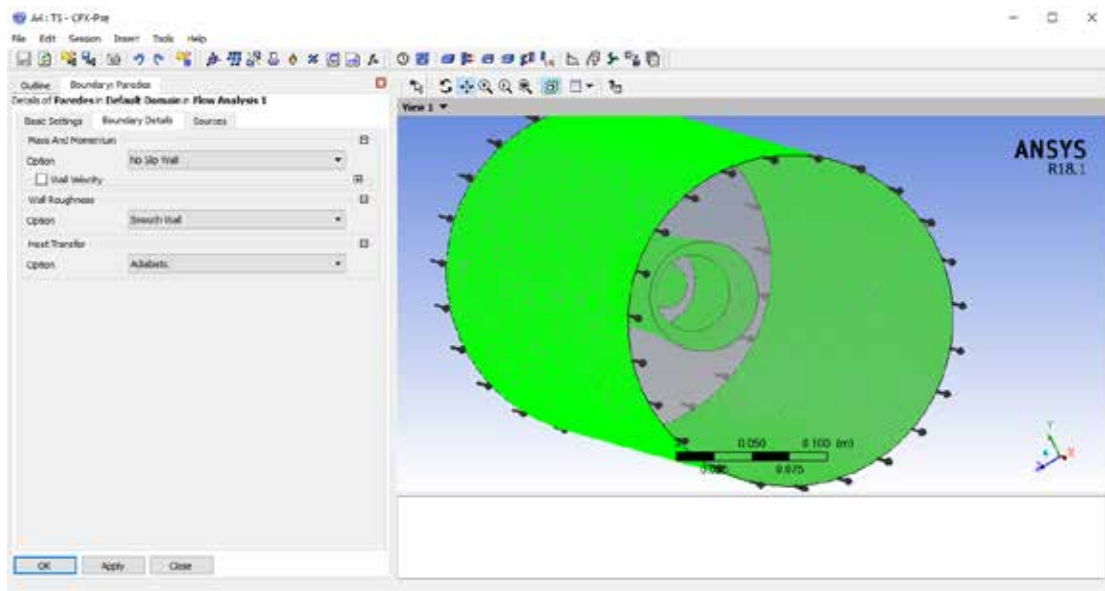


**Figura 23: Consiciones en la salida del dominio fluidizado**  
Fuente: Terán (2019)



**Figura 24: Pared interna del turbo estator**

Fuente: Terán (2019)



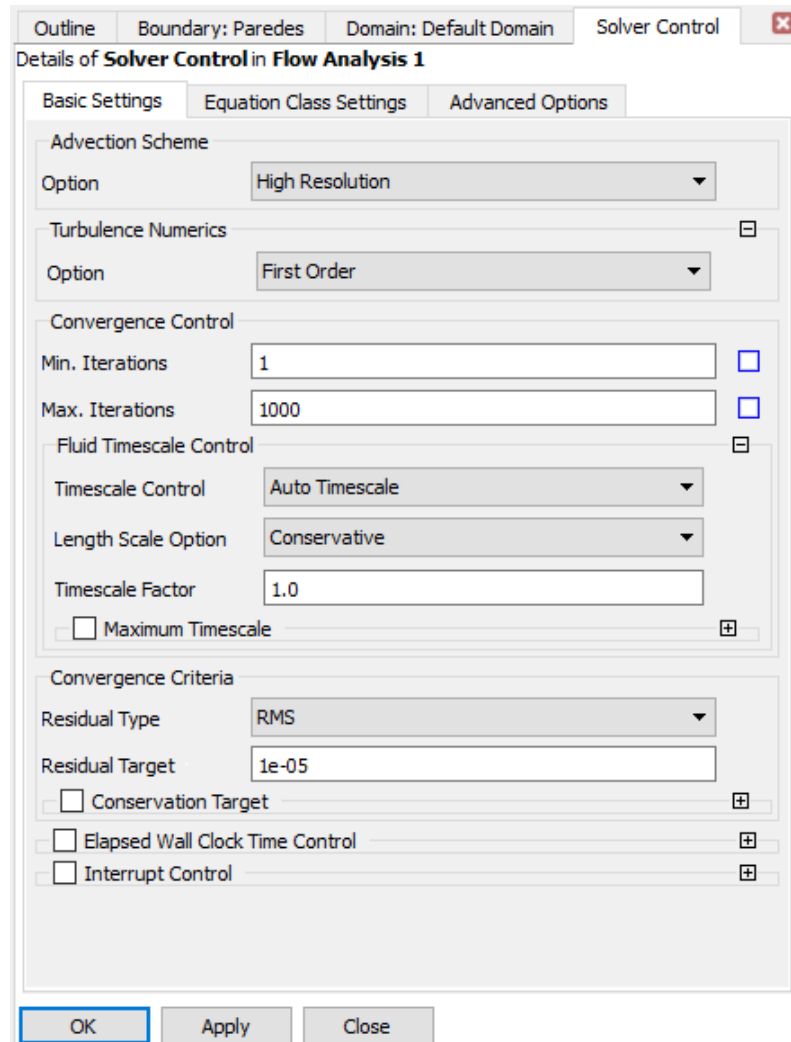
**Figura 25: Pared externa del turbo estator**

Fuente: Terán (2019)

