“ANÁLISIS COMPARATIVO DEL MÉTODO DE AUTO VALORES Y VECTORES DE RITZ, EN ESTRUCTURAS REGULARES DE MARCOS IDEALIZADOS”

Autores: Rodríguez Andrés
C.I.24.574.537
Díaz Susan
C.I. 24.329.621

Urb. Yuma II, Calle No 3 Municipio San Diego
Teléfono (0241) 8714240 (máster)

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

"ANÁLISIS COMPARATIVO DEL MÉTODO DE AUTO VALORES Y VECTORES DE RITZ, EN ESTRUCTURAS REGULARES DE MARCOS IDEALIZADOS"

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de

INGENIERO CIVIL

Autores: Rodríguez Andrés
C.I.24.574.537
Díaz Susan
C.I. 24.329.621
Tutor: Ramón Mata
C.I.:22728474

San Diego, 2017.

Universidad José Antonio Páez
Facultad de Ingeniería

FI-TG-2017-1CR-037

Valencia, 13 de Enero de 2017.

Ciudadanos:
Andrés Rodríguez.
C.I. 24.574.537
Susan Díaz.
C.I. 24.329.621
Presente.-

Cumplo con informarle que la Comisión de Trabajo de Grado y Pasantías de la Facultad de Ingeniería en su reunión N° **1-2017** de fecha **13/01/2017** aprobó el proyecto de trabajo de grado titulado **"ANÁLISIS COMPARATIVO DEL MÉTODO DE ANÁLISIS ESPECTRAL CON SUPERPOSICIÓN MODAL CON 3GL POR NIVEL, EN ESTRUCTURAS REGULARES DE ACERO, UTILIZANDO EL MÉTODO DE AUTO VALORES Y VECTORES DE RITZ".** Presentado por ustedes como requisito para optar al título de Ingeniero Civil.

Se ratifica la designación del Ing. Ramón Matas C.I. 22.728.474 y la Ing. Alicia Pizzella, C.I. 4.598.880 como Tutotes Académicos que lo asesorarán en el desarrollo de este proyecto.

Atentamente.

Facultad de Ingeniería
UJAP
DECANATO

Prof. Marlene Zambrano
Decana (Encargada) de la Facultad de Ingeniería
(CU502 de fecha 11/10/2016)

c. c. Coordinación de Pasantías y Trabajo de Grado (2).
Archivo.

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

ACEPTACIÓN DEL TUTOR

Quien suscribe, Ingeniero Mata Ramón portador de la cédula de identidad N° 22728474, en mi carácter de tutor del trabajo de grado presentado por los ciudadanos Rodríguez Andrés, portador de la cédula de identidad N° 24.574.537, y Díaz Susan, portador de la cédula de identidad N° 24.329.621, titulado **"ANÁLISIS COMPARATIVO DEL MÉTODO DE AUTO VALORES Y VECTORES DE RITZ, EN ESTRUCTURAS REGULARES DE MARCOS IDEALIZADOS"**, presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Civil, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En San Diego, a los 12 día del mes de Junio del año dos mil diecisiete (2017).

Ing. Mata Ramón
C.I.:22728474

AGRADECIMIENTO

Primero que nada queremos agradecer a Dios por darnos la vida, salud, paciencia y sabiduría para lograr terminar este proyecto tan significativo en nuestras vidas.

A la Universidad José Antonio Páez y aquellos profesores que contribuyeron en nuestra formación académica.

Al Ing. Ramón Mata, tutor de nuestro trabajo de grado, por su valioso aporte de ayudarnos, dedicar tiempo y poder concluir este proyecto.

A la Ing. Alicia Pizzella por su ayuda, colaboración para la realización y culminación de este trabajo, gracias ya que sin su ayuda no hubiese sido posible.

Agradecemos inmensamente a nuestros padres y familiares, por ayudarnos en todo que necesitamos y por siempre apoyarme a lo largo de toda la carrera y poder culminarla exitosamente.

Los Autores.

DEDICATORIA

Principalmente quiero dedicar este trabajo a nuestros padres, quiénes fueron un pilar fundamental en esta lucha, ya que sin su apoyo y dedicación este no se estuviera materializando. Gracias por su paciencia, apoyo incondicional, por creer en nosotros en todo momento y por darnos lo necesario para poder lograr lo propuesto. Sin ustedes no sería posible lograr esta meta.

A mis hermanos Carlos Rodríguez y Andrea Rodríguez, quienes jamás dudaron de mi capacidad de alcanzar este sueño.

A mis tíos Fortunato Panella y Pedro Rodríguez, quienes siempre me apoyaban y alentaban durante toda mi carrera universitaria.

A nuestros abuelos que gracias a sus consejos y críticas constructivas estuvieron en cada momento.

A nuestros amigos tanto en la etapa escolar como en nuestra etapa universitaria, quienes son muy especiales aunque muchos han estado un poco ausentes gran parte de nuestras vidas nos llenaron de fuerzas y alegría cuando nos veíamos. Siempre viendo el lado positivo de las cosas y aconsejándonos para ser cada día unas mejores personas.

A todos los profesores y compañeros que contribuyeron en nuestra formación a lo largo de toda la carrera.

Gracias a Todos y espero tenerlos presentes a lo largo de mis proyectos, espero nunca defraudarlos y Gracias por siempre Confiar en mí.

Andrés Rodríguez y Susan Díaz.

ÍNDICE

CONTENIDO
ÍNDICE DE TABLAS……...xi
ÍNDICE DE FIGURAS…… x
RESUMEN……..…… xi
INTRODUCCIÓN…….....1
CAPÍTULO
I EL PROBLEMA
1.1 Planteamiento del problema 3
1.2 Formulación del problema 5
1.3 Objetivos de la investigación 6
1.3.1 Objetivo general.....6
1.3.2 Objetivos específicos.....6
1.4 Justificación.....7
1.5 Limites.....7

II MARCO TEÓRICO
2.1 Antecedentes 8
2.2 Bases teóricas 9
2.2.1 Estructuras Simples 9
2.2.2 Sistemas de un grado de libertad 9
2.2.3 Vibración libre 11
2.2.4 Fuerza de amortiguamiento 11
2.2.5 Vibración libre no amortiguada 12
2.2.6 Vibración libre viscosamente amortiguada 14
2.2.7 Vibración libre con amortiguamiento de coulomb 15
2.2.8 Respuesta Dinámica de una Estructura con Múltiples Grados de Libertad (MGL). 19
2.2.9 Sistema de masa-resorte-amortiguador.....19

2.2.10 Componentes de rigidez, amortiguamiento y masa 20
2.2.11 Enfoque general para los sistemas lineales. 21
2.2.12 Fuerzas elásticas 21
2.2.13 Fuerzas de amortiguamiento 22
2.2.14 Fuerzas de inercia 23
2.2.15 Matriz de Rigidez. 25
2.2.16 Descripción del método 26
2.2.17 Ecuaciones de Movimiento 27
2.2.18 Resumiendo los usados en el análisis dinámico son: 29
2.2.19 Método de superposición modal 29
2.2.20 Análisis Modal 30
2.2.21 Generación de Vectores de Ritz 33
2.2.22 Solución del Sistema Dinámico usando Vectores de Ritz 34
2.2.23 Proceso de ortogonalización con Gram Schmidt 37
2.2.24 Desarrollo del Algoritmo y Diagrama de Flujo 39
2.2.25 Métodos de combinación espectral de la respuesta modal 41
2.3 Bases legales 44
2.4 Definición de términos básicos 44

III MARCO METODOLÓGICO

3.1 Tipo de Investigación. 46
3.2 Diseño de la Investigación. 47
3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos. 48
3.4 Fases Metodológicas. 49

IV ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Describir el procedimiento de los métodos. 51
4.1.1 Generación de Vectores de Ritz……51
4.1.2 Análisis Modal 52
4.2. Establecer la metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz……55

4.2.1 Método de Rayleigh Ritz 55
4.2.2 Método de Auto valores..... 57
4.3 Cálculos matemáticos de los métodos……...63
4.3.1 Cálculos matemáticos para marco de 2 nivel…….…....63
4.3.2 Cálculos matemáticos para marco de 5 nivel…….…..70
4.3.3 Cálculos matemáticos para marco de 6 niveles……..…..93
4.4 Compara**n**do el método de auto valores y vectores de Ritz……126
4.4.1 Marco de dos niveles idealizado. 126
4.4.2 Marco de cinco niveles idealizado 129
4.4.3Marco de seis niveles idealizado 136

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS……..146

ÏNDICE DE TABLAS

CONTENIDO

TABLA **Pp**

Tabla 1. Altura de la estructura. 64

Tabla 2. Matriz de Rigidez. (Marco de dos niveles)..... 64

Tabla 3. Matriz de Masa. (Marco de dos niveles) 64

Tabla 4. Determínate. 65

Tabla 5. Ecuación de la determinante. 65

Tabla 6. Frecuencias naturales. 65

Tabla 7. Primer Modo. 65

Tabla 8. Segundo Modo. 65

Tabla 9. Normalizando los Modos. 66

Tabla 10. Distribución de fuerzas. 67

Tabla 11. Hallando y2 67

Tabla 12. Primer vector de Ritz normalizado. 68

Tabla 13. Hallando y2. 68

Tabla 14. Obteniendo a12. 68

Tabla 15. Ortogonalizando y2 con respecto a

Tabla 21. Frecuencias naturales. 69
Tabla 22. Primer Modo. 69
Tabla 23. Segundo Modo. 69
Tabla 24. Normalizando los Modos. 70
Tabla 25. Altura de la estructura. 72
Tabla 26. Matriz de Rigidez. (Maco de 5 niveles) 72
Tabla 27. Matriz de masa. (Marco de 5 niveles) 72
Tabla 28. Determinante. 73
Tabla 29. Frecuencias. 73
Tabla 30.Primer Modo. 73
Tabla 31. Segundo Modo. 73
Tabla 32. Tercer Modo. 74
Tabla 33. Cuarto Modo. 74
Tabla 34. Quinto Modo. 74
Tabla 35. Normalizando los Modos. 75
Tabla 36. Distribución de fuerzas. 78
Tabla 37. Hallando y1 de “ky1=s”. 79
Tabla 38. Primer vector de Ritz normalizado. 79
Tabla 39. Hallando Y2. 79
Tabla 40. Hallando a12. 79
Tabla 41. Ortogonalizando y2 con respecto a 79
Tabla 42. Segundo vector de Ritz Normalizado. 80
Tabla 43. K´. 80

Tabla 44. M´ 80
Tabla 45. Determinante. 80
Tabla 46. Ecuación de la determinante. 80
Tabla 47. Frecuencias. 81
Tabla 48. Primer Modo. 81
Tabla 49. Segundo Modo. 81
Tabla 50. Normalizando los Modos. 81
Tabla 51. Distribución de fuerzas. 83
Tabla 52. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado. 84
Tabla 53. Obteniendo k´. 84
Tabla 54. Obteniendo m´. 84
Tabla 55. Determínate. 84
Tabla 56. Ecuación de la determinante. 84
Tabla 57. Frecuencias naturales. 84
Tabla 58. Primer Modo. 85
Tabla 59. Segundo Modo. 85
Tabla 60. Normalizando los Modos. 85
Tabla 61. Distribución de fuerzas. 87
Tabla 62. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado. 88
Tabla 63. Obteniendo k´. 88
Tabla 64. Obteniendo m´. 88
Tabla 65. Determínate. 88
Tabla 66. Ecuación de la determinante. 88

Tabla 67. Frecuencias naturales. 88
Tabla 68. Primer Modo. 89
Tabla 69. Segundo Modo. 89
Tabla 70. Normalizando los Modos. 89
Tabla 71. Distribución de fuerzas. 91
Tabla 72. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado. 91
Tabla 73. Obteniendo k´. 92
Tabla 74. Obteniendo m´. 92
Tabla 75. Determínate. 92
Tabla 76. Ecuación de la determinante. 92
Tabla 77. Frecuencias naturales. 92
Tabla 78. Primer Modo. 93
Tabla 79. Segundo Modo. 93
Tabla 80. Normalizando los Modos. 93
Tabla 81. Altura de la estructura. 96
Tabla 82. Matriz de Rigidez. (Marco de 6 niveles) 96
Tabla 83. Matriz de Masa. (Marco de 6 niveles) 97
Tabla 84. Determinante. 97
Tabla 85. Frecuencias. 97
Tabla 86. Primer Modo. 97
Tabla 87. Segundo Modo. 98
Tabla 88. Tercer Modo. 98
Tabla 89. Cuarto Modo. 99

Tabla 90. Quinto Modo. 99
Tabla 91. Sexto Modo. 99
Tabla 92. Normalizando los Modos. 100
Tabla 93. Distribución de fuerzas. 104
Tabla 94. Hallando y1 de “ky1=s”. 104
Tabla 95. Primer vector de Ritz normalizado. 104
Tabla 96. Hallando Y2. 105
Tabla 97. Hallando a12. 105
Tabla 98. Ortogonalizando y2 con respecto a 105
Tabla 99. Segundo vector de Ritz Normalizado. 106
Tabla 100. Hallando Y3. 106
Tabla 101. Hallando a23. 106
Tabla 102. Ortogonalizando y3 con respecto a 106
Tabla 103. Tercer vector de Ritz Normalizado. 107
Tabla 104. Hallando Y4. 107
Tabla 105. Hallando a34. 107
Tabla 106. Ortogonalizando y4 con respecto a 107
Tabla 107.Cuarto vector de Ritz Normalizado. 108
Tabla 108. Hallando Y5. 108
Tabla 109. Hallando a45. 108
Tabla 110. Ortogonalizando y5 con respecto a 108
Tabla 111.Quinto vector de Ritz Normalizado. 109
Tabla 112. Hallando Y6. 109

Tabla 113. Hallando a56. 109
Tabla 114. Ortogonalizando y6 con respecto a 109
Tabla 115. Sexto vector de Ritz Normalizado. 110
Tabla 116. K´. 110
Tabla 117. M´ 110
Tabla 118. Determinante. 110
Tabla 119. Ecuación de la determinante. 110
Tabla 120. Frecuencias. 110
Tabla 121. Primer Modo. 111
Tabla 122. Segundo Modo. 111
Tabla 123. Normalizando los Modos. 111
Tabla 124. Distribución de fuerzas. 113
Tabla 125. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado. 114
Tabla 126. Obteniendo k´. 114
Tabla 127. Obteniendo m´. 114
Tabla 128. Determínate. 114
Tabla 129. Ecuación de la determinante. 114
Tabla 130. Frecuencias naturales. 114
Tabla 131. Primer Modo. 115
Tabla 132. Segundo Modo. 115
Tabla 133. Normalizando los Modos. 115
Tabla 134. Distribución de fuerzas. 117
Tabla 135. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado. 118

Tabla 136. Obteniendo k´. 118
Tabla 137. Obteniendo m´. 118
Tabla 138. Determínate. 118
Tabla 139. Ecuación de la determinante. 118
Tabla 140. Frecuencias naturales. 118
Tabla 141. Primer Modo. 119
Tabla 142. Segundo Modo. 119
Tabla 143. Normalizando los Modos. 119
Tabla 144. Distribución de fuerzas. 121
Tabla 145. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado. 122
Tabla 146. Obteniendo k´. 122
Tabla 147. Obteniendo m´. 122
Tabla 148. Determínate. 122
Tabla 149. Ecuación de la determinante. 122
Tabla 150. Frecuencias naturales. 122
Tabla 151. Primer Modo. 123
Tabla 152. Segundo Modo. 123
Tabla 153. Normalizando los Modos. 123
Tabla 154. Distribución de fuerzas. 125
Tabla 155. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado. 126
Tabla 156. Obteniendo k´. 126
Tabla 157. Obteniendo m´. 126
Tabla 158. Determínate. 126