#### 4.4.4. Convergencia de las simulaciones

Mediante el uso del módulo ANSYS® Workbench *solver*, la herramienta CFD resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas resultado de la discretización de las ecuaciones diferenciales de conservación de masa, cantidad de movimiento, energía, estado y modelo de turbulencia, y una manera de conocer si el resultado es aceptable, es por medio de las curvas de convergencia, ya que es esencial asegurarse de que la solución generada conserve estas cantidades. Se fija un valor para la raíz media cuadrática RMS (por sus siglas en inglés) de 0,0001 ( $1 \times 10^{-4}$ ) como principal criterio de convergencia según la guía práctica para la mejor simulación de ANSYS®, el cual es un valor que proporciona una alta precisión en los resultados y es extremadamente conservador para las aplicaciones de flujo compresible; adicional se selecciona un número máximo de 1000 iteraciones, esto con la finalidad de buscar que el objetivo residual sea el criterio principal de convergencia. También es importante señalar que por cada iteración el módulo *solver* o solucionador del sistema de ecuaciones resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones algebraicas desde las condiciones iniciales hasta las condiciones finales y en base a la predicción es que se determina el error RMS, el cual se compara con el fijado en el control de las simulaciones como se muestra en la figura 26, y si resulta mayor, entonces el proceso se repite, ahora con los valores anteriores, pero siempre buscando satisfacer las condiciones de borde. Existen simulaciones en las que no se disponen de datos específicos del fabricante o de la operación de los dispositivos o modelos, en ese caso podría ser difícil lograr la meta de  $1 \times 10^{-5}$  como valor de RMS y por ello ANSYS® Workbench *solver* dispone de otro método de control, el *imbalance* que es una medida del desequilibrio local de la conservación de cada una de las ecuaciones en el volumen de control. Es la medida de convergencia más importante ya que se relaciona directamente con si las ecuaciones se han resuelto con precisión y cuando ello ocurre su comportamiento será una tendencia a cero en las curvas normalizadas. En la figura 27 se muestra la convergencia para el escenario II, donde la última curva converge según el criterio de RMS en la

iteración 127, fue la ecuación de U-momento o componente de la cantidad de movimiento lineal en la dirección x.



**Figura 26: Parámetros para el control de las simulaciones**

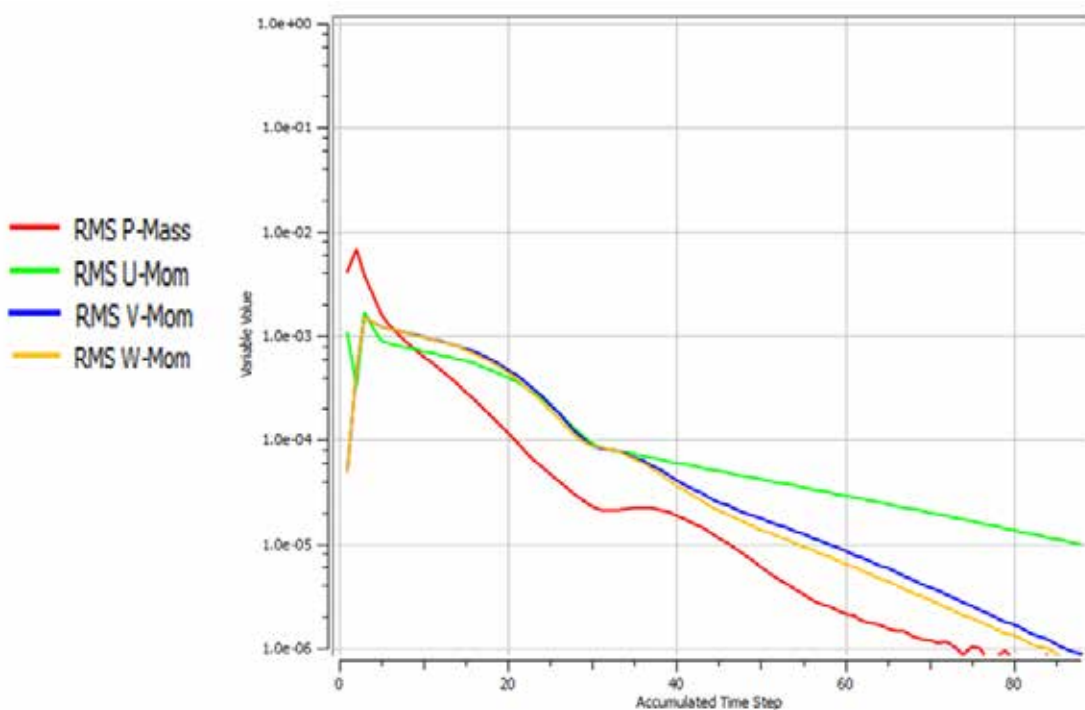
Fuente: Terán (2019)

#### 4.4.5. Obtención de los resultados

Los datos obtenidos son presentados en el módulo ANSYS® Workbench *post*, donde estos se pueden agrupar en forma de gráficos, los cuales representan el comportamiento del flujo, ya sea en gráficos bidimensionales de contornos o curvas de posición, donde se ven definidas las propiedades del fluido a lo largo del dominio

fluidizado, permitiendo así evaluar los resultados obtenidos contra los conocimientos teóricos apoyado en los siguientes gráficos para cada caso:

- Diagramas de contorno de la presión del fluido en la dirección del flujo.
- Curvas de la presión versus la posición a lo largo del flujo.
- Diagramas de contorno de velocidad del fluido en la dirección del flujo.
- Curvas de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo.
- Diagramas de contorno de la densidad en la dirección del flujo.
- Curvas de la densidad versus la posición a lo largo del flujo.



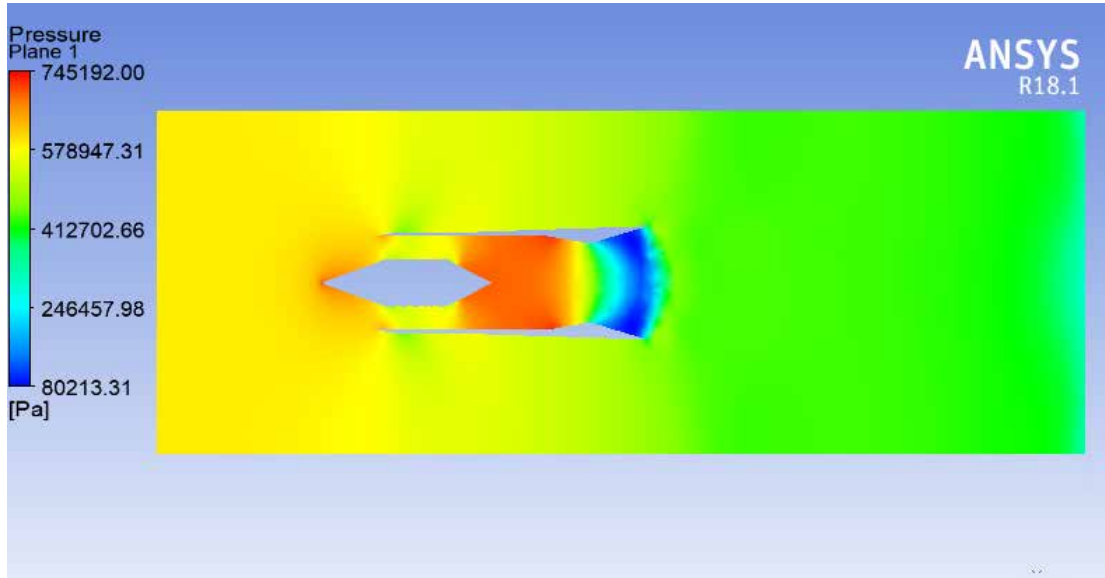
**Figura 27: Convergencia de las ecuaciones para el escenario II**