Tabla 159. Ecuación de la determinante. 126
Tabla 160. Frecuencias naturales. 126
Tabla 161. Primer Modo. 127
Tabla 162. Segundo Modo. 127
Tabla 163. Normalizando los Modos. 127
Tabla 164. Cuadro Comparativo. (Marco de 2 niveles) 129
Tabla 165. Porcentaje de error de las frecuencias. (Marco de 2 niveles) 130
Tabla 166. Cuadro Comparativo. (Marco de 5 niveles) 132
Tabla 167. Porcentaje de error de las frecuencias. (Marco de 5 niveles) 133
Tabla 168. Cuadro Comparativo de patrones de cargas. (Marco de 5 niveles) 134
Tabla 169. Cuadro Comparativo. (Marco de 6 niveles) 138
Tabla 170. Porcentaje de error de las frecuencias. (Marco de 6 niveles) 139
Tabla 171. Cuadro Comparativo de patrones de cargas. (Marco de 6 niveles) 141

ÏNDICE DE FIGURA

CONTENIDO

TABLA **Pp**

Figura 1. Sistema de un grado de libertad 10

Figura 2. Dinámica de Estructuras. 16

Figura 3. (a) Sistema de dos grados de libertad..... 20

Figura 4. Coeficiente de correlación para el método CQC..... 43

Figura 5. Marco idealizado de dos niveles. 64

Figura 6. Primera Forma Modal. (Marco de dos niveles) 66

Figura 7. Segunda Forma Modal. (Marco de dos niveles) 67

Figura 8. Primera Forma Modal. (Marco de dos niveles) 70

Figura 9. Segunda Forma Modal. (Marco de dos niveles) 71

Figura 10. Marco idealizado de 5 niveles..... 71

Figura 11. Primera Forma Modal. (Marco de cinco niveles) 76

Figura 12. Segunda Forma Modal. (Marco de cinco niveles) 76

Figura 13. Tercera Forma Modal. (Marco de cinco niveles)..... 77

Figura 14. Cuarta Forma Modal. (Marco de cinco niveles) 77

Figura 15. Quinta Forma Modal. (Marco de cinco niveles) 78

Figura 16. Primera Forma Modal. (Marco de cinco niveles) 82

Figura 17. Segunda Forma Modal. (Marco de cinco niveles) 82

Figura 18. Patrón de carga triangular. (Marco de cinco niveles)..... 83

Figura 19. Primera Forma Modal. (Carga Triangular) 86

Figura 20. Segunda Forma Modal. (Carga Triangular) 86

Figura 21. Patrón de carga trapezoidal. (Marco de cinco niveles) 87

Figura 22. Primera Forma Modal. (Carga Trapezoidal) 90
Figura 23. Segunda Forma modal. (Carga Trapezoidal) 90
Figura 24. Patrón de carga de techo. (Marco de cinco niveles)..... 91
Figura 25. Primera Forma Modal. (Carga de techo)..... 94
Figura 26. Segunda Forma Modal. (Carga de Techo) 95
Figura 27. Marco idealizado de 6 niveles. 95
Figura 28. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles) 101
Figura 29. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles) 101
Figura 30. Tercera Forma Modal. (Marco de seis niveles)..... 102
Figura 31. Cuarta Forma Modal. (Marco de seis niveles) 102
Figura 32. Quinta Forma Modal. (Marco de seis niveles)..... 103
Figura 33. Sexta Forma Modal. (Marco de seis niveles)..... 103
Figura 34. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles) 112
Figura 35. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles) 113
Figura 36. Patrón de carga rectangular. (Marco de seis niveles)..... 113
Figura 37. Primera Forma Modal. (Cargar Rectangular) 116
Figura 38. Segunda Forma Modal. (Carga Rectangular)..... 116
Figura 39. Patrón de carga triangular. (Marco de seis niveles) 117
Figura 40. Primera Forma Modal. (Carga Triangular) 120
Figura 41. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles carga triangular).. 120
Figura 42. Patrón de carga trapezoidal. (Marco de seis niveles)..... 121
Figura 43. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles carga trapezoidal). 124
Figura 44. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles carga trapezoidal) 124

Figura 45. Patrón de carga de techo. (Marco de seis niveles) 125
Figura 46. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles - Carga de Techo) 128
Figura 47. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles - Carga de Techo) 128
Figura 48. Gráfica Primera Forma Modal. (Marco de 2 niveles) 130
Figura 49. Gráfica Segunda Forma Modal. (Marco de 2 niveles) 130
Figura 50. Gráfica del % de error. (Marco de 2 niveles) 131
Figura 51. Gráfica Primera Forma Modal. (Marco de 5 niveles) 132
Figura 52. Gráfica Segunda Forma Modal. (Marco de 5 niveles) 133
Figura 53. Gráfica del % de error. (Marco de 5 niveles) 134
Figura 54. Frecuencias con patrones de cargas. (Marco de 5 niveles) 135
Figura 55. Primera Forma con patrones de cargas. (Marco de 5 niveles) 135
Figura 56. Segunda Forma con patrones de cargas. (Marco de 5 niveles) 136
Figura 57. Gráfica Primera Forma Modal. (Marco de 6 niveles) 138
Figura 58. Gráfica Segunda Forma Modal. (Marco de 6 niveles) 139
Figura 59. Gráfica del % de error. (Marco de 6 niveles) 140
Figura 60. Frecuencias con patrones de cargas. (Marco de 6 niveles) 141
Figura 61. Primera Forma Modal. (Marco de 6 niveles) 142
Figura 62. Segunda Forma Modal. (Marco de 6 niveles) 142

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ
FALCULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

ANÁLISIS COMPARATIVO DEL MÉTODO DE AUTO VALORES Y VECTORES DE RITZ, EN ESTRUCTURAS REGULARES DE MARCOS IDEALIZADOS

Autor: Rodríguez Andrés
Díaz Susan
Tutor: Ing. Mata Ramón
Fecha: Septiembre, 2016

RESUMEN

El propósito de la presente investigación será recopilar información sustanciosa y convertirla en un material que sirva de apoyo tanto para estudiantes como para profesionales en el área del cálculo estructural específicamente para el diseño sismo resistente. Se busca la reducción de estos procedimientos así como eliminar la incertidumbre entre ambos métodos aplicando las diferentes metodologías de cálculos y llegar acabo unos resultados satisfactorios el método de auto valores y vectores de Ritz. La importancia de esta investigación radica en mostrar una mejor visión y crear más conciencia sismo resistente tanto a nivel de cálculo como a nivel constructivo, con el fin de poder asegurar estructuras capaces de soportar un evento sísmico.

Descriptores: Calculo, métodos estructurales, Vectores de Ritz. .

INTRODUCCIÓN

Es indudable el gran avance de la investigación en los métodos de cálculo y diseño sismo resistente en los últimos años, pero quizá no es tan evidente el avance de la práctica, con particular referencia a las normativas de diseño. Desde un punto de vista del cálculo de estructuras, el ingeniero calculista espera que la sismología le proporcione los datos necesarios para la definición de la acción sísmica. La totalidad de los procedimientos analíticos, experimentales y numéricos que pueden conducir dicha definición de la acción para su utilización en el cálculo de las estructuras son objeto de una materia relativamente nueva, denominada Ingeniería Sismológica. Dentro de los problemas tratados el más significativo es el de la resonancia. Todo sistema, apartado de su posición de equilibrio realiza oscilaciones alrededor de esta con una serie de modos y periodos de vibración (modos y periodos propios).

En la presente investigación se reflejará el comportamiento de la estructura analizada por diferentes métodos sismo resistente, tomando en cuenta los requerimientos de diseño presentados en la norma COVENIN 1756-2001 para Edificaciones Sismo resistentes. Todo esto es tomado para llegar a una mejor visión en cálculos ante un sismo. Todo ello se verá reflejado a través de diferentes métodos de cálculos así considerar el método más óptimo para el tipo de estructura deseada.

La presente investigación está estructurada en 4 (cuatro) capítulos. Capítulo I el problema se presenta la justificación de la investigación, así como también los objetivos y alcances al cual estará proyectado.

El capítulo II expone todas las bases teóricas, formulas e hipótesis el cual se sustenta esta investigación para el “análisis comparativo del método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados”.

El Capítulo III hace referencia al tipo de investigación, recursos utilizados para realizar la misma y describe las fases necesarias para el análisis comparativo del

método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados.

En el Capítulo IV se muestra el desarrollo de las fases como a su vez toda la base de cálculos empleados y la comparación final de estos métodos.

CAPÍTULO I
EL PROBLEMA

1.1. Planteamiento del problema

Los sismos, terremotos o temblores de tierra, son vibraciones de la corteza terrestre, generadas por distintos fenómenos. Sin embargo, los sismos más severos y los más importantes desde el punto de vista de la ingeniería, son los de origen tectónico. Las presiones que se generan en la corteza llegan a vencer la fricción que mantiene en contacto los bordes de las placas y producen caídas de esfuerzos y liberación de enormes cantidades de energía almacenada en la roca. La energía se libera principalmente en forma de ondas vibratorias que se propagan a grandes distancias a través de la roca de la corteza. Esta vibración de la corteza terrestre es la que pone en peligro las edificaciones que sobre ella se desplantan. Por los movimientos vibratorios de las masas de los edificios, se generan fuerzas de inercia que inducen esfuerzos importantes en los elementos de la estructura y que pueden conducirla a la falla.

Las pérdidas económicas y de vidas humanas que se producen como consecuencia de los terremotos están relacionadas, en la mayoría de los casos, con un comportamiento deficiente de las estructuras. Numerosas estructuras realizadas de acuerdo con normativas de diseño y construcción actualmente en vigor sufrieron daños importantes durante terremotos ocurridos en los últimos 20 años. Así es el caso de los terremotos de Chile y México (1985), de Armenia (1988), de California (1989 y 1994), de Japón (1995), de Turquía e India (1999), de Irán (2003), Japón (2004), etc. Es indudable el gran avance de la investigación en los métodos de cálculo y diseño sismo resistente en los últimos años, pero quizá no es tan evidente el avance de la práctica, con particular referencia a las normativas de diseño. Desde un punto de vista del cálculo de estructuras, el ingeniero calculista espera que la sismología le

Proporcione los datos necesarios para la definición de la acción sísmica. La totalidad de los procedimientos analíticos, experimentales y numéricos que pueden conducir dicha definición de la acción para su utilización en el cálculo de las estructuras son objeto de una materia relativamente nueva, denominada Ingeniería Sismológica. Dentro de los problemas tratados el más significativo es el de la resonancia. Todo sistema, apartado de su posición de equilibrio realiza oscilaciones alrededor de esta con una serie de modos y periodos de vibración (modos y periodos propios). Si introducimos una perturbación o fuerza que actúe con una de esos periodos se producirá la suma de las amplitudes de las diferentes vibraciones, lo que aumentará progresivamente la amplitud del movimiento y producirá finalmente la quiebra del elemento. En condiciones de resonancia y si los ciclos de carga se mantiene. Se han propuesto muchos métodos para evaluar las acciones durante futuros terremotos. Aunque no es posible predecir con precisión cuándo y dónde va a ocurrir un sismo, sí es posible realizar estimaciones de cuántas víctimas y qué daños causará. Este tipo de evaluaciones permite dimensionar la magnitud del problema que tendrá que afrontar una ciudad o una región, razón por la cual este tipo de estudios se han convertido en ineludibles para la prevención de desastres. Se han propuesto diferentes metodologías para la evaluación del riesgo sísmico, tales como:

El Análisis modal en la mecánica estructural determina las frecuencias naturales y modos de vibrar de un objeto o estructura durante vibración libre. Es común utilizar el Método de los Elementos Finitos (MEF, o FEM por sus siglas en inglés) para desarrollar el análisis porque, como en otros cálculos usando el MEF, el objeto que se analiza puede tener formas arbitrarias y los resultados de los cálculos son aceptables. Los tipos de ecuaciones que surgen del análisis modal son vistas en sistemas propios

Método de superposición permite desacoplar el sistema en estudio considerando que la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de las matrices de rigidez y de masas. Es importante conocer que con el método se puede encontrar la respuesta máxima trabajando con espectros. En forma general, se puede indicar que el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan los problemas dinámicos está

definido por la ecuación: Q= Mq + Cq + Kq. En la cual, M, C, K son las matrices de masas, amortiguamiento, rigidez; Q el vector de coordenadas generalizadas; los q son vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

La determinación de auto valores y auto vectores de una matriz cuadrada A de orden n es un problema que se presenta en numerosas ramas de la Matemática: teoría de E.D.P. (Ecuaciones diferenciales parciales), determinación de ejes de cónicas y cuádricas, diseño de sistemas de información, estudio de las oscilaciones de ciertas estructuras, optimización lineal. Dado que los auto valores son las raíces del polinomio caracterí det (
claro que los métodos de cálculo de auto valores no pueden ser más que iterativos.

Los vectores de Ritz son un conjunto de vectores ortogonales como base del espacio de las soluciones. Una forma de obtener un conjunto de vectores con las características mencionadas es a través del uso de vectores de Ritz. La idea es utilizar un espacio con una base de menor dimensión, es decir, se aproxima la solución en un sub espacio de dimensión m < n, teniéndose una buena aproximación con menos coordenadas. En este caso se busca representar la respuesta estructural a través de la combinación lineal de un número r < n de vectores linealmente independientes entre sí. Al tener en cuentas todos estos métodos se considera las características relevantes en el cálculo de cada uno de ellos con la finalidad de obtener resultados satisfactorios que permitan un diseño óptimo en la estructura. Se busca la reducción de estos procedimientos así como eliminar la incertidumbre entre ambos métodos aplicando las diferentes metodologías de cálculos y llegar acabo unos resultados satisfactorios comparando el método de auto valores y vectores de Ritz.

1.2 Formulación del problema

¿Cómo eliminar la incertidumbre entre el método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo General

"Comparar el método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados"

1.3.2 Objetivos específicos

Describir el procedimiento a realizar en el proyecto.

Establecer la metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz.

Realizar los cálculos matemáticos para obtener la frecuencia y modos usando ambos métodos.

Comparar el método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados.

1.4 Justificación

La presente investigación expresa información relevante entre método de auto valores y vectores de Ritz, este enfoque investigativo busca ampliar los conocimientos de dichos métodos, destacando sus características y como asimila su comportamiento bajo acción sísmica. El análisis dinámico es importante porque ese movimiento oscilatorio produce una modificación de las tensiones y deformaciones existentes, que deben tenerse en cuenta para realizar un diseño sísmico adecuado. Un aspecto importante de diseño sísmico establecen como objetivos, por una parte, evitar el colapso, pero aceptar daño, ante un sismo excepcionalmente severo que se pueda presentar en la vida de la estructura; y por otra, evitar daños de cualquier tipo ante sismos moderados que tengan una probabilidad significativa de presentarse en ese lapso. Un punto relevante es la determinación del modelo analítico más representativo de la estructura real, conviene tener presente que la precisión de un análisis más refinado depende también de la certidumbre con que se conozcan los datos adicionales requeridos. El factor que más ha influido en el establecimiento de la práctica actual del diseño sismo resistente de edificios, ha sido la experiencia que se

ha derivado del comportamiento observado de los diferentes tipos de estructuras que han sufrido sismos severos.

Por consiguiente, se ha dedicado el estudio de la investigación de la análisis comparativo del método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados a ampliar en el área de investigación de diseño sismo resistente, y ofrecer información sobre esta, ya que es considerada como una de las ramas más importantes y protagónicas en la ingeniería civil, ya que con ella se evitan posibles pérdidas humanas como materiales.

1.5 Alcances

Este estudio viene dado a toda la comunidad de ingeniería especialmente a la de ingeniería civil y para ser más específico en el ámbito de cálculos de sismos resistencia.

1.6 Limites

Estos cálculos tendrán ciertas limitaciones que se deben considerar en el proyecto tales como estructuras regulares con marcos idealizados, obtención de dos formas modales por el método de vectores de Ritz y sistemas no lineales.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 **Antecedentes**

Rojas, Arnulfo Luévanos (2011), en su trabajo titulado **"Análisis de dos modelos por el método dinámico para el diseño sísmico de edificios"** El objetivo de este estudio es presentar un modelo que tome en cuenta las deformaciones por cortante. Haciendo una comparación con el modelo tradicional que no considera las deformaciones por cortante. Ambos modelos considera una masa concentrada por cada nivel y un grado de libertad por piso (desplazamiento horizontal por piso). Se concluye que las diferencias de ambos modelos son mayores en fuerza axial y fuerza cortante en los pisos inferiores tanto en columnas como en las vigas, además podemos ver que tienen un incremento gradualmente conforme vamos bajando de nivel.

Así como Crisafulli, Francisco (2014), en su trabajo titulado **"Diseño sismo resistente de construcciones de acero"** El objetivo fundamental de esta publicación es presentar una guía de utilidad práctica para los ingenieros estructurales vinculados al diseño sismo resistente de construcciones de acero y de construcciones con secciones compuestas de acero y hormigón (es importante indicar que en algunos países estas construcciones se denominan como mixtas).

También Jiménez, Celio José (2014), en su trabajo titulado **"Calibración de umbrales de daño sísmico para el análisis de fragilidad sísmica de estructuras de hormigón armado mediante análisis estático no lineal"** Se busca observar cómo se desarrolla el daño de los elementos estructurales a medida que se aumenta el desplazamiento lateral de la estructura. En este apartado se persigue además, interrelacionar el daño de los elementos estructurales con los umbrales de estado de daño propuestos por (Moreno, 2006) y se plantea un procedimiento de verificación de

La precisión de estas formulaciones y así, determinar si es necesario hacer alguna calibración.

Por ultimo Duani (2012), en su trabajo titulado "**Análisis dinámico de estructuras usando vectores de Ritz"** Se revisa los aspectos básicos del método de Rayleigh Ritz y los algoritmos para determinar los vectores de Ritz en forma eficiente, verificando los resultados con ejemplos sencillos, Explorar el uso de vectores de Ritz para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

2.2 Bases teóricas

2.2.1 Estructuras Simples

El estudio de la dinámica estructural se inicia con estructuras simples, se tiene interés en comprender la vibración de estas estructuras cuando se les aplica una fuerza lateral (u horizontal) en la parte superior o un movimiento horizontal del terreno debido a un sismo. Estas estructuras se llaman simples porque pueden idealizarse como una masa m concentrada o agrupada soportada por una estructura sin masa con rigidez k en la dirección lateral. El proceso mediante el cual la amplitud de la vibración disminuye de manera constante se denomina amortiguamiento. La energía cinética y la energía de deformación del sistema vibratorio se disipan mediante diversos mecanismos de amortiguamiento que se mencionarán más adelante. Por el momento, simplemente se reconoce que es necesario incluir un mecanismo de disipación de energía en la idealización estructural con el fi n de caracterizar el decaimiento del movimiento observado durante los ensayos de vibración libre de una estructura. El elemento de amortiguamiento que se utiliza comúnmente es el amortiguador viscoso, en parte porque su manejo matemático es más sencillo.

2.2.2 Sistemas de un grado de libertad

El sistema considerado se muestra esquemáticamente en la figura. Se compone de una masa m concentrada en el nivel del techo, un marco sin masa que proporciona rigidez al sistema, y un amortiguador viscoso que disipa la energía de vibración del sistema. Se supone que la viga y las columnas son axialmente indeformables. Este

sistema puede considerarse como una idealización de una estructura de un nivel. Cada elemento estructural (viga, columna, muro, etcétera) de la estructura real contribuye a las propiedades inerciales (masa), elásticas (rigidez o flexibilidad) y de disipación de la energía (amortiguamiento) de la estructura. Sin embargo, en el sistema idealizado, cada una de estas propiedades se concentra en tres componentes puros distintos: el componente de masa, el componente de rigidez y el componente de amortiguamiento. El número de desplazamientos independientes requerido para definir las posiciones desplazadas de todas las masas en relación con su posición original se denomina el número de grados de libertad (GDL) para el análisis dinámico. De manera típica, se requieren más GDL para definir las propiedades de rigidez de una estructura que los GDL necesarios para representar las propiedades inerciales. Considere el marco de un nivel de la figura, restringido a moverse sólo en la dirección de la excitación. El problema de análisis estático debe formularse con tres GDL (el desplazamiento lateral y la rotación de los dos nudos) para determinar la rigidez lateral del marco. En contraste, la estructura tiene un solo GDL (el desplazamiento lateral) para el análisis dinámico si se idealiza con la masa concentrada en una ubicación, por lo regular al nivel del techo. Por lo tanto, se le llama sistema de un grado de libertad (1GDL). Se considerarán dos tipos de excitación dinámica: La fuerza externa p (t) en la dirección lateral, y el movimiento del terreno ug (t) inducido por un sismo. En ambos casos u indica el desplazamiento relativo entre la masa y la base de la estructura. (Ver figura 1)

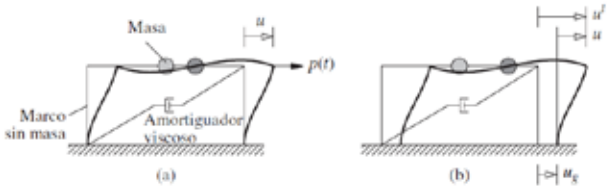

Figura 1. Sistema de un grado de libertad: (a) fuerza aplicada p (t); (b) movimiento del terreno inducido por un sismo.

Dinámica de Estructuras, 4ta Edición - Anil Chopra (Pag 7)

2.2.3 Vibración libre

Se dice que una estructura experimenta vibración libre cuando es perturbada de su posición de equilibrio estático y después se deja vibrar sin ninguna excitación dinámica externa. La razón de decaimiento del movimiento en vibración libre está controlada por la fracción de amortiguamiento. Así, los resultados analíticos que describen la vibración libre proporcionan una base para determinar la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento de una estructura a partir de datos experimentales. Aunque el amortiguamiento en las estructuras reales se debe a varios mecanismos de disipación de la energía que actúan de manera simultánea, un enfoque matemáticamente práctico consiste en idealizarlos mediante el amortiguamiento viscoso equivalente.

2.2.4 Fuerza de amortiguamiento

El proceso mediante el cual la amplitud de la vibración libre disminuye de manera constante se denomina amortiguamiento. En el amortiguamiento, la energía del sistema en vibración se disipa por diversos mecanismos y, con frecuencia, más de un mecanismo puede estar presente al mismo tiempo. En los sistemas “limpios” sencillos como los modelos del laboratorio, la mayor parte de la disipación de energía puede ser asociada al efecto térmico del esfuerzo elástico repetido del material y de la fricción interna que se produce en un sólido cuando se deforma. Sin embargo, en las estructuras reales existen muchos otros mecanismos que también contribuyen a la disipación de la energía. En un edificio en vibración éstos incluyen la fricción en las conexiones de acero, la apertura y cierre de micro fisuras en el concreto y la fricción entre la propia estructura y los elementos no estructurales, tales como muros divisorios. Parece imposible identificar o describir matemáticamente cada uno de estos mecanismos de disipación de energía en un edificio real. Como resultado, el amortiguamiento de las estructuras reales se representa por lo general en una forma muy idealizada. Para muchos fines, el amortiguamiento real en una estructura de 1GDL puede idealizarse de manera satisfactoria por medio de un amortiguador

viscoso lineal. El coeficiente de amortiguamiento se selecciona de modo que la energía disipada sea equivalente a la energía disipada en todos los mecanismos de amortiguamiento, combinados, presentes en la estructura real. Por lo anterior, esta idealización se denomina amortiguamiento viscoso equivalente. Dirección del GDL u. La fuerza interna en el amortiguador es igual y opuesta a la fuerza externa fD, la fuerza de amortiguamiento de fD se relaciona con la velocidad ua través del amortiguador viscoso lineal por:

Donde la constante c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso; tiene unidades de fuerza × tiempo/longitud.

2.2.5 Vibración libre no amortiguada

El movimiento de los sistemas lineales de 1GDL, visualizados como un marco idealizado de un nivel o un sistema masa-resorte-amortiguador, sometido a la fuerza externa p (t) se rige por la siguiente ecuación. Si se establece p (t) = 0, se obtiene la ecuación diferencial que rige la vibración libre del sistema, que para los sistemas sin amortiguamiento (c = 0) se especifica como

La vibración libre se inicia al sacar al sistema de su posición de equilibrio estático, impartiendo a la masa cierto desplazamiento u (0) y velocidad u (0) en el tiempo cero, definido como el instante en que se inicia el movimiento:

;

La solución de la ecuación diferencial homogénea sujeta a estas condiciones iniciales se obtiene por métodos comunes:

—

Dónde:

—

—

El tiempo requerido para que el sistema no amortiguado complete un ciclo de vibración libre es el periodo natural de vibración del sistema, que se denomina como Tn y cuyas unidades son segundos. Se relaciona con la frecuencia circular natural de en unidades de radianes por segundo es:

—

Un sistema ejecuta 1/Tn ciclos en 1 segundo. Esta frecuencia cíclica natural de vibración se define mediante:

—

Las unidades de fn son hertz (Hz) (ciclos por segundo (cps)); fn está obviamente relacionada :

—

Las

enden sólo de la masa y rigidez de la estructura. Si dos sistemas de 1GDL tienen la misma masa, el que sea más rígido de los dos tendrá la frecuencia natural más alta y el periodo natural más pequeño. De manera similar, si dos estructuras tienen la misma rigidez, aquella que sea la más pesada (con mayor masa) tendrá la menor frecuencia natural y el periodo natural más largo. El calificativo natural se utiliz fn para destacar el hecho de que éstas son propiedades naturales del sistema cuando se le permite vibrar con libertad sin ningún tipo de excitación externa. Debido a que el sistema es lineal, estas propiedades de vibración son independientes del desplazamiento y la velocidad

iniciales. La frecuencia natural y el periodo de los distintos tipos de estructuras que interesan a este texto variarán en gran medida.

frecuencia natural cíclica fn y el periodo natural Tn pueden expresarse en la forma alternativa:

st es la deflexión estática de la masa m suspendida de un resorte con rigidez k.

El sistema no amortiguado oscila hacia adelante y hacia atrás entre el desplazamiento máximo uo, y el desplazamiento mínimo –uo. La magnitud uo de estos dos valores de desplazamiento es igual y se denomina la amplitud de movimiento, dada por:

La amplitud uo depende del desplazamiento y la velocidad iniciales. Ciclo tras ciclo permanece igual; es decir, el movimiento no decae. Este comportamiento no realista de un sistema si no se incluye un mecanismo de amortiguamiento para representar la disipación de la energía.

2.2.6 Vibración libre viscosamente amortiguada

Si se establece p (t) = 0 se obtiene la ecuación diferencial que rige la vibración libre de los sistemas de 1GDL con amortiguamiento:

Al dividir entre m resulta:

m como se ha definido anteriormente y

Se hará referencia a

Como el amortiguamiento crítico, por razones que se descri
es la razón o fracción del amortiguamiento crítico. La constante de amortiguamiento c es una medida de la energía disipada en un ciclo de vibración libre o en un ciclo de vibración forzada armónica. Sin embargo, la fracción de amortiguamiento (una medida adimensional de amortiguamiento) es una propiedad del sistema que depende también de su masa y rigidez. La ecuación diferencial puede resolverse mediante los métodos comunes para un desplazamiento inicial u (0) y velocidad u (0) dados. Sin embargo, antes de escribir cualquier solución formal, se examina la solución cualitativamente.

2.2.7 Vibración libre con amortiguamiento de coulomb

El amortiguamiento en las estructuras reales se debe a varios mecanismos de disipación de energía que actúan al mismo tiempo y que un enfoque matemáticamente conveniente consiste en idealizarlos mediante el amortiguamiento viscoso equivalente. Aunque este enfoque es lo suficientemente exacto para el análisis práctico de la mayoría de las estructuras, puede no ser apropiado cuando se han introducido dispositivos especiales de fricción en un edificio, a fin de reducir las vibraciones durante los sismos. En la actualidad, existe mucho interés en tal aplicación. En esta sección se analiza la vibración libre de los sistemas en presencia de fuerzas de fricción de Coulomb.

El amortiguamiento de Coulomb resulta de la fricción por deslizamiento de dos superfi a los coeficientes de fricción estática y cinética, tomados como iguales, y N es la fuerza normal entre las superficies deslizantes. Se supone que la fuerza de fricción es independiente de la

velocidad una vez que inicia el movimiento. La dirección de la fuerza de fricción se opone al movimiento, y el signo de la fuerza de fricción cambiará cuando se modifique la dirección del movimiento. Esto requiere la formulación y la solución de dos ecuaciones diferenciales, una válida para el movimiento en una dirección y la otra válida cuando el movimiento se invierte. En la figura 2, se muestra un sistema masa-resorte, con la masa que se desliza sobre una superficie seca, y los diagramas de cuerpo libre de la masa, incluyendo la fuerza de inercia, para las dos direcciones de movimiento. La ecuación que rige el movimiento de la masa de derecha a izquierda es:

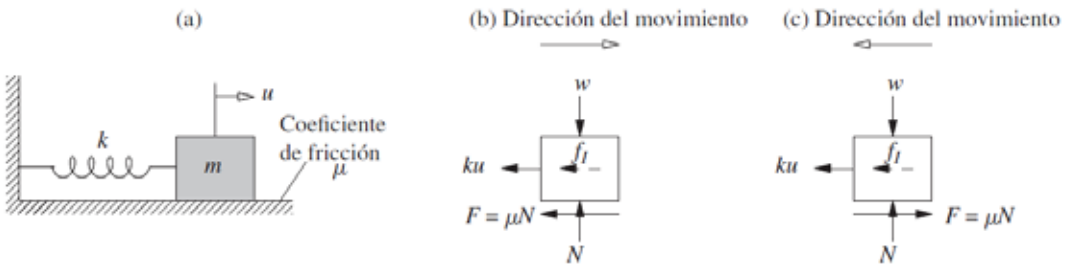

Figura 2. Dinámica de Estructuras.
4ta Edición - Anil Chopra (Pag 57)

Que tiene como solución:

Donde uF = F/k. La ecuación que rige el movimiento de la masa de izquierda a derecha es:

Que tiene como solución:

Las constantes A1, B1, A2 y B2 dependen de las condiciones iniciales de cada medio ciclo de

interpretarse como la deformación estática del resorte debido a la fuerza de fricción F. Cada una de las dos ecuaciones diferenciales es lineal, pero el problema general es no lineal debido a que la ecuación que gobierna el movimiento cambia cada medio ciclo. Estudiemos el movimiento del sistema de la figura 2.4.1 iniciando con algunas condiciones iniciales dadas y continuando hasta que el movimiento cesa. En el tiempo t = 0, la masa se desplaza una distancia u (0) a la derecha y se libera desde el reposo, de modo que u (0) = 0. Para el primer medio ciclo de movimiento, se aplica con las constantes A1 y B1 determinadas a partir de las condiciones iniciales en t = 0:

;

Al sustituir se obtiene:

; —

Lo anterior se trata de una función coseno con amplitud igual a u (0) – uF, la cual está desplazada en la dirección u positiva en uF. La ecuación es válida hasta que la velocidad se hace cero de nuevo en t = –u (0) + 2uF. Iniciando desde esta posición extrema izquierda, la masa se mueve hacia la derecha con su movimiento. Las constantes A2 y B2 se determinan a partir de las condiciones iniciales de este medio ciclo:

;

Si se sustituye resulta:

; — —

Lo anterior es una función coseno con amplitud reducida igual a u (0) – 3uF y desplazada en la dirección negativa de u en uF. La ecuación es válida hasta que la ; en este instante de tiempo u = u (0) – 4uF. En t = to por la ecuación que después de evaluar las constantes A1 y B1 se convierte en:

; — —

Ésta es una función coseno con su amplitud aún más reducida hasta u (0) – 5uF y desplazada, como antes, en la dirección u positiva en uF. El tiempo requerido para duración de un ciclo completo, el periodo natural de vibración, es:

—

Observe que el periodo natural de un sistema con amortiguamiento de Coulomb es el mismo que para un sistema sin amortiguamiento. En contraste, el amortiguamiento viscoso tenía el efecto de alargar el periodo natural. En cada ciclo de movimiento, la amplitud se reduce en 4uF; es decir, los desplazamientos ui y ui+1 en máximos sucesivos se relacionan mediante:

Por lo tanto, las envolventes de las curvas de tiempo-desplazamiento son líneas rectas, en vez de las funciones exponenciales para los sistemas con amortiguamiento viscoso. El amortiguamiento en las estructuras reales debe estar relacionado en parte con la fricción de Coulomb, ya que sólo este mecanismo puede detener el movimiento en vibración libre. Si el amortiguamiento fuera sólo viscoso, en teoría el movimiento continuaría por siempre, aunque con amplitudes infinitesimalmente pequeñas. Éste es un punto académico, pero es básico para la comprensión de los mecanismos de amortiguamiento. Los diversos mecanismos de amortiguamiento que

existen en las estructuras reales rara vez se modelan en forma individual. En particular, las fuerzas de fricción de Coulomb que deben existir no se consideran de manera explícita, a menos que se hayan incorporado dispositivos de fricción en la estructura. Incluso con tales dispositivos es posible utilizar amortiguamientos viscosos equivalentes para obtener resultados aproximados de la respuesta dinámica.