Fuente: Terán (2019)

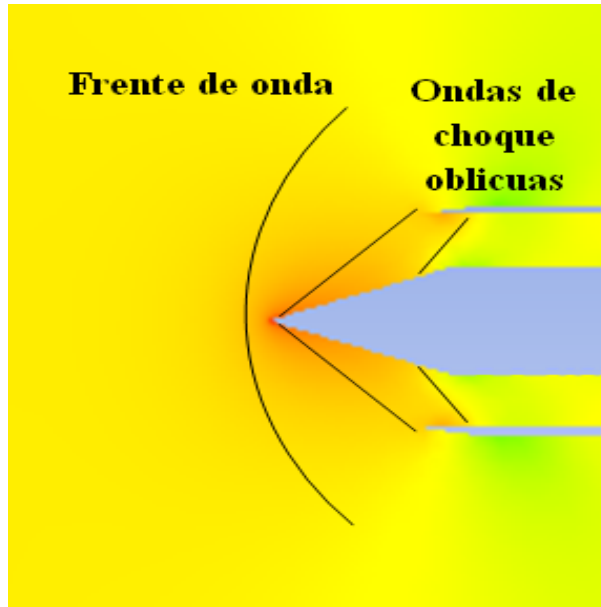
#### **4.5. Descripción de las variables en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su interpretación.**

Es importante indicar que los procesos de simulación no son similares a ejecutar un programa que muestra los resultados de forma explícita, o realizar un diseño mediante una herramienta CAD en el cual ya queda plenamente constituido el plano de la pieza. Los procesos de simulación requieren de conocimientos sólidos de la teoría en la que se basa el estudio, pues solo así se pueden seleccionar la mejor manera de mostrar los resultados y que tipo de elemento de visualización son esenciales para la explicación de los fenómenos asociados.

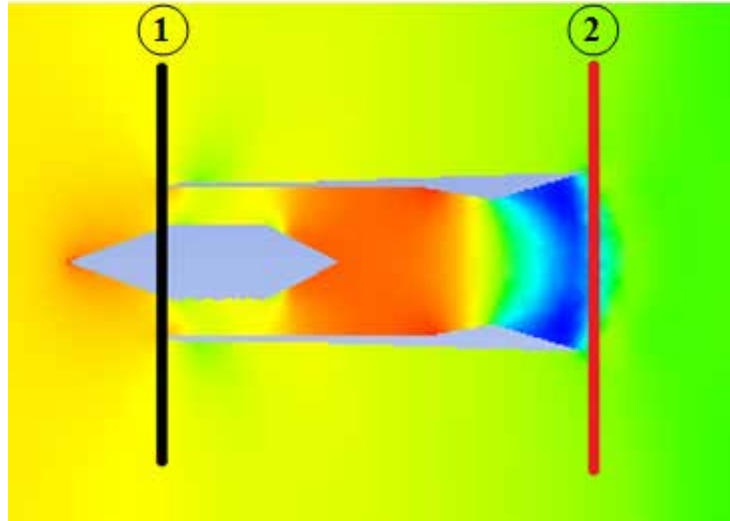
En esta investigación se plantearon tres escenarios (mostrados en la tabla 2), sin embargo para probar la confiabilidad del mallado y convergencia de las simulaciones, se realizó una prueba tal como se haría en un laboratorio para hacer la puesta a punto de los equipos, en este caso se introdujo un gradiente de presión entre la entrada y la salida de 600 kPa, obteniéndose la distribución de presiones (ver figura 28), con claras diferencias en las zonas de incidencia del flujo en la punta del turbo estator, con cambios de presión y densidad en forma de semicircunferencia que denotan ondas de choque (ver detalle en la figura 29), incremento de la presión en la zona correspondiente a la cámara de combustión, y disminución en la tobera de descarga, lo que implica un aumento de la velocidad de salida, ayudando el empuje del dispositivo. Por otra parte para los efectos del cálculo del empuje, se colocan dos planos referenciales 1 y 2, justo en la entrada del turbo estator y en la descarga o salida del mismo como se muestra en la figura 30, con la finalidad de medir la presión y la velocidad promedio en dichos planos. Estos valores se pueden medir sobre un plano transversal al flujo, para cada uno de los escenarios a fin de determinar la variación del empuje en función del número de Mach.