2.2.8 Respuesta Dinámica de una Estructura con Múltiples Grados de Libertad (MGL).

Una estructura real tiene un comportamiento dinámico cuando se le aplica cargas o desplazamientos en la base. Sin embargo si éstas se aplican lentamente, las fuerzas de inercia al ser muy pequeñas pueden despreciarse y se puede justificar un análisis estático, siendo el análisis dinámico una extensión del análisis estático. Una estructura tiene infinitos puntos y por tanto infinitos desplazamientos e infinitos grados de libertad, pero idealizada en un modelo para computadora, constituye una fase crítica asignar un número finito de elementos sin masa y un número finito de desplazamientos en los nodos (pisos) que pretendan simular el comportamiento de la estructura real y así calcular sus fuerzas internas. La masa en el sistema estructural se supone habitualmente concentrada en los nodos o incluso concentrada a nivel de los centros de masa de cada piso, según el modelo seleccionado. Además en el análisis típico de origen se considera que el material estructural tiene un comportamiento elástico lineal. Sin embargo la carga dinámica, disipaciones de energía y condiciones de borde pueden ser difíciles de estimar. Por ejemplo, la mayor parte de la disipación se origina por los ciclos de histéresis en las relaciones esfuerzo- deformación o fuerza- desplazamiento

2.2.9 Sistema de masa-resorte-amortiguador

Se ha presentado el sistema lineal de dos grados de libertad idealizando un marco de dos niveles (un enfoque que debería ser atractivo para los estudiantes de ingeniería estructural). Sin embargo, el sistema clásico de dos grados de libertad que se muestra en la figura consta de dos masas conectadas mediante resortes y amortiguadores viscosos lineales, sometidos a las fuerzas externas p1 (t) y p2 (t). En

cualquier instante de tiempo, las fuerzas que actúan sobre las dos masas son como se muestran en sus diagramas de cuerpo libre (figura). Las condiciones resultantes del equilibrio dinámico también conducen a la ecuación (), donde u, m, c, k y p (t) están definidas como se hizo anteriormente.

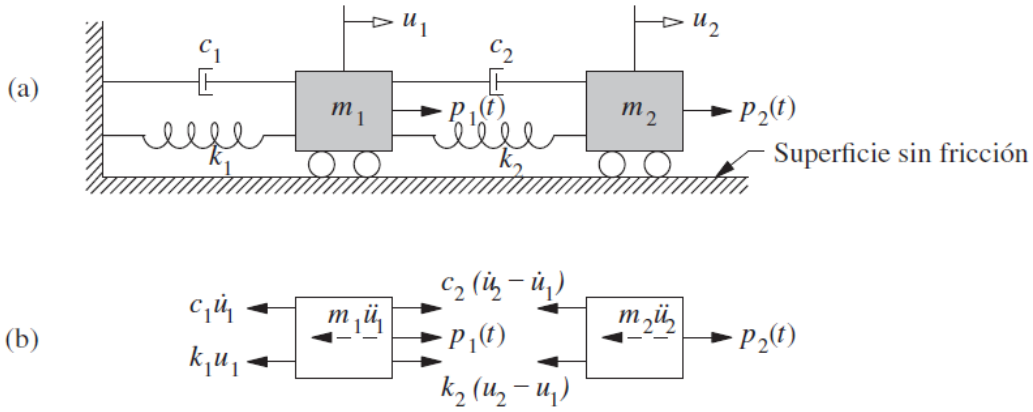

Figura 3. (a) Sistema de dos grados de libertad, (b) diagramas de cuerpo libre.

Dinámica de Estructuras, 4ta Edición - Anil Chopra (Pag 351)

2.2.10 Componentes de rigidez, amortiguamiento y masa

En esta sección se formulan las ecuaciones que controlan al marco de cortante de dos niveles con base en un punto de vista alternativo. Bajo la acción de las fuerzas externas p1 (t) y p2 (t) el estado del sistema en cualquier instante de tiempo está descrito por los desplazamientos uj (ciones üj (t. Ahora, visualice este sistema como la combinación de tres componentes puros: (1) componente de rigidez: el marco sin amortiguamiento o masa; (2) componente de amortiguamiento: el marco con su propiedad de amortiguamiento, pero sin rigidez o masa y (3) componente de masa: las masas de los niveles sin la rigidez o el amortiguamiento del marco. Las fuerzas externas fSj en el componente de rigidez se relacionan con los desplazamientos mediante la ecuación (9.1.7). De manera similar, las fuerzas externas fDj en el componente de amortiguamiento se relacionan con las velocidades. Por último, las fuerzas externas fIj en el componente de masa se relacionan con las aceleraciones por medio de fI = mü. Por lo tanto, las fuerzas externas p (t) sobre el sistema pueden visualizarse como distribuidas entre los tres

componentes de la estructura. Así, la suma fS + fD + fI debe ser igual a las fuerzas p (t) aplicadas. Este punto de vista alternativo puede parecer innecesario para el marco de cortante de dos niveles, pero puede ser útil al visualizar la formulación de las ecuaciones de movimiento para los sistemas complejos de VGDL.

2.2.11 Enfoque general para los sistemas lineales

Aunque la formulación de las ecuaciones de movimiento en las secciones anteriores es fácil de visualizar para un edificio de cortante y otros sistemas sencillos, no resulta adecuada para las estructuras complejas. Con este propósito, en esta sección se presenta un enfoque más general. Se definen tres tipos de fuerza (las fuerzas de inercia, elásticas y de amortiguamiento):

2.2.12 Fuerzas elásticas

Se relacionarán las fuerzas externas fSj sobre el componente de rigidez de la estructura con los desplazamientos resultantes uj. Para los sistemas lineales esta relación puede obtenerse mediante el método de superposición y el concepto de los coeficientes de influencia de rigidez. Se aplica un desplazamiento unitario a lo largo del grado de libertad j, manteniendo los otros desplazamientos en cero, de la manera mostrada; para mantener estos desplazamientos es necesario aplicar fuerzas a lo largo de todos los grados de libertad. El coeficiente de influencia de rigidez kij es la fuerza requerida a lo largo del grado de libertad i debido al desplazamiento unitario en el grado de libertad j. En particular, las fuerzas ki1 (i = 1, 2,…, 8) son necesarias para mantener la configuración deformada que se asocia con u1 = 1 y todos los demás uj = 0. De manera similar, las fuerzas ki4 (i = 1, 2,…, 8) son necesarias para mantener la configuración deformada que se asocia con u4 = 1 y todos los demás uj = 0. Todas las fuerzas aparecen con signo positivo, pero algunas pueden ser negativas para ser consistentes con las deformaciones impuestas. La fuerza fSi en el grado de libertad i, asociada con los desplazamientos uj, j = 1 a N, se obtiene por superposición:

Para cada i = 1 a N existe una ecuación de ese tipo. El conjunto de N ecuaciones puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix}$$

Donde k es la matriz de rigidez de la estructura; es una matriz simétrica (es decir, kij = kji). La matriz de rigidez k para un sistema discretizado puede determinarse mediante varios métodos. La j-ésima columna de k puede obtenerse al calcular las fuerzas kij (i = 1, 2,…, N) necesarias para producir uj = 1 (con todos los demás ui = 0). Para las estructuras sencillas con pocos grados de libertad se pueden implementar estos cálculos mediante el método del equilibrio directo; sin embargo, no es práctico para las estructuras complejas o para su aplicación en computadora. El método que se utiliza con más frecuencia es el método de la rigidez directa, en el que se ensamblan las matrices de rigidez de los elementos individuales para obtener la matriz de rigidez de toda la estructura.

2.2.13 Fuerzas de amortiguamiento

Por lo general, los mecanismos mediante los que se disipa la energía de una estructura en vibración pueden idealizarse mediante un amortiguamiento viscoso equivalente. Con este supuesto, se relacionan las fuerzas externas fDj que actúan sobre el componente de amortiguamiento de la estructura con las veloc

impone una velocidad unitaria en la dirección del grado de libertad j, mientras que las velocidades en todos los demás grados de libertad se mantienen en cero. Estas velocidades generarán fuerzas internas de amortiguamiento que se resisten a las

velocidades, y se requerirían fuerzas externas para equilibrar dichas fuerzas. El coeficiente de influencia de amortiguamiento cij es la fuerza externa en el grado de libertad i debida a la velocidad unitaria en el grado de libertad j. La fuerza fDi en el grado de l se obtiene por superposición:

Al compilar todas las ecuaciones para i = 1 a N y escribirlas en forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix}$$

Donde c es la matriz de amortiguamiento para la estructura. El cálculo de los coeficientes cij de la matriz de amortiguamiento directamente a partir de las dimensiones de la estructura y de los tamaños de los elementos estructurales no resulta práctico. Por lo tanto, los valores de amortiguamiento para sistemas de VGDL suelen especificarse mediante valores numéricos de los coeficientes de amortiguamiento, como se hace para los sistemas de 1GDL, con base en datos experimentales para estructuras similares. Existen métodos para construir la matriz de amortiguamiento a partir de los coeficientes de amortiguamiento conocidos.

2.2.14 Fuerzas de inercia

Se relacionarán las fuerzas externas fIj que actúan sobre el componente de masa de la estructura con las aceleraciones üj. Se aplica una aceleración unitaria a en la dirección del grado de libertad j, mientras que las aceleraciones en todos los demás grados de libertad se mantienen en cero. Según el principio de D’Alembert, las

fuerzas de inercia ficticias se oponen a estas aceleraciones; por lo tanto, se requerirán fuerzas externas para equilibrar estas fuerzas de inercia. El coeficiente de influencia de masa mij es la fuerza externa en el grado de libertad i debida a la aceleración unitaria a lo largo del grado de libertad j. En particular, las fuerzas mi1 (i = 1, 2,…, 8) son necesarias en los diversos grados de libertad para equilibrar las fuerzas de inercia asociadas con ü1 = 1 y todas las demás üj = 0. De manera similar, las fuerzas mi4 (i = 1, 2,…, 8) están asociadas con la aceleración ü4 = 1 y todas las demás üj = 0. La fuerza fIi en el grado de libertad i asociada con las aceleraciones üj, j = 1 a N, se obtiene por superposición:

Para cada i = 1 a N existe una ecuación de ese tipo. El conjunto de N ecuaciones puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Nj} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix}$$

Donde m es la matriz de masa. Al igual que la matriz de rigidez, la matriz de masa es simétrica (es decir, mij = mji). En una estructura real, la masa se distribuye en toda su longitud, pero puede idealizarse como concentrada en los nodos de la estructura discretizada; por lo general, una idealización de masa concentrada resulta satisfactoria. La masa concentrada en un nodo se determina a partir de la porción del peso que puede asignarse de manera razonable a tal nodo. Cada elemento estructural se sustituye por masas puntuales en sus dos nodos, donde la distribución de las dos masas se determina mediante el análisis estático del elemento bajo su propio peso. La masa concentrada en un nodo de la estructura es la suma de las contribuciones de las

masas de todos los elementos estructurales conectados a tal nodo. Este procedimiento se ilustra de manera esquemática para un marco de dos niveles y dos crujías, donde la masa de la viga incluye a la masa de la losa de piso que sostiene. Las masas concentradas en los diferentes nodos se identifican como ma, mb, etcétera.

2.2.15 Matriz de Rigidez

El método matricial de la rigidez es un método de cálculo aplicable a estructuras hiperestáticas de barras que se comportan de forma elástica y lineal. En inglés se le denomina direct stiffness method (DSM, método directo de la rigidez), aunque también se le denomina el método de los desplazamientos. Este método está diseñado para realizar análisis computarizado de cualquier estructura incluyendo a estructuras estáticamente indeterminadas. El método matricial se basa en estimar los componentes de las relaciones de rigidez para resolver las fuerzas o los desplazamientos mediante un ordenador. El método de rigidez directa es la implementación más común del método de los elementos finitos. Las propiedades de rigidez del material son compilados en una única ecuación matricial que gobierna el comportamiento interno de la estructura idealizada. Los datos que se desconocen de la estructura son las fuerzas y los desplazamientos que pueden ser determinados resolviendo esta ecuación. El método directo de la rigidez es el más común en los programas de cálculo de estructuras (tanto comerciales como de fuente libre). El método directo de la rigidez se originó en el campo de la aeronáutica. Los investigadores consiguieron aproximar el comportamiento estructura de las partes de un avión mediante ecuaciones simples pero que requerían grandes tiempos de cálculo. Con la llegada de los ordenadores estas ecuaciones se empezaron a resolver de forma rápida y sencilla. El método consiste en asignar a la estructura de barras un objeto matemático, llamado matriz de rigidez, que relaciona los desplazamientos de un conjunto de puntos de la estructura, llamados nodos, con las fuerzas exteriores que es necesario aplicar para lograr esos desplazamientos (las componentes de esta matriz son fuerzas generalizadas asociadas a desplazamientos generalizados). La matriz de

rigidez relaciona las fuerzas nodales equivalentes y desplazamientos sobre los nodos de la estructura, mediante la siguiente ecuación:

Dónde: son las fuerzas nodales equivalentes asociadas a las fuerzas exteriores aplicadas sobre la estructura; son las reacciones hiperestáticas inicialmente desconocidas sobre la estructura; los desplazamientos nodales incógnita de la estructura y n, el número de grados de libertad de la estructura. Del teorema de Maxwell-Betti se deduce que la matriz de rigidez debe ser simétrica y por tanto:

2.2.16 Descripción del método

El método matricial requiere asignar a cada barra elástica de la estructura una matriz de rigidez, llamada matriz de rigidez elemental que dependerá de sus condiciones de enlace extremo (articulación, nudo rígido,...), la forma de la barra (recta, curvada,...) y las constantes elásticas del material de la barra (módulo de elasticidad longitudinal y módulo de elasticidad transversal). A partir del conjunto de matrices elementales mediante un algoritmo conocido como acoplamiento que tiene en cuenta la conectividad de unas barras con otras se obtiene una matriz de rigidez global, que relaciona los desplazamientos de los nudos con las fuerzas equivalentes sobre los mismos. Igualmente a partir de las fuerzas aplicadas sobre cada barra se construye el llamado vector de fuerzas nodales equivalentes que dependen de las acciones exteriores sobre la estructura. Junto con estas fuerzas anteriores deben considerarse las posibles reacciones sobre la estructura en sus apoyos o enlaces exteriores (cuyos valores son incógnitas). Finalmente se construye un sistema lineal de ecuaciones, para los desplazamientos y las incógnitas. El número de reacciones incógnitas y desplazamientos incógnita depende del número de nodos: es igual a 3N

para problemas bidimensionales, e igual a 6N para un problema tridimensional. Este sistema siempre puede ser dividido en dos subsistemas de ecuaciones desacoplados que cumplen:

Subsistema 1. Que agrupa todas las ecuaciones lineales del sistema original que sólo contienen desplazamientos incógnita.