**Figura 28: Distribución de presiones de prueba para DP=600 kPa**  
Fuente: Terán (2019)



**Figura 29: Detalle del frente de onda y las ondas de choque oblicuas**  
Fuente: Terán (2019)



**Figura 30: Planos transversales en la entrada y salida del turbo estator**

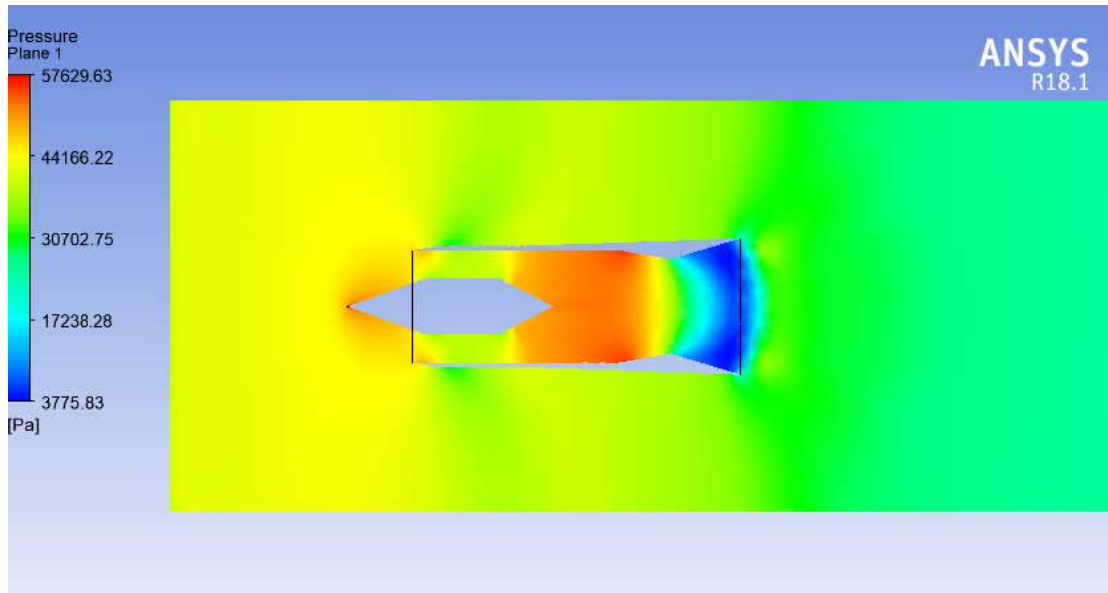
Fuente: Terán (2019)

#### 4.5.1 Caracterización del campo de Flujo para $M=0,8$

Inicialmente se considera un flujo al límite transónico con número de Mach en la entrada de 0,8 con la finalidad de caracterizar el campo de flujo a través del turbo estator. La idea es comprobar que efectivamente no se presentan frentes de onda, ni ondas de expansión oblicuas en la zona del cono, tanto en la incidencia como a través de la pendiente. En la figura 31 se muestra la distribución de presiones en un plano longitudinal y simétrico al flujo, observándose principalmente un leve incremento de la presión en la zona de impacto del flujo contra el turbo estator, propio de un perfil de presiones de estancamiento, sin embargo las variables cambian a medida que el flujo pasa a través del dispositivo, tal como se indican en la tabla 3.

**Tabla 3. Cambios en las variables para  $M=0,8$ .**

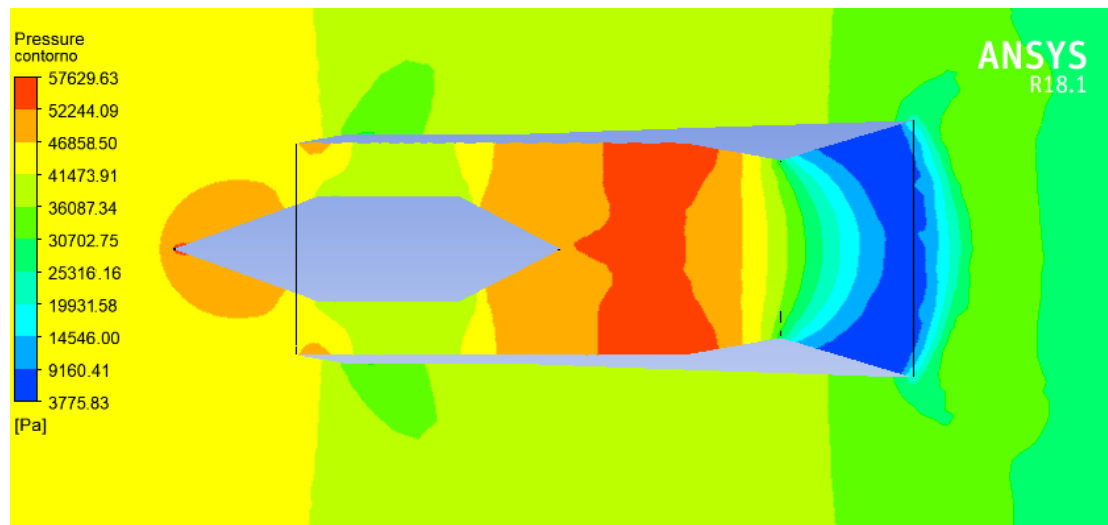
Fuente: Terán (2019)

**Figura 31: Distribución de presiones para  $M=0,8$**

Fuente: Terán (2019)

Otra forma de mostrar con más detalles las diferentes presiones que se presentan en el campo de flujo, es por medio de los contornos, que son patrones de isosuperficies donde predomina la presión máxima por sectores. En la figura 32 se muestra el contorno de presiones para el caso de  $M=0,8$ .



### Figura 32: Contornos de presiones para M=0,8

Fuente: Terán (2019)

En la figura 33 se muestra las líneas de corriente a través del dominio fluidizado, y también se denotan los planos 1 y 2 de donde se extrajeron los valores de la velocidad promedio normal de entrada y salida respectivamente.