Subsistema 2. Que agrupa al resto de ecuaciones, y que una vez resuelto el subsistema 1 y substituido sus valores en el subsistema 2 permite encontrar los valores de las reacciones incógnita.

Una vez resuelto el subsistema 1 que da los desplazamientos, se substituye el valor de estos en el subsistema 2 que es trivial de resolver. Finalmente a partir de las reacciones, fuerzas nodales equivalentes y desplazamientos se encuentran los esfuerzos en los nudos o uniones de las barras a partir de los cuales pueden conocerse los esfuerzos en cualquier punto de la estructura y por tanto sus tensiones máximas, que permiten dimensionar adecuadamente todas las secciones de la estructura.

2.2.17 Ecuaciones de Movimiento

El equilibrio de fuerzas de un sistema de múltiples grados de libertad, considerando masas concentradas, puede ser expresado como una función del tiempo de la siguiente forma.

$$F(t)\,I + F(t)\,D + F(t)\,S = F(t) \quad (2.1)$$

Donde los vectores de fuerza son:

F (t) I es el vector de acciones de inercia en las masas concentradas.

F (t) D es el vector de fuerzas de amortiguamiento viscoso.

F (t) S es el vector de fuerzas internas por deformación de la estructura.

F (t) es el vector de cargas aplicadas externamente.

Esta ecuación se sustenta en los principios de la física, siendo válida para sistemas lineales como no lineales si se plantea el equilibrio con respecto a la geometría deformada de la estructura. Esta ecuación de equilibrio físico para muchos sistemas estructurales que se aproximan a un comportamiento lineal se pueden

convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, en términos de los desplazamientos (nodales o de piso) como:

$$Mü\ (t)\ a + Cú\ (t)\ a + Ku\ (t)\ a = F\ (t)$$

Donde M es la matriz de masa (concentrada), C es la matriz de amortiguamiento viscoso y K es la matriz de rigidez estática para el sistema estructural. Los vectores dependientes del tiempo u (t) a, ü (t) a, ü (t) a son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas respectivamente. En el caso de una acción sísmica, la carga externa F (t) es igual a cero. Los movimientos sísmicos básicos son representados por tres componentes de desplazamiento en la base u (t) ig que se determinan en algún punto debajo de la cimentación de la estructura. Por tanto se acostumbra plantear la ecuación en términos de u (t), ú (t), ü (t) que son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en términos relativos de la base. En consecuencia los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas pueden ser eliminadas de la ecuación y se reescriben como:

$$Mü\ (t) + Cú\ (t) + Ku\ (t) = Mxüxg\ (t) – Myüyg\ (t) – Mzüzg\ (t)$$

Esta ecuación es válida dado que los desplazamientos y las velocidades del cuerpo rígido asociados con los movimientos de la base no causan fuerzas restauradoras elásticas o de disipación adicionales. Se debe entender que la solicitación sísmica es debido a los desplazamientos en la base y no a cargas puntuales aplicadas a la estructura. Sin embargo se considera suficiente el análisis por cargas estáticas equivalentes en casos sencillos de edificios de pocos pisos y con regularidad en la distribución de masas y de rigidez, siendo tales métodos especificados en los códigos de diseño sismo resistente. Existen diferentes métodos numéricos para la solución de las ecuaciones, teniendo cada uno ventajas y desventajas que dependen del tipo de estructuras y carga.

2.2.18 Resumiendo los usados en el análisis dinámico son:

Métodos de Integración Directa

Método de superposición modal

Análisis modal espectral

Análisis de dominio de frecuencias

Siendo el método numérico más eficiente para el análisis sísmico de sistemas estructurales lineales el método de superposición modal, que utiliza como vectores de forma a superponer la solución exacta del problema de valores propios. Una de las principales desventajas en este proceso es que no se toma en cuenta la distribución de carga dentro de la estructura, lo cual suele generar múltiples formas modales ortogonales a las cargas aplicadas que no participan en la respuesta dinámica de la estructura y requieren un trabajo computacional adicional sin ninguna utilidad.

2.2.19 Método de superposición modal

El método de superposición modal tiene un fundamento similar al método espectral pero para el análisis de las diversas cargas dinámicas en lugar de una envolvente de aceleraciones. Es uno de los métodos generales recomendado por la IAPF para análisis de trenes reales. El método consiste en sustituir en la ecuación dinámica los desplazamientos u (t) por su valor en función de los modos propios de vibración [a] y de unas funciones Y (t) (coordenadas generalizadas) que serán resultado intermedio del cálculo:

Suponiendo que los modos de vibración son normales a la matriz de amortiguamiento obtenemos un sistema de n ecuaciones diferenciales desacopladas:

Dónde:

Wi: frecuencia propia de modo i de vibración.

Di: razón de amortiguamiento del modo i de vibración.

Estas ecuaciones son desacopladas y por tanto sencillas de resolver tanto analítica (si P (t) es sencilla) como numéricamente en caso contrario. Por otro lado, la solución a la ecuación diferencial será una solución general de la ecuación homogénea (independiente de P y por tanto válida para todos los caso de carga) + una solución particular de la no homogénea (sencilla de determinar numéricamente). Una vez determinadas las funciones Y podemos calcular las deformaciones y a través de ellas los esfuerzos en todos los puntos de la estructura y para todos los instantes de tiempo. La contribución de los modos correspondientes a las frecuencias más altas podrá despreciarse, por lo que, al igual que en el método modal espectral, se toman únicamente los términos que movilizan el primer 90% de la masa.

2.2.20 Análisis Modal

La forma teórica del análisis modal consiste en plantear la ecuación del movimiento, suponer una forma de la respuesta e imponer que esta cumpla la ecuación que gobierna el movimiento del sistema, lo que supone resolver un problema de auto valores y auto vectores, como se indica en Ewins (2000). Dicho problema puede ser un proceso largo en el caso de tratar un sistema de varios grados de libertad. Para obtener la ecuación de movimiento es necesario calcular las matrices de masa y rigidez y los factores de amortiguamiento. Para el análisis modal experimental no es preciso el cálculo de estas matrices.

El análisis modal es un proceso mediante el cual se describe una estructura en términos de sus propiedades dinámicas o parámetros modales que son la frecuencia, el amortiguamiento y los modos de vibración, para todos los modos en el rango de frecuencias de interés. Todas las estructuras poseen frecuencias naturales y modos de vibración, que dependen básicamente de la masa y de la rigidez de la estructura. En el

diseño es necesario identificar estas frecuencias y conocer cómo afecta a la respuesta de la estructura cuando una fuerza actúa sobre la misma. El análisis modal es una herramienta eficiente para describir, comprender y modelar el comportamiento de las estructuras. Se puede dar una definición simplificada del análisis modal comparándolo con el análisis en frecuencia. En el análisis en frecuencia, una señal compleja se descompone en una serie de simples ondas senoidales con parámetros de amplitud y frecuencia individuales. En el análisis modal, una deformación compleja de una estructura se descompone en una serie de simples modos de deformación con parámetros de frecuencia y amortiguamiento individuales. Su fin último es la construcción de un Modelo Modal del comportamiento de la estructura.

Estudia la estructura cuando se encuentra sometida a una excitación conocida, con el objetivo de obtener un modelo matemático del comportamiento dinámico de la estructura. El procedimiento consiste en la adquisición de datos, su análisis y luego determinar todos los parámetros modales. Los parámetros modales son importantes porque describen las propiedades dinámicas inherentes de una estructura. El conocimiento del amortiguamiento modal es muy útil para predecir la vida a fatiga y reducir las respuestas en resonancia, como se puede ver en James III et al (1992). En un ensayo dinámico se aplica una carga dinámica a la estructura. Dicha carga tiene componentes en un cierto rango de frecuencias y la estructura responde a todas las frecuencias, pero entrará en resonancia cuando las componentes coincidan con las frecuencias naturales de la estructura. La respuesta de la estructura será una superposición lineal de todos los modos de vibración excitados. Una propiedad importante de los modos es que cualquier respuesta de la estructura puede ser expresada como una combinación de una serie de modos. Cada pico de la respuesta de una estructura puede ser representado por un modelo físico de un grado de libertad. Dicho modelo consistirá en una masa puntual, sostenida por un muelle sin masa y conectada con un amortiguador viscoso. Además dicha masa tiene restringido todos sus movimientos excepto uno, el que comprime el muelle y el amortiguador. También se puede hacer un modelo matemático que describe el comportamiento de

este sistema de un grado de libertad en el dominio del tiempo, mediante la aplicación de la segunda ley de Newton al modelo físico. El espectro de frecuencia de la respuesta de un sistema mecánico presenta tantos picos como grados de libertad posea el sistema. Las frecuencias modales se determinan observando los picos de la FRF mientras que los amortiguamientos modales no son tan fáciles de determinar, siendo a menudo parámetros medidos con un cierto grado de incertidumbre. Como la matriz de la función de respuesta en frecuencia es simétrica, sólo es necesario calcular una fila o una columna de dicha matriz para poder obtener los modos. Para esto hay que ir desplazando el punto en el que se aplica la fuerza externa al sistema por los diferentes puntos de medida. Los modos se pueden obtener observando la parte imaginaria de los espectros de frecuencia para la fila o columna medida, como se describe en Avitabile (2001). En dichas representaciones aparecen unos picos a ciertas frecuencias que coinciden con las frecuencias naturales del sistema. Dichos picos contienen la información de la amplitud de cada uno de los modos de vibración. Uniendo las amplitudes de los picos que aparecen en una determinada frecuencia que se obtienen para la misma fila o columna medida, el resultado es la representación del modo de vibración asociado a dicha frecuencia natural. Es fundamental para el cálculo de los modos de vibración de una estructura que no se coloque el punto de medida sobre un nodo del modo que se desea medir. Esto se debe a que la parte imaginaria de la FRF no proporcionará ningún pico para la frecuencia asociada a ese modo.

El análisis modal tiene muchas utilidades. Las más importantes se muestran a continuación:

Comprender como se comportan las estructuras bajo la acción de fuerzas dinámicas.

Medir las propiedades de la estructura cuando se somete a una vibración para refinar y validar modelos analíticos. Cada vez se usan más los ensayos dinámicos combinados con los análisis de elementos finitos para mejorar los

modelos analíticos a partir de los cuales se pueden identificar los parámetros de las secciones, módulo de Young, apoyos, etc.

Desarrollar un modelo, ya que proporciona una descripción definitiva del comportamiento de una estructura que puede ser evaluada para ciertas especificaciones del diseño.

Controlar la integridad de cierta estructura y su comportamiento, con el fin de detectar problemas y evitarlos. Es un campo de aplicación creciente ya que estructuras como puentes están sometidos a cargas cada vez mayores y que se ven deteriorados por el paso de los años, como se indica en He et al (2004).

Comprobar el estado de las estructuras después de sufrir daños como por ejemplo los debidos a un terremoto.

Ayudar en el diseño de todo tipo de estructuras (aviones, naves espaciales, coches, raquetas de tenis...) y hacer simulaciones en el desarrollo de prototipos.

Predecir o simular la respuesta a excitaciones externas o cómo se comportará la estructura bajo otras condiciones de operación diferentes.

Simular cambios en las características dinámicas, debido a modificaciones físicas, bien sea añadiendo una carga mayor o una rigidez para obtener una propiedad dinámica deseada.

Estimar las fuerzas que actúan sobre la estructura.

Hacer un análisis del ensamblaje de estructuras.

2.2.21 Generación de Vectores de Ritz

En los métodos tradicionales de superposición modal directa se usan aproximaciones de los modos más bajos de la estructura; sin embargo el interés se centra alrededor de frecuencias cercanas a un valor específico, que permita analizar posibles condiciones de resonancia para fuerzas oscilatorias. Estas frecuencias de interés deben pertenecer al extremo más bajo del espectro, ya que la aproximación debida a la idealización física mediante un modelo discreto provoca que las

frecuencias altas sean inexactas. En lugar de usar los vectores modales resultantes del problema de valores propios se puede usar otro conjunto de vectores ortogonales como base del espacio de soluciones, que facilite la solución de la ecuación dinámica del problema de valores y vectores propios; al utilizar un espacio con una base de menor dimensión, pudiendo lograr una buena aproximación con menos vectores. Se puede representar la respuesta estructural a través de una combinación lineal con un número L << N de vectores linealmente independientes, siendo este conjunto de vectores los vectores de Ritz.

Donde el primer bloque de vectores está constituido por todas las cargas que actúan sobre la estructura, obteniéndose los desplazamientos estáticos causados por la carga, resolviendo la ecuación:

$$Ku_0 = F$$

El primer bloque de vectores no necesariamente debe ser el vector de cargas, porque podría ser aproximado por otro vector como se demostrará más adelante mediante un ejemplo. Para la generación de vectores de Ritz se usa la ecuación recursiva, que es similar a la ecuación de iteración de sub-espacios: destaca su parecido con el método de la potencia.

$$K u_{i\,1} = M u_i$$

2.2.22 Solución del Sistema Dinámico usando Vectores de Ritz

En el método de Rayleigh el concepto básico que se usa para encontrar una aproximación de la frecuencia de vibración para un sistema de un grado de libertad (UGDL) es el principio de conservación de energía. La energía en un sistema de vibración libre debe permanecer constante si no actúa algún tipo de amortiguación; entonces la máxima energía de deformación debe ser igual a la máxima energía cinética de la masa. El método puede ser aplicado para sistemas de múltiples grados de libertad (MGDL), que pueden ser representados como UGDL a través del uso de desplazamientos Ritz de la forma X:

Dónde:

K = XTK X es la rigidez generalizada

M = XTM X es la masa generalizada

W^2 es la aproximación de la frecuencia de vibración.