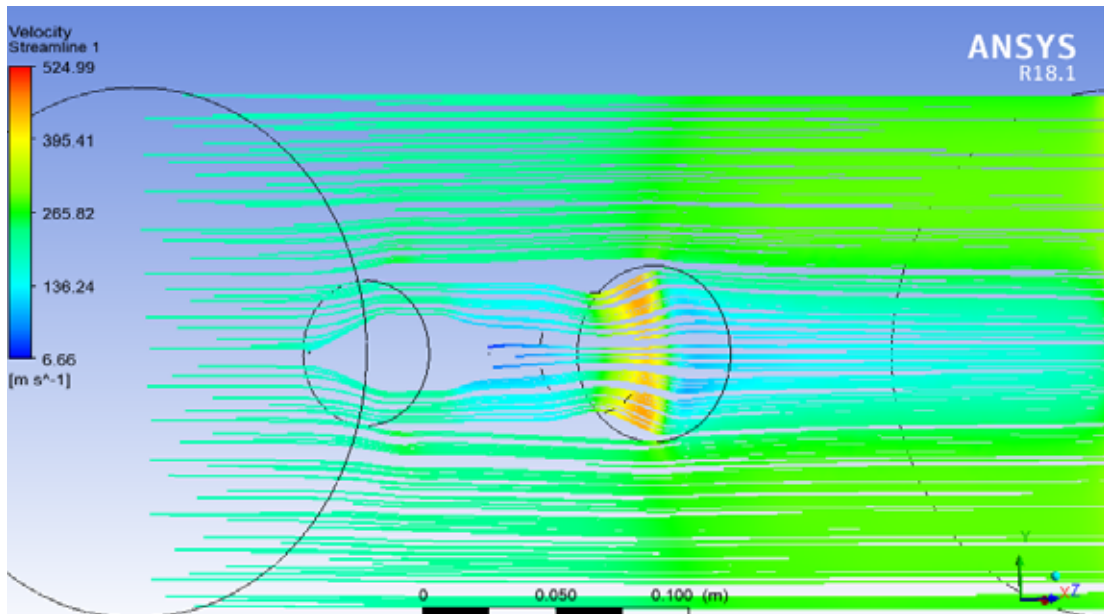


Figura 33: Líneas de corriente para M=0,8

Fuente: Terán (2019)

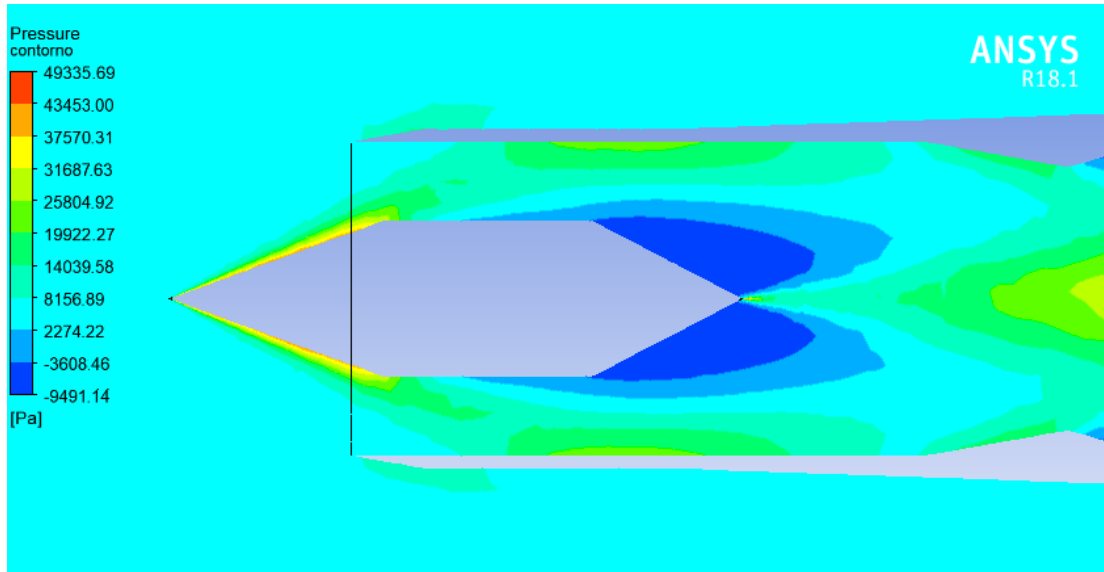
#### 4.5.2 Caracterización del campo de Flujo para M=4

El interés de ésta investigación es caracterizar las ondas de choque oblicuas y se requiere que el turbo estator se mueva a velocidades supersónicas, por ello ahora se establece como condición de entrada M=4, el cual representa el límite superior del flujo supersónico e inferior del flujo hipersónico. Los cambios de las variables para este escenario se muestran en la tabla 4 y el contorno de presiones en la figura 34.

Tabla 4. Cambios en las variables para M=4.

Fuente: Terán (2019)



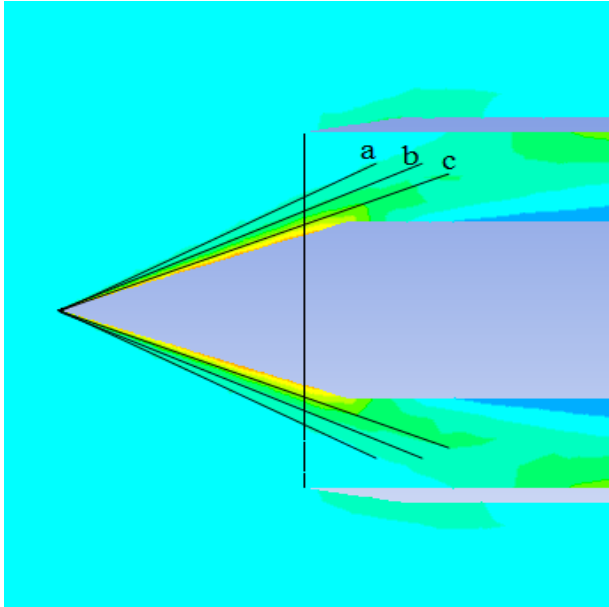


**Figura 34: Contornos de presiones para M=4**

Fuente: Terán (2019)

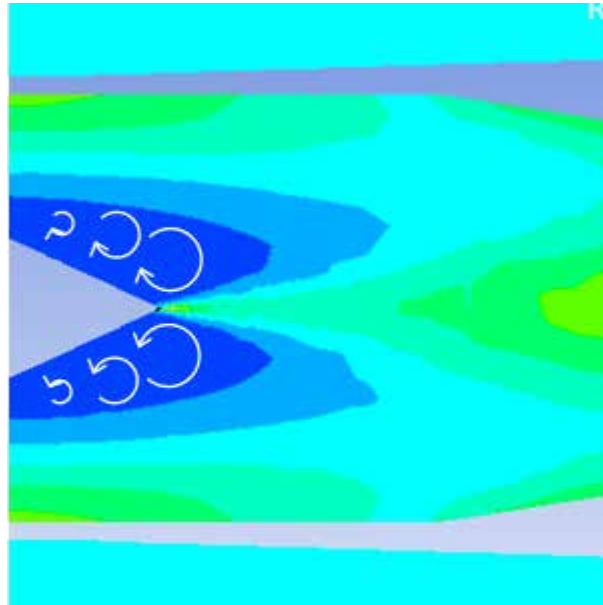
En la figura 34 y con la herramienta de visualización por contornos, se pueden definir los perfiles de las ondas de choque oblicuas en el cono de entrada del turbo estator, donde los mismos forman un abanico de ondas que se propagan hacia el interior del mismo y que inician justo en el vértice del cono, tal como se muestra en la figura 35. Las ondas demarcadas por las letras a, b y c, muestran un incremento en la presión a medida que de se acercan al sólido, lo que significa que existe una caída de la velocidad y por ende del número de Mach en la dirección normal a la superficie y corriente abajo, demostrándose con esto la dependencia del ángulo de deflexión del choque oblicuo, respecto del ángulo de choque para diferentes valores del número de Mach corriente arriba. Por otra parte en el lado posterior al cono del turbo estator se presenta una zona de baja presión (ver figura 36) que ayuda a la generación de vórtices e incrementa la turbulencia del aire, lo que ayuda a la quema del combustible que se

atomiza en la cámara de combustión, lo que podría ayudar a la generación de una flama uniforme y sin espacios ocupados por mezcla no quemada.



**Figura 35: Ondas de choque oblicuas para  $M=4$**

Fuente: Terán (2019)

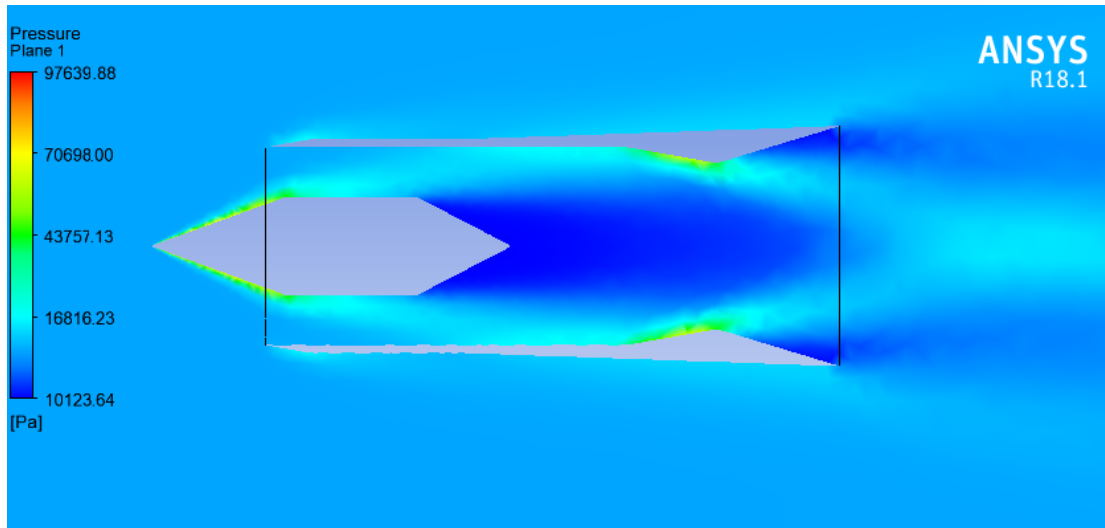


**Figura 36: Depresión en la parte posterior del cono del turbo estator para  $M=4$**

Fuente: Terán (2019)

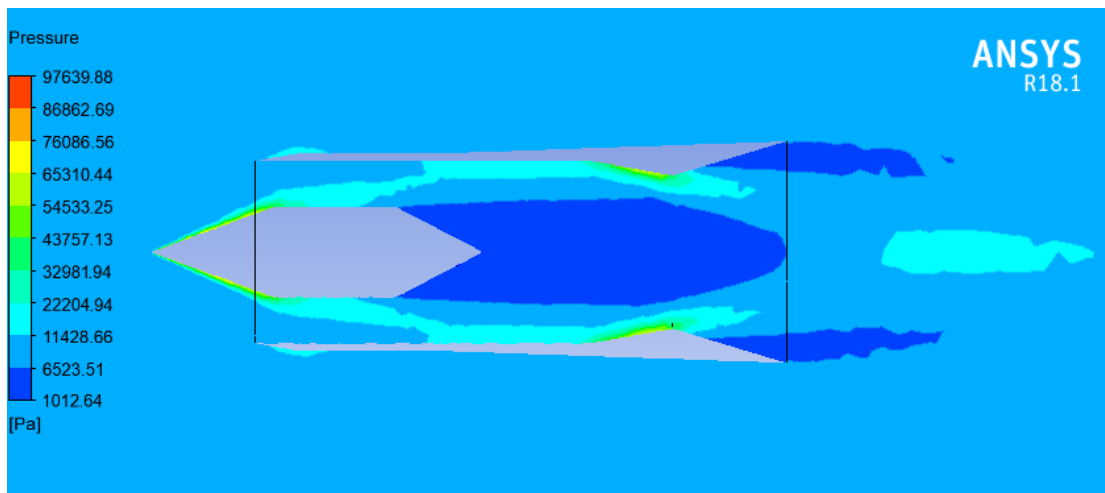
#### **4.5.3 Caracterización del campo de Flujo para $M=8$**

Basados en los criterios de visualización anteriores, se presenta el tercer escenario, donde el número de Mach se ha incrementado a 8, garantizándose así flujo hipersónico. En la figura 37 se muestra la distribución de presiones, mientras que en la figura 38, el contorno de presiones.



**Figura 37: Distribución de presiones para M=8**

Fuente: Terán (2019)



**Figura 38: Contorno de presiones para M=8**

Fuente: Terán (2019)

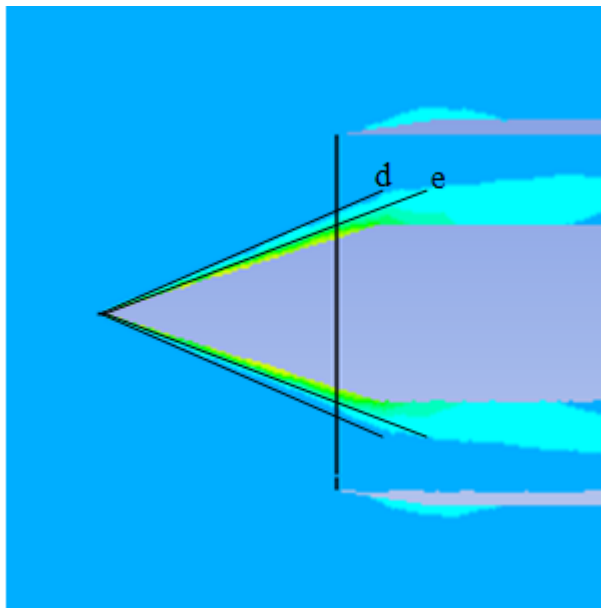
En la tabla 5 se muestran las variables en los planos 1 y 2 para el régimen de flujo hipersónico.