La extensión Ritz del método de Rayleigh conocido como análisis de Rayleigh-Ritz ha sido estudiada ampliamente para encontrar la aproximación de los menores valores propios y los correspondientes vectores del problema de vibración libre:

pueden ser aproximados por un número discreto de funciones de forma globales X del sistema original de coordenadas, llamadas vectores de Ritz y se tiene el conjunto de parámetros conocidos como las coordenadas Ritz, que caracterizan la participación de cada vector de Ritz en la solución. El vector desplazamiento nodal u se aproxima por una combinación lineal de r vectores de Ritz independientes, con r < n, como:

Donde xi son los vectores de base linealmente independientes que serán generados por el algoritmo explicado más adelante y zi (t) son funciones del tiempo desconocidas, que son las coordenadas de Ritz. Al derivar la ecuación dos veces respecto del tiempo, se obtienen las siguientes expresiones:

Si se tiene que la ecuación dinámica del sistema estructural es:

$$(t) = f(s, t) = f(s)\, g(t) = f\, g(t)$$

Reemplazando las expresiones precedentes se tendría:

Se conoce que las matrices de masa M y rigidez K son cuadradas de orden n y el vector de carga f de orden n x 1

Como se mencionó anteriormente, uno de los mejores métodos para resolver el problema de dinámica lineal propuesto es la "técnica de superposición modal". Se escoge r modos de vibración no amortiguados libres, procedentes de la solución de los valores propios como vectores base X. Si X es de dimensión n x r, el X^ T es de orden r x n, multiplicando X ^ T en la ecuación anterior:

Representando estas matrices como:

$X^T M X = M^*$

$X^T C X = C^*$

$X^T K X = K^*$

$X^T f(s) = f^*$

Siendo estas nuevas matrices de rigidez, masa y amortiguamiento (M*, C* y K*) cuadradas de orden $r << n$ y el vector f * de orden r x 1

Con esta particular elección se demuestra la reducción de matrices M*, C* y K*.

El sistema reducido se transforma en un grupo de r ecuaciones independientes determinadas que pueden ser integradas una por una. Logrando un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas de orden r de mucho menor orden que n que es el NGL del sistema. Si se calcula la matriz X de vectores de Ritz de orden r y los valores propios z se puede lograr el conjunto de vectores:

°X son el conjunto de vectores ortogonalizados con respecto a las dos matrices de rigidez y masa del sistema completo, siendo algunos de estos vectores una buena aproximación para las formas de modo exactas de la estructura.

2.2.23 Proceso de ortogonalización con Gram Schmidt

Dada la ecuación dinámica:

Para resolver el problema, se podría plantear la siguiente ecuación:

Donde f en realidad puede ser otro vector del sub-espacio. Se da f para imitar la forma producida en la estructura por las fuerzas actuantes en ella.
Sea la siguiente ecuación para determinar el vector y1:

Normalizando el vector y1 respecto a la masa:

De manera que:

Para el siguiente vector se resuelve:

Dado el vector y2 se procede a calcular:

Dónde:

Si se multiplica la ecuación por xT1 M reemplazando el valor de c1, se tiene:

Lo que indica que x1 es M-ortogonal a p2. Ahora se puede normalizar p2 respecto a la masa:

De donde se verifica que:

Al ser p2 múltiplo de x2, entonces:

Suponiendo que se cumple que: (X1,X2,…Xn) es un conjunto M ortogonal 2 a 2 es decir:

I, j=1, 2, n-1.

Sea:

Se resuelve para yn, sea:

Donde , y se cumple que:
Si se multiplica la ecuación por xTr M, se tiene:

Lo que indica que el vector pn es M-ortogonal a xr pero como r=(1,2,…n-1) entonces es ortogonal al conjunto generado por Ritz. Para ortonormalizar pn se debe hacer:

Determinando que el vector xn resulta ortonormal al conjunto.

2.2.24 Desarrollo del Algoritmo y Diagrama de Flujo

Con la explicación de la secuencia del procedimiento para generar los vectores de Ritz, cuyos vectores desacoplan el sistema de ecuaciones diferenciales de un orden r << n se puede lograr la solución de la ecuación dinámica, se ha procedido a realizar el algoritmo que se muestra a continuación:

Algoritmo. Generación de vectores de Ritz

1. Dadas las matrices de masa M y rigidez K cuadradas de orden n y el vector de carga f de orden n x 1
2. Resolver para el primer vector:

   Se obtiene y1
3. Normalizar el vector respecto de la masa:

4. Resolver para vectores adicionales x (i=2,3,.....r) con cálculos iterativos a través del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

a) Calcular para j=2,3,....., i-1, los coeficientes c

b) Calcular para el vector p adicional

c) Normalizar el vector respecto de la masa

5. Proyectar las matrices de masa y de rigidez en el subespacio definido por los vectores de Ritz:

K* y M* matrices cuadradas generalizadas de orden r

6. Se resuelve el problema de valores y vectores propios reducido de r X r

i=1,2,…r.

Donde z es el conjunto de coordenadas nodales, que son usados para calcular finalmente los vectores de Ritz ortogonales de forma.

°X son vectores ortogonalizados con respecto a las dos matrices de rigidez y masa del sistema completo, siendo alguno de estos vectores una buena aproximación para las formas de modo exactas de la estructura. De esta manera, se obtiene una estimación aproximada de un número reducido de formas nodales de orden r, pero resolviendo un problema de valores característicos de mucho menor orden. Sin embargo si la matriz de amortiguamiento resulta acoplada, se recomienda emplear métodos de integración directa como Diferencia Central o Newmark, que consiste básicamente en encontrar la solución en una cierta cantidad (discreta) de pasos de tiempo.

2.2.25 Métodos de combinación espectral de la respuesta modal

La respuesta r (t) de un edificio se describe como la superposición de las contribuciones rn (t) de cada uno de los modos naturales de vibración, para un análisis de la variación de las aceleraciones en el tiempo de una estructura. Sin embargo, para un análisis espectral, la máxima respuesta en cada uno de los modos se determina directamente del espectro de respuesta sísmica. Debido a que las máximas respuestas para cada modo no ocurren simultáneamente, estas no pueden ser superpuestas de forma directa para obtener el máximo valor de respuesta. El método más conocido de combinación modal espectral es el de la Raíz Cuadrada de la Suma de los Cuadrados (SRSS), es decir:

Donde r representa la máxima respuesta de desplazamiento, deformación, cortante, o momento en un determinado nivel del edificio. Este método se aplica sólo a los resultados máximos modales, es decir, a los valores máximos de desplazamientos horizontales, derivas de entrepiso, cortantes de entrepiso, momentos volcantes de entrepiso, momento volcante en la base y fuerzas horizontales estáticas correspondientes a las fuerzas máximas modales. A continuación se presentan cada una de las ecuaciones mencionadas:

Otro método también utilizado es el llamado Método de la Combinación Cuadrática Completa (CQC), que representa la forma de combinar la respuesta de los diferentes parámetros modales como:

Donde ri y rj representan las respuestas modales máximas del parámetro de estudio para los modos i, j respectivamente, mientras que ij corresponde al parámetro de relación entre ambos modos.

La ecuación se puede expresar entonces como:

La ecuación es similar al método SRSS en su primera expresión, ya que el método SRSS parte de la premisa que las respuestas de los grados de libertad desacoplados son estadísticamente independientes. En comparación a esta premisa, el método CQC asume que existe una interacción modal. Finalmente, un caso particular resulta cuando los coeficientes de correlación entre modos son cero, en este caso el método CQC es igual al método SRSS. La figura muestra los coeficientes de correlación para el método CQC. (Ver figura 4)

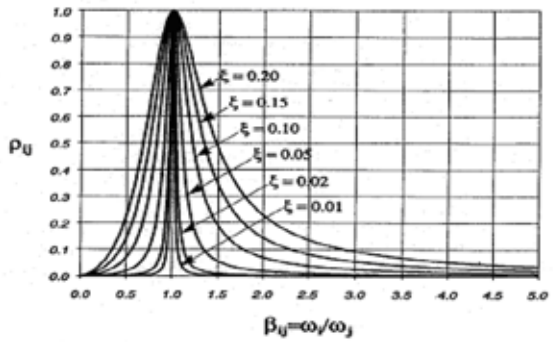

Figura 4. Coeficiente de correlación para el método CQC.

Dynamics of Structures: Theory and Applications Anil K. Chopra. (Pag 43)

2.3 Bases legales

Acero estructural, nom-b-254-1987 (astm a36)

Acero estructural de baja aleación y alta resistencia, nom-b- 282-1987 (astm a242)

Ansi/aisc 360-10, Specification for Structural Steel Buildings (Especificaciones para construcciones de acero)

Norma venezolana Covenin 1756-1:2001 edificaciones sismorresistentes.

Norma venezolana Covenin 2004:1998 terminología de las normas covenin-mindur de edificaciones

Norma venezolana 1618:2016, estructuras de acero para edificaciones. Método de los estados límites.

Planchas, perfiles y barras de acero al carbono para uso estructural con baja e intermedia resistencia a la tensión, nom-b-281-1987 (astm a283)

2.4 Definición de términos básicos

Amortiguamiento: Capacidad de un sistema o un cuerpo para disipar energía cinética en otro tipo de energía.

Amortiguamiento viscoso: Se produce por la resistencia de un fluido al movimiento de un sólido, siendo este viscoso o turbulento.

ASTM: American Society for Testing Materials (Sociedad Americana de Prueba de Materiales).

CQC: Combinación cuadrática perfecta.

Deflexión: Grado en el que un elemento estructural se deforma bajo la aplicación de una fuerza.

Espacio prehilbertiano: Es un espació vectorial provisto de un producto escalar.

FRF: Función de respuesta en frecuencia.

Histéresis: Es la tendencia de un material a conservar una de sus propiedades, en ausencia del estímulo que la ha generado.

Módulo de Young: Es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en la que se aplica una fuerza.

Ondas senoidales: Representa el valor de la tensión de la corriente alterna a través de un tiempo continuamente variable.

Ortonormalización de Gram - Schmidt: Es un algoritmo para construir, a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio prehilbertiano.

Resonancia: Es el aumento en la amplitud del movimiento de un sistema debido a la aplicación de una fuerza pequeña en fase con el movimiento.

Rigidez: Capacidad de resistencia de un cuerpo a doblarse o torcerse por la acción de fuerzas exteriores que actúan sobre su superficie.

SRSS: Square of the sum of their squares.

CAPÍTULO III
MARCO METODOLÓGICO.

Una vez finalizada la revisión bibliográfica, el siguiente paso es considerar el marco metodológico en el cual se identificará la naturaleza de la investigación, el diseño de la misma, tipo, población, las técnicas e instrumentos de recolección de datos, así como la validez, con el fin de dar respuestas en forma ordenada y sistemática a las interrogantes planteadas.

3.1 Tipo de investigación:

Para Méndez (2007, p. 228), al desarrollar el tipo de investigación se debe considerar "el nivel de conocimiento científico (observación, descripción, explicación) al que espera llegar el investigador, se debe formular el tipo de estudio".

Entre tanto, Tamayo (2007), refiere cuando se va a resolver un problema en forma científica, es conveniente conocer los tipos de investigaciones existentes para evitar equivocaciones en la elección del método adecuado para un procedimiento específico.

Adicionalmente, Chávez (2007, p. 133), expresa que el tipo de investigación "se determina de acuerdo con el tipo de problema que el lector desea solucionar, objetivos que pretenda lograr y disponibilidad de recursos". El investigador debe indagar sobre que otros criterios clasificarán su estudio, con el objeto de completar tal explicación, señalando de esta manera las razones consideradas para incluirlas en los diversos tipos, basándose en la realidad de su trabajo científico.

En este orden de ideas, el presente trabajo, corresponde a una investigación de tipo analítico-descriptiva, de acuerdo con Hurtado (2000), este tipo de investigación "tiene como objetivo analizar un evento y comprenderlo en términos de sus aspectos

Más evidentes (…) propicia el estudio y la comprensión más profunda del evento en estudio" (p.269).

Por su parte, Tamayo (2007), refiere a las investigaciones descriptivas como el registro, análisis e interpretación de la naturaleza actual y la composición o procesos de los fenómenos; trabajando así, sobre realidades de hecho y su característica fundamental es la de presentar una interpretación correcta.

Igualmente, Hernández, et al. (2006), establecen que en estudios descriptivos es necesario que el investigador especifique quienes deben estar incluidos en la medición, o qué contexto, hecho, ambiente, comunidad o equivalente habrá de describirse.

3.2 Diseño Investigativo:

Según Bavaresco (2006), los más recomendados son los diseños bibliográficos y de campo, siendo este último experimental, postfacto, encuesta, panel y el estudio de casos.

Al mismo tiempo, Tamayo (2007, p.110), argumenta "cuando los datos se recogen directamente de la realidad, por lo cual se denomina primarios, su valor radica en que permiten cerciorarse de las verdaderas condiciones en que se han obtenido los datos".

En tal sentido, la presente investigación de acuerdo con los objetivos planteados, entramos en una investigación analítico-descriptivo al realizar un Análisis comparativo del método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados En otro orden de ideas, Arias (2004), considera a la investigación documental como el proceso basado en la búsqueda y análisis de datos secundarios, es decir, datos registrados por otros investigadores en fuentes documentales, impresas, audiovisuales o electrónicas.

La presente investigación de campo cumple con las características descritas, ya que en el desarrollaremos cada método de cálculo, se describirán los aspectos que lo conforman, se procederá también un análisis comparativo, para ampliar el

conocimiento de sus ventajas y desventajas frente a un mismo problema de cálculo estructural.

Por otra parte, en el presente trabajo se utilizó un diseño de investigación no experimental, ya que se establecerá un análisis comparativo entre cada método de cálculo estructural, sin pretender establecer una relación causa-efecto.

3.3 Técnica e instrumentación de recolección de datos:

Los datos obtenidos fueron procesados y presentados para el análisis de la información por distribuciones de frecuencias absolutas y relativas con sus respectivos gráficos de barra. Méndez (2007), expone que el análisis de los resultados como proceso implica el manejo de los datos que se han obtenido, reflejándolos en cuadros y gráficos, una vez dispuestos, se inicia su análisis tomando en cuenta las bases teóricas, cumpliendo así los objetivos propuestos.

Así mismo, Hernández et al. (2006) describen el análisis de datos como "un conjunto de puntuaciones ordenadas en sus respectivas categorías". (p. 419). Por otra parte, Bavaresco (2006), señala que es en esta etapa cuando los cuadros elaborados deberán ser interpretados para obtener los resultados, donde se converge el sentido crítico objetivo – subjetivo que le impartirá el investigador a esos números recogidos en las tablas.

Adicionalmente, se aplicaron técnicas de análisis de datos cualitativos y cuantitativos. En este sentido, Sabino (2001), plantea con relación al análisis cualitativo referido al que procedamos hacer con información de tipo verbal que de un modo general aparece en fichas, es por ello que este tipo de análisis se efectúa verificando los datos que se refieren a un mismo aspecto y tratando de evaluar la fiabilidad de cada información

En cuanto al análisis cuantitativo, Sabino (2001), plantea que en este caso se efectúa naturalmente, con toda la información numérica resultante de la investigación. Mostrando la información recolectada en cuadros y medidas, calculando sus porcentajes. En la presente investigación tal análisis se realizó mediante la interpretación de respuestas emitidas al realizar los siguientes pasos:

Describir el procedimiento de los métodos.

Establecer la metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz.

Realizar los cálculos matemáticos para obtener la repuesta sísmica usando ambos métodos.

Comparar el método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados

3.4 Fases metodológicas

En la presente investigación, se divide en cuatro fases, la primera fase se describe como la metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz, se realizan los cálculos matemáticos para obtener la respuesta sísmica en ambos métodos.

Fase I: Describir el procedimiento de los métodos.

Al describir los métodos, se procede a detallar las características que son de ayuda para enfocarnos en las diferencias y similitudes entre ambos métodos, y previo a la descripción tener una idea, del rumbo que tendrá la investigación, así como también puntualizar a fondo cada método.

Fase II: Establecer la metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz.

Se establece la metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz, nos enfocamos en los pasos a seguir para que se pueda desarrollar dicho método, pautando cada lineamiento, con el objetivo de un estudio sistemático del procedimiento en el cual nos enfocaremos, y forjar un criterio según este.