**Tabla 5. Cambios en las variables para M=8.**

Fuente: Terán (2019)

--	--


En la figura 39 que muestra el detalle de los perfiles de las ondas de choque oblicuas, permite una comparación con la figura 35, y en este caso existe menos ondas incidentes con la superficie física del cono.



**Figura 39: Ondas de choque oblicuas para  $M=8$**

Fuente: Terán (2019)

#### 4.5.4 Cálculo del empuje del turbo estator

Aunque no es un objetivo de la presente investigación, resulta interesante conocer cual es el empuje del turbo estator en función al régimen de flujo, que no es más que la variación del número de Mach. Tomando como volumen de control la región entre los planos 1 y 2, y aplicando la ecuación del momento (segunda ley de Newton) se tiene que el empuje viene dado por:

$$F = m_e V_e - m_s V_s + (p_e - p_s) A_e \quad (80)$$

Donde:

$F$  fuerza de empuje (N)

$m_e$  flujo másico que entra al turbo estator (kg/s)

$m_s$  flujo másico que sale del turbo estator (kg/s)

$p_e$  presión en la entrada del turbo estator (kg/s)

$p_s$  presión en la salida del turbo estator (kg/s)

$A_e$  área de la sección de entrada (m<sup>2</sup>)

El flujo másico se determina por medio de la densidad, la velocidad en la entrada y el área, la cual representa la sección anular de la entrada del turbo estator.

Como un ejemplo de cálculo, se consideran las variables mostradas en la tabla 4, correspondiente al escenario II, con número de Mach M=4.

$$m_e = \rho V A = \left(0,214 \frac{kg}{m^3}\right) \left(1208,317 \frac{m}{s}\right) (0,001491 m^2) = 0,3855 \frac{kg}{s}$$

Según las investigaciones llevadas a cabo en el Glenn Research Center adscrito a la NASA, el flujo másico de salida se incrementa en 5% con relación a la entrada debido a la atomización del combustible en la cámara, lo que resulta:

$$m_s = 0,42602 \frac{kg}{s}$$

Luego usando la ecuación 80, se tiene:

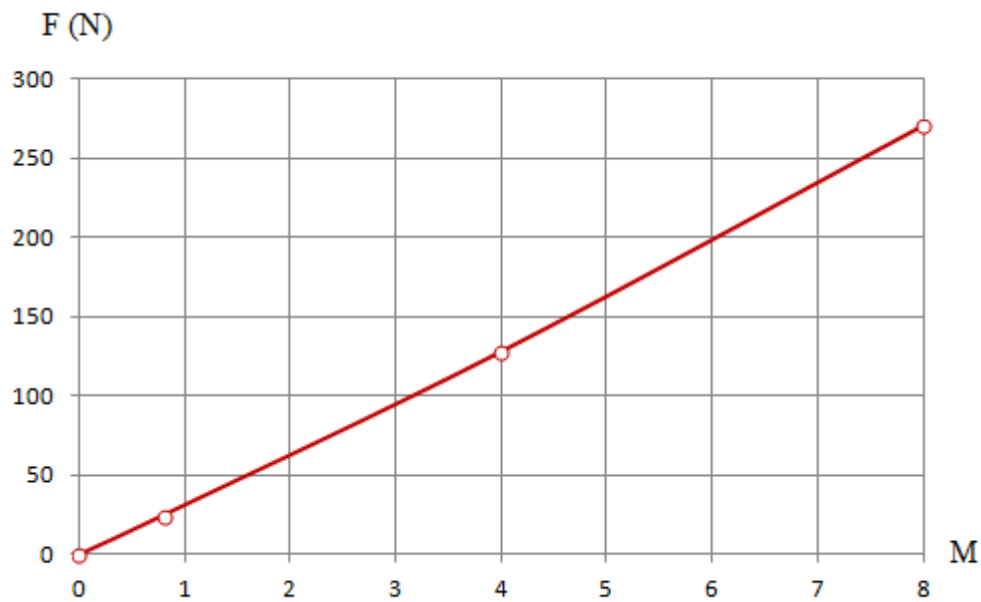
$$F = \left(0,38554 \frac{kg}{s}\right) \left(1208,317 \frac{m}{s}\right) - \left(0,42602 \frac{kg}{s}\right) \left(845,364 \frac{m}{s}\right) + [(17,405 - 2,326) kPa] (0,001491 m^2) \left(\frac{1000 N}{1 kN}\right) = 128,195 N$$

Y de forma similar se procede con los otros escenarios.

En la tabla 6, se muestran los resultados de los cálculos y en la figura 40, se muestra la variación del empuje F(N) versus el número de Mach y donde se observa un incremento lineal del empuje en función del número de Mach.

**Tabla 6. Cálculo del empuje en función del número de Mach.**

Fuente: Terán (2019)

**Figura 40: Gráfico del empuje axial en función del número de Mach**

Fuente: Terán (2019)

Para alto vuelo supersónico o hipersónico, el sistema de propulsión ideal es un ramjet ya que utiliza la velocidad de avance del avión para comprimir el aire entrante y, por lo tanto, tiene menos partes móviles que un motor de turbina. El combustible se inyecta (atomiza) y se mezcla para la combustión justo aguas abajo de la entrada. La llama resultante se estabiliza en el motor por el anillo de soporte de la llama roja. Esta

parte es muy similar a un dispositivo de poscombustión de un motor de avión de combate. El escape caliente luego pasa a través de la boquilla, que tiene la forma de acelerar el flujo y producir el empuje.