Fase III: Realizar los cálculos matemáticos para obtener la repuesta sísmica usando ambos métodos.

Realizar los cálculos matemáticos de los métodos, nos ayuda a cuantificar las respuestas sísmica de cada uno, poder visualizar las diferencias matemáticas, su

margen de dispersión de respuesta entre un método y otro, y poder tomar un buen criterio de cual método puede favorecer según sea el caso.

Fase IV Comparar el método de auto valores y vectores de Ritz.

Al comparar un método con otro tomamos en cuenta todas las fases anteriores, y se realizara un análisis cualitativo de cómo se desenvuelven cada uno, guiándonos hacia su descripción, su metodología de cálculo, y sus cálculos matemáticos, donde se enfocaran las ventajas y desventajas cada método frente al otro.

CAPÍTULO IV
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se expone todos los resultados obtenidos, que fueron necesarios para realizar el Análisis comparativo del método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados en este Trabajo de Grado y posteriormente se expone el respectivo análisis detallado de los resultados de dichos datos.

4. Describir el procedimiento de los métodos.

Se revisa los aspectos básicos del método de Rayleigh Ritz para determinar los vectores de Ritz en forma eficiente, verificando los resultados con ejemplos sencillos. En el análisis estructural se considera modelos con distinto niveles de altura, empleando el programa comercial Excel. La calidad de los resultados es cuantificada en términos de los factores de masa participante que permiten estimar la cantidad de vectores usando vectores propios y vectores de Ritz.

4.1.1 Generación de Vectores de Ritz

En los métodos tradicionales de superposición modal directa se usan aproximaciones de los modos más bajos de la estructura; sin embargo el interés se centra alrededor de frecuencias cercanas a un valor específico, que permita analizar posibles condiciones de resonancia para fuerzas oscilatorias. Estas frecuencias de interés deben pertenecer al extremo más bajo del espectro, ya que la aproximación debida a la idealización física mediante un modelo discreto provoca que las frecuencias altas sean inexactas. En lugar de usar los vectores modales resultantes del problema de valores propios se puede usar otro conjunto de vectores ortogonales como base del espacio de soluciones, que facilite la solución de la ecuación dinámica.

Del problema de valores y vectores propios; al utilizar un espacio con una base de menor dimensión, pudiendo lograr una buena aproximación con menos vectores. Se puede representar la respuesta estructural a través de una combinación lineal con un número L << N de vectores linealmente independientes, siendo este conjunto de vectores los vectores de Ritz. Donde el primer bloque de vectores está constituido por todas las cargas que actúan sobre la estructura, obteniéndose los desplazamientos estáticos causados por la carga, resolviendo la ecuación:

El primer bloque de vectores no necesariamente debe ser el vector de cargas, porque podría ser aproximado por otro vector. Para la generación de vectores de Ritz se usa la ecuación recursiva, que es similar a la ecuación de iteración de sub-espacios: destaca su parecido con el método de la potencia.

Queriendo verificar en esta tesis que los vectores de Ritz producen resultados aceptables con una base de menor dimensión que el problema de valores y vectores propios con dimensión completa. La propuesta del método es simplificar el problema para la respuesta del sistema dinámico por una respuesta aproximada.

4.1.2 Análisis Modal

La forma teórica del análisis modal consiste en plantear la ecuación del movimiento, suponer una forma de la respuesta e imponer que esta cumpla la ecuación que gobierna el movimiento del sistema, lo que supone resolver un problema de auto valores y auto vectores, como se indica en Ewins (2000). Dicho problema puede ser un proceso largo en el caso de tratar un sistema de varios grados de libertad. Para obtener la ecuación de movimiento es necesario calcular las matrices de masa y rigidez y los factores de amortiguamiento. Para el análisis modal experimental no es preciso el cálculo de estas matrices.

El análisis modal es un proceso mediante el cual se describe una estructura en términos de sus propiedades dinámicas o parámetros modales que son la frecuencia, el amortiguamiento y los modos de vibración, para todos los modos en el rango de frecuencias de interés. Todas las estructuras poseen frecuencias naturales y modos de vibración, que dependen básicamente de la masa y de la rigidez de la estructura. En el diseño es necesario identificar estas frecuencias y conocer cómo afecta a la respuesta de la estructura cuando una fuerza actúa sobre la misma. El análisis modal es una herramienta eficiente para describir, comprender y modelar el comportamiento de las estructuras. Se puede dar una definición simplificada del análisis modal comparándolo con el análisis en frecuencia. En el análisis en frecuencia, una señal compleja se descompone en una serie de simples ondas senoidales con parámetros de amplitud y frecuencia individuales. En el análisis modal, una deformación compleja de una estructura se descompone en una serie de simples modos de deformación con parámetros de frecuencia y amortiguamiento individuales. Su fin último es la construcción de un Modelo Modal del comportamiento de la estructura.

Estudia la estructura cuando se encuentra sometida a una excitación conocida, con el objetivo de obtener un modelo matemático del comportamiento dinámico de la estructura. El procedimiento consiste en la adquisición de datos, su análisis y luego determinar todos los parámetros modales. Los parámetros modales son importantes porque describen las propiedades dinámicas inherentes de una estructura. El conocimiento del amortiguamiento modal es muy útil para predecir la vida a fatiga y reducir las respuestas en resonancia, como se puede ver en James III et al (1992). En un ensayo dinámico se aplica una carga dinámica a la estructura. Dicha carga tiene componentes en un cierto rango de frecuencias y la estructura responde a todas las frecuencias, pero entrará en resonancia cuando las componentes coincidan con las frecuencias naturales de la estructura.

La respuesta de la estructura será una superposición lineal de todos los modos de vibración excitados. Una propiedad importante de los modos es que cualquier respuesta de la estructura puede ser expresada como una combinación de una serie de

modos. Cada pico de la respuesta de una estructura puede ser representado por un modelo físico de un grado de libertad. Dicho modelo consistirá en una masa puntual, sostenida por un muelle sin masa y conectada con un amortiguador viscoso. Además dicha masa tiene restringido todos sus movimientos excepto uno, el que comprime el muelle y el amortiguador. También se puede hacer un modelo matemático que describe el comportamiento de este sistema de un grado de libertad en el dominio del tiempo, mediante la aplicación de la segunda ley de Newton al modelo físico. El espectro de frecuencia de la respuesta de un sistema mecánico presenta tantos picos como grados de libertad posea el sistema. Las frecuencias modales se determinan observando los picos de la FRF mientras que los amortiguamientos modales no son tan fáciles de determinar, siendo a menudo parámetros medidos con un cierto grado de incertidumbre. Como la matriz de la función de respuesta en frecuencia es simétrica, sólo es necesario calcular una fila o una columna de dicha matriz para poder obtener los modos.

Para esto hay que ir desplazando el punto en el que se aplica la fuerza externa al sistema por los diferentes puntos de medida. Los modos se pueden obtener observando la parte imaginaria de los espectros de frecuencia para la fila o columna medida, como se describe en Avitabile (2001). En dichas representaciones aparecen unos picos a ciertas frecuencias que coinciden con las frecuencias naturales del sistema. Dichos picos contienen la información de la amplitud de cada uno de los modos de vibración. Uniendo las amplitudes de los picos que aparecen en una determinada frecuencia que se obtienen para la misma fila o columna medida, el resultado es la representación del modo de vibración asociado a dicha frecuencia natural. Es fundamental para el cálculo de los modos de vibración de una estructura que no se coloque el punto de medida sobre un nodo del modo que se desea medir. Esto se debe a que la parte imaginaria de la FRF no proporcionará ningún pico para la frecuencia asociada a ese modo.

4.2 Establecer la metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz.

4.2.1 Método de Rayleigh Ritz

Dada la ecuación dinámica:

Para resolver el problema, se podría plantear la siguiente ecuación:

Generación de fuerzas dependientes

Donde s en realidad puede ser otro vector del sub-espacio.

Sea la siguiente ecuación para determinar el vector y1:

Normalizando el vector y1 respecto a la masa:

De manera que:

Para el siguiente vector se resuelve:

Dado el vector y2 se procede a calcular:

Dónde:

Si se multiplica la ecuación por xT1 M reemplazando el valor de c1, se tiene:

Lo que indica que x1 es M-ortogonal a p2. Ahora se puede normalizar p2 respecto a la masa:

De donde se verifica que:

Al ser p2 múltiplo de x2, entonces:

Suponiendo que se cumple que: (X1,X2,…Xn) es un conjunto M ortogonal 2 a 2 es decir:

I, j=1, 2, n-1.

Sea:

Se resuelve para yn, sea:

Donde , y se cumple que:

Si se multiplica la ecuación por xTr M, se tiene:

Lo que indica que el vector pn es M-ortogonal a xr pero como r=(1,2,…n-1) entonces es ortogonal al conjunto generado por Ritz. Para ortonormalizar pn se debe hacer:

Determinando que el vector xn resulta ortonormal al conjunto.

Aproximación de la ortogonalidad de los modos

Se demuestra que el vector n satisface la condición de ortogonalidad.

Reduciendo el problema de valor característico.

Se determinan aproximaciones de frecuencias y modos.

4.2. Estimación del Error del Vector de Fuerzas St* S - n

El vector de carga espacial S, se puede aproximar usando los vectores de Ritz con la serie finita:

Si los vectores son normalizados, se puede demostrar que es idéntico a j por lo tanto el error en la aproximación del vector de carga, S por el sistema reducido está dado por:

Que para poder comparar las aproximaciones al vector de carga, se normaliza, resultando:

Siendo en la fracción del vector de cargas que no es usada en el análisis. Se puede comparar el error que se presenta al calcular con vectores propios y/o con vectores de Ritz, así como también mostrar la convergencia entre los dos métodos, permitiendo comprobar que los vectores de Ritz convergen más rápido que los vectores propios.

4.3.1 Método de Auto valores

Frecuencias y modos de vibración naturales

En esta sección se presenta el problema de valor propio cuya solución proporciona las frecuencias y modos naturales de un sistema; para un sistema de dos grados de libertad ésta puede describirse en forma matemática como:

Donde la forma modificada no varía con el tiempo. La variación de los desplazamientos se describe mediante la función armónica simple

Dónde:

y son constantes que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales que inician el movimiento. Si se combinan las ecuaciones (10.2.1) y (10.2.2), resulta

)

Donde

y son incógnitas.

Al sustituir esta forma de en la ecuación se obtiene

Esta ecuación puede satisfacerse de dos maneras. Ya sea que , lo que implica que y que el sistema no tiene movimiento (ésta es la solución conocida como trivial), o que las frecuencias y los modos naturales satisfagan la siguiente ecuación algebraica:

La cual proporciona una condición útil. Esta ecuación algebraica se denomina problema matricial de valor característico o eigenvalor. Cuando es necesario se llama problema de valor característico real para distinguirlo del problema de valor característico complejo para los sistemas con amortiguamiento. Las matrices de rigidez k y masa m son conocidas, por lo que el problema consiste en determinar el escalar y el vector

Para indicar la solución formal de la ecuación, se reescribe como

Que puede interpretarse como un conjunto de N ecuaciones algebraicas homogéneas para los N elementos Este conjunto siempre tiene la solución trivial , que no es útil porque implica que no existe movimiento. Se tienen soluciones no triviales si:

La N raíces, , de la ecuación anterior determinan las N frecuencias naturales de vibración dispuestas por convención en secuencia de menor a mayor Estas raíces de la ecuación característica se conocen también como valores propios, valores característicos o valores normales. Cuando una frecuencia natural es conocida, puede resolverse para el correspondiente vector . El problema de valor característico no fija la amplitud absoluta de los vectores , sino sólo la forma del vector dada por los

valores relativos de los N desplazamientos . En correspondencia a las N frecuencias de vibración natural de un sistema de VGDL, existen N vectores independientes , que son conocidos como los modos naturales de vibración, o las formas naturales de los modos de vibración. Estos vectores también se denominan vectores propios, vectores característicos o modos normales. El término natural se utiliza para calificar cada una de estas propiedades de vibración, a fi n de enfatizar el hecho de que éstas son propiedades naturales de la estructura en vibración libre, y que sólo dependen de sus propiedades de masa y rigidez. El subíndice n indica el número del modo, y el primer modo (n = 1) también se conoce como el modo fundamental.

Como ya se mencionó, durante la vibración libre en cada modo natural, un sistema no amortiguado oscila en su frecuencia natural con todos los grados de libertad del sistema que vibra en la misma fase, pasando por sus posiciones máxima, mínima o de equilibrio en el mismo instante de tiempo. Como este tipo de modos naturales fueron el tema del tratado clásico de mecánica de Lagrange (1811), se hará referencia a ellos como los modos naturales clásicos. En los sistemas amortiguados esta propiedad suele violarse y los modos naturales clásicos no existen.

Matrices modal y espectral

Los N valores propios y los N modos naturales pueden ensamblarse de manera compacta en matrices. Si el modo natural correspondiente a la frecuencia natural tiene los elementos , donde j indica los grados de libertad, entonces los N vectores propios pueden mostrarse en una sola matriz cuadrada, en la que cada una de sus columnas es un modo natural:

Los N valores característicos n pueden ensamblarse en una matriz diagonal , que se conoce como la matriz espectral del problema de valor característico, ecuación (10.2.4):

Cada valor y vector característico satisface la ecuación, que puede reescribirse como la relación

Mediante el uso de las matrices modal y espectral es posible reunir todas estas relaciones en una sola ecuación matricial:

Esta ofrece una presentación compacta de las ecuaciones que relacionan a todos los valores y vectores característicos.

Ortogonalidad de los modos

Es posible demostrar que los modos naturales correspondientes a las diferentes frecuencias naturales satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad. Cuando

,

0

Estas propiedades importantes pueden demostrarse de la manera siguiente: la frecuencia natural y el modo natural n-

De manera similar, la frecuencia natural y el modo natural r-ésimos satisfacen la ecuación, por lo que . Al multiplicar antes por , resulta

La transpuesta de la matriz en el lado izquierdo de la ecuación será igual a la transpuesta de la matriz en el lado derecho de dicha ecuación, por lo tanto

Donde se ha utilizado la propiedad de simetría de las matrices de masa y rigidez. Al restar la ecuación las dos últimas ecuaciones se obtiene

Entonces la ecuación es verdadera cuando , que para los sistemas con frecuencias naturales positivas implica que . Si se sustituye la ecuación, resulta que la ecuación es verdadera cuando . Lo anterior completa una demostración para las relaciones de ortogonalidad de la ecuación.

Se han establecido las relaciones de ortogonalidad entre modos con frecuencias distintas (es decir). Si la ecuación de frecuencia tiene una raíz múltiple en j (es decir, el sistema tiene una frecuencia repetida j veces), siempre es posible encontrar j modos asociados con esta frecuencia que satisfagan la ecuación. Si estos j modos se incluyen con los modos correspondientes a las otras frecuencias, se obtiene

La ortogonalidad de los modos naturales implica que las siguientes matrices cuadradas son diagonales:

Donde los elementos de la diagonal son

Como m y k son matrices positivas definidas, los elementos diagonales de K y M son positivos y se relacionan mediante

Lo anterior puede demostrarse si Kn y Mn se definen de la manera siguiente: al sustituir la ecuación, resulta

Normalización de los modos

Donde I es una matriz identidad, esta ecuación establece que los modos naturales no sean solo ortogonales, sino que también estén normalizados con respecto a m, como conjunto ortonomal de masa. Las ecuaciones se convierten en:

4.3 Cálculos matemáticos de los métodos de los vectores de Ritz y Método de Auto Valores.

Marco Idealizado de dos niveles:

En la estructura siguiente se muestra un marco de dos niveles idealizado como un edificio de cortante cuyo valor de Rigidez es , masa de 0,2591. Determinar las frecuencias y modos naturales del sistema mostrado, además normalice los modos de manera que Mn = 1.