## **Conclusiones:**

El flujo supersónico representa un importante campo de estudio y su efecto en los dispositivos que se mueven a través de él. En el caso de un turbo estator se evidenció que la variable que mayormente influye en el comportamiento del flujo es el número de Mach, Pero debido a la forma de entrada del ramjet, se forman ondas de choques oblicuas, por ser un flujo aximétrico. Que hacen que el flujo disminuya a velocidades subsónicas mientras la temperatura y la presión aumenta. Mas alto que la temperatura y presión ambiente. Con ayuda de ANSYS<sup>®</sup> Workbench *Design Modeler* podemos describir las variables que forman el campo de flujo supersónico a través de un turbo estator utilizando dinámica de fluidos computacional, obtenemos referencias de como las ondas de choques oblicuas reducen la eficiencia del combustible desmejorando el empuje del ramjet.

A pesar de no existir una base de datos pública, pues los diseños de turbo estatores están restringidos a un pequeño número de empresas y organizaciones que los usan con fines militares y/o aeroespaciales, se logro encontrar un diseño teórico proporcionado por el Glenn Research Center y se modeló en escala reducida para su estudio con ANSYS<sup>®</sup> Workbench *Design Modeler*.

La herramienta computacional para análisis de CFD, ANSYS<sup>®</sup>Workbench CFX<sup>®</sup>, es un software robusto, que incluye los modelos matemáticos apropiados para la simulación de flujos supersónicos, entre ellos los utilizados en esta investigación para caracterizar las ondas de choque oblicuas en el turbo estator fueron las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds (RANS), la ecuación de la energía y el modelo de turbulencia Shear Stress Transport. (SST).

El mallado del dominio fue refinado a medida que se hacían las simulaciones, esto con la finalidad de obtener una mejor visualización de las ondas de choque oblicuas, sin embargo también se lograron apreciar ondas de expansión en la desagrada del turbo reactor.

La simulación convergió primero por el control del error medio cuadrático RMS de  $1 \times 10^{-5}$  recomendado en la guía práctica para la mejor simulación de ANSYS<sup>®</sup>, que por el criterio de las 1000 iteraciones.

Se determinó que el método de visualización apropiado para la caracterización de las ondas de choque oblicuos, es el contorno de presiones, ya que permite diferenciar las zonas donde ocurren las discontinuidades y no requiere de múltiples planos de distribución de presiones, tampoco de perfiles de velocidades o líneas de corriente.

A medida que se incrementa la velocidad del dispositivo y por ende el número de Mach, el abanico de ondas de choque oblicuas que se posicionan justo en el vértice del cono de turbo estator, se atenúan, es decir los ángulos de dispersión entre las diferentes ondas es menor a aumentar el número de Mach.

Los escenarios en que se realizaron las simulaciones, escogidos meticulosamente para presentar tres marcados regímenes de flujo, permitieron calcular por medio de los datos medidos sobre los planos de entrada y salida del turbo estator, el empuje del dispositivo, demostrándose una relación lineal con el número de Mach.

## **Recomendaciones**

Aplicar la técnica de aproximación numérica CFD para el estudio de turbo estatores de combustión supersónica (scramjets) y comparar con los valores experimentales que se dispongan.

Desarrollar el estudio de la selección de materiales para la fabricación de turbo estatores empleados en la industria aeronáutica, incluyendo el estudio completo de las temperaturas y presiones que experimenta, tanto internas como externas.

Incluir en el pensum de Ingeniería Mecánica de la Universidad José Antonio Páez una materia enfocada a estudio de la dinámica de fluidos computacional para relacionar a los estudiantes con esta rama de la física y ampliar los estudios en materias de la rama Termo-Hidráulica.

## BIBLIOGRAFÍA

- Aguilar, C. (2014) “Simulación numérica de tópicos de flujo supersónico: chorro supersónico subexpandido y flujo supersónico sobre un cuerpo con perfil de cápsula espacial” Trabajo especial de grado en Ingeniería Mecánica. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Anderson John. “Modern Compressible Flow”. Segunda Edición. New York. McGraw Hill Education, 2002.
- ANSYS-CFX. Release 17 ANSYS CFX-Solver Theory Guide. (2016).
- Behar D. (2008) METODOLOGIA de la INVESTIGACION (1ª ed.) México D.F. Ediciones Shalom.
- Caraballo, G. (2008), “Diapositivas de Dinámica de Gases” Diapositivas para la materia de Ingeniería Mecánica. Universidad de Carabobo.
- Cengel, Y. (2012), Fundamentos de Mecanica de Fluidos. (2ª ed.). Mexico D.F: McGraw Hill Education.
- Garrido J.G., Hernández-Martínez E., Toledo M., Ortega J. y Quinto-Diez P.(2016),“Evaluación de las características de las ondas de choque oblicuas en un perfil aerodinámico de doble cuña”. Scientific Research Publishing. Engineer-ing, pp 862-871.
- Granados, C. (2019) “Estudio del campo de flujo compresible en la descarga de una tobera convergente-divergente utilizando técnicas de aproximación numérica” Trabajo especial de grado en Ingeniería Mecánica. Universidad José Antonio Páez.
- Mataix, C. (1998) Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas. (2ª ed.). Madrid: Ediciones del Castillo, S.A.
- Mohan Kumar G, Manoj Kannan G. y Vignesh Kumar R.( 2014), “Análisis de las ondas de choque sobre un perfil NACA 66-206 en régimen supersónico”. Advances in Aerospace Science and Applications, volume 3, numero 2, pp. 125-130.

- Sampieri R., Fernandez C., Baptista P., (2006) “Metodología de la Investigación”. McGraw – Hill.
- Tamayo y Tamayo, Mario. El Proceso de la Investigación científica. Editorial Limusa S.A. México.1997.
- Universidad José Antonio Páez. (2007). Normas para Elaboración y Presentación de los Anteproyectos, Proyectos y Trabajos de Grado. San Diego, Carabobo, Venezuela.
- Vélez, S. Carlos M (2001) Apuntes de metodología de la investigación. Departamento de ciencias básicas Universidad EAFIT, Medellin – Antioquia. [En línea] Disponible en: <https://es.slideshare.net/saratogawild/apuntes-metodología-investigación>.