Considerar dos grupos diferentes de fuerzas aplicadas.

Además aplicar el método de los vectores de Ritz para hallar la frecuencia y modos naturales.

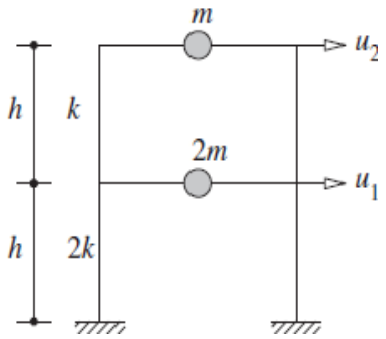

Figura 5. Marco idealizado de dos niveles.

h
0
2
4

Tabla 1. Altura de la estructura.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz de Rigidez		
K=	72	-24
	-24	24

Tabla 2. Matriz de Rigidez. (Marco de dos niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz de Masa		
M =	0,518	0
	0	0,259

Tabla 3. Matriz de Masa. (Marco de dos niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0

Det=	72 - 0,518w2	-24
	-24	24 - 0,2591w2

Tabla 4. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
0,134w^4 -31,092w^2 + 1152 = 0

Tabla 5. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	46,28
w2^2 =	185,79
w1 =	6,803
w2 =	13,630

Tabla 6. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 46,28						**Asumiendo**	
	x	48,018	-24	=	0		0,500
		-24	12,009		0		1,000

Tabla 7. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 185,79							
	x	-24,276	-24	=	0		-0,994
		-24	-24,138		0		1,000

Tabla 8. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	=	**0,624**	
	=	**0,878**	
	=	0,802 1,604	
	=	-1,132 1,139	

Tabla 9. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

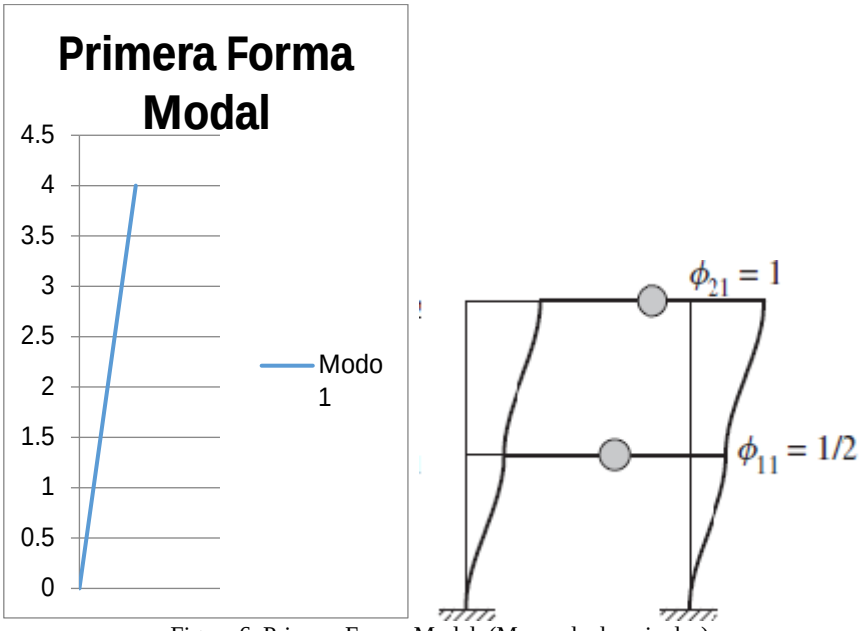

Figura 6. Primera Forma Modal. (Marco de dos niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

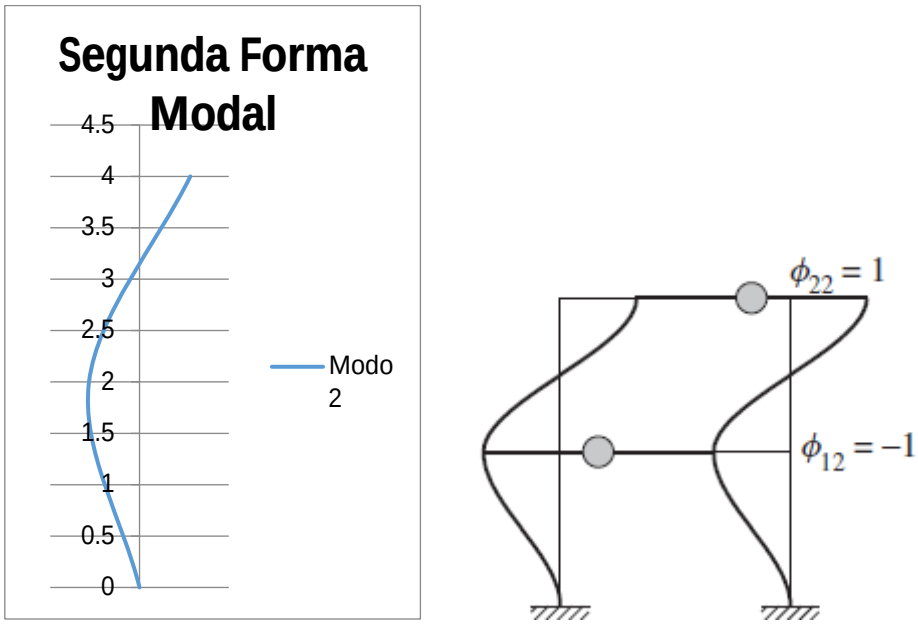

Figura 7. Segunda Forma Modal. (Marco de dos niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Aplicando el método de los vectores de Ritz para hallar la frecuencia y modos naturales.

S =(m,m)	
S =	0,5182
	0,2591

Tabla 10. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

(k-1*s)	
y1=	0,0161938
	0,0269896

Tabla 11. Hallando y2

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,899
	1,498

Tabla 12. Primer vector de Ritz normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

y2=(k-	
y2=	0,0178
	0,0340

Tabla 13. Hallando y2.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

a12=	0,0215

Tabla 14. Obteniendo a12.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	- a12 *Yn1
	-0,0015
	0,0018

Tabla 15. Ortogonalizando y2 con respecto a
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	-1,0592
	1,2711

Tabla 16.Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	47,39	-12,19
	-12,19	184,18

Tabla 17. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 18. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det=	47,39-w^2	-12,19
	-12,19	184,18-w^2

Tabla 19. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -231,57w^2 + 8580,01 = 0

Tabla 20. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	46,314
w2^2 =	185,255
w1n =	6,805
w2n =	13,611

Tabla 21. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 46,314							
	x	1,08	-12,19	=	0		1,0000
		-12,19	137,87		0		0,0884

Tabla 22. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 185,255							
	x	-137,86	-12,19	=	0		-0,0884
		-12,19	-1,08		0		1,00

Tabla 23. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,8052	-1,1387
	1,6103	1,1387

Tabla 24. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

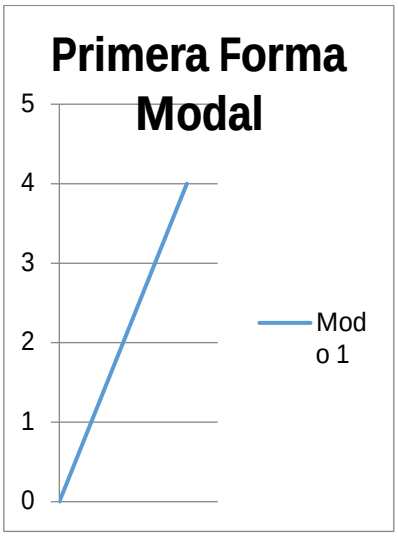

Figura 8. Primera Forma Modal. (Marco de dos niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

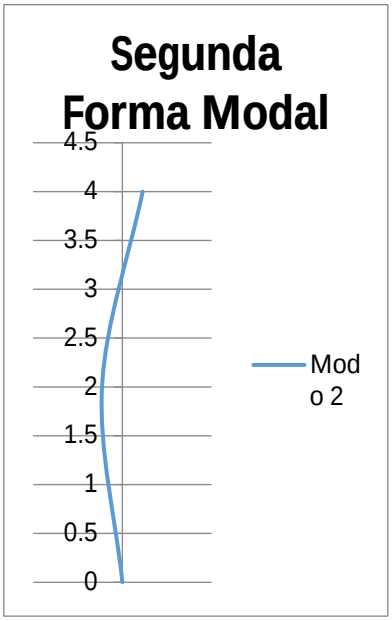

Figura 9. Segunda Forma Modal. (Marco de dos niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

4.3.2 Marco Idealizado de cinco niveles:

En la estructura siguiente se muestra un marco de cinco niveles idealizado como un edificio de cortante cuyo valor de Rigidez es , masa de 0,2591. Determinar las frecuencias y modos naturales del sistema mostrado, además normalice los modos de manera que Mn = 1.

Además aplicar el método de los vectores de Ritz para hallar la frecuencia y modos naturales.

Asignar patrones de cargas tanto rectangular, Triangular, Trapezoidal y únicamente en el techo.

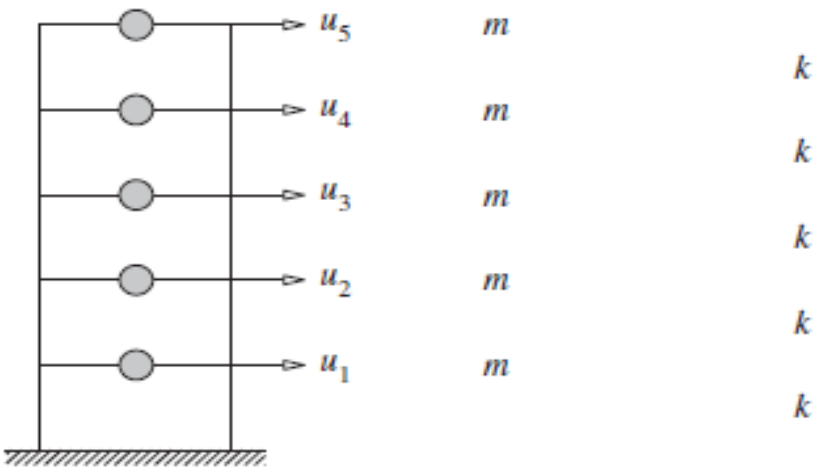

Figura 10. Marco idealizado de 5 niveles.

h
0
3
6
9
12
15

Tabla 25. Altura de la estructura.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz de Rigidez					
K =	63,12	-31,56	0	0	0
	-31,56	63,12	-31,56	0	0
	0	-31,56	63,12	-31,56	0
	0	0	-31,56	63,12	-31,56
	0	0	0	-31,56	31,56

Tabla 26. Matriz de Rigidez. (Maco de 5 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz de masa					
M =	0,259	0	0	0	0
	0	0,259	0	0	0
	0	0	0,259	0	0
	0	0	0	0,259	0
	0	0	0	0	0,259

Tabla 27. Matriz de masa. (Marco de 5 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det ((K)- W^2*m) =					
Det =	63,12 - 0,259w2	-31,56	0	0	0
	-31,56	63,12 - 0,259w2	-31,56	0	0
	0	-31,56	63,12 - 0,259w2	-31,56	0
	0	0	-31,56	63,12 - 0,259w2	-31,56
	0	0	0	-31,56	31,56 - 0,259w2

Tabla 28. Determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1	3,1415	w1^2	9,869
w2	9,171	w2^2	84,107
w3	14,458	w3^2	209,034
w4	18,564	w4^2	344,622
w5	21,179	w5^2	448,550

Tabla 29. Frecuencias.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 9,869										
		60,563	-31,56	0	0	0		0		1
		-31,56	60,563	-31,56	0	0		0		1,919
	x	0	-31,56	60,563	-31,56	0	=	0		2,682
		0	0	-31,56	60,563	-31,56		0		3,229
		0	0	0	-31,56	29,003		0		3,513

Tabla 30.Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 84,107										
		41,328	-31,56	0	0	0		0		1
		-31,56	41,328	-31,56	0	0		0		1,309
3	x	0	-31,56	41,328	-31,56	0	=	0		0,715
		0	0	-31,56	41,328	-31,56		0		-0,373
5		0	0	0	-31,56	9,768		0		-1,204

Tabla 31. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W3^2 = 209,034	

		8,959	-31,56	0	0	0		0		1
		-31,56	8,959	-31,56	0	0		0		0,284
	x	0	-31,56	8,959	-31,56	0	=	0		-0,919
		0	0	-31,56	8,959	-31,56		0		-0,545
		0	0	0	-31,56	-22,601		0		0,765

Tabla 32. Tercer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W4^2 = 344,622										
		-26,172	-31,56	0	0	0		0		1
		-31,56	-26,172	-31,56	0	0		0		-0,829
	x	0	-31,56	-26,172	-31,56	0	=	0		-0,312
		0	0	-31,56	-26,172	-31,56		0		1,088
		0	0	0	-31,56	-57,732		0		-0,590

Tabla 33. Cuarto Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W5^2 = 448,550										
		-53,099	-31,56	0	0	0		0		1
		-31,56	-53,099	-31,56	0	0		0		-1,682
	x	0	-31,56	-53,099	-31,56	0	=	0		1,831
		0	0	-31,56	-53,0993	-31,56		0		-1,398
		0	0	0	-31,56	-84,659		0		0,521

Tabla 34. Quinto Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	=	0,334 0,640 0,895 1,078

		1,173
	=	-0,895 -1,172 -0,640 0,334 1,078
	=	1,172 0,333 -1,078 -0,639 0,897
	=	-1,079 0,894 0,337 -1,174 0,636
	=	0,641 -1,078 1,173 -0,895 0,334

Tabla 35. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

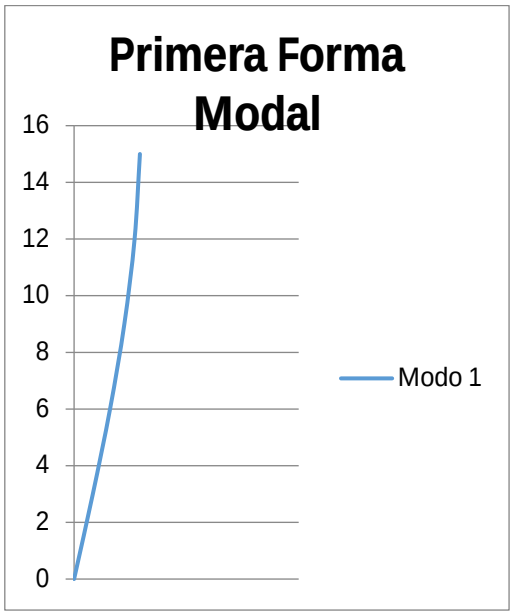

Figura 11. Primera Forma Modal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

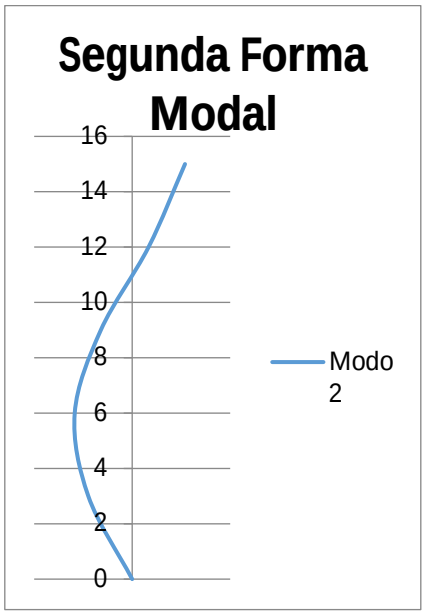

Figura 12. Segunda Forma Modal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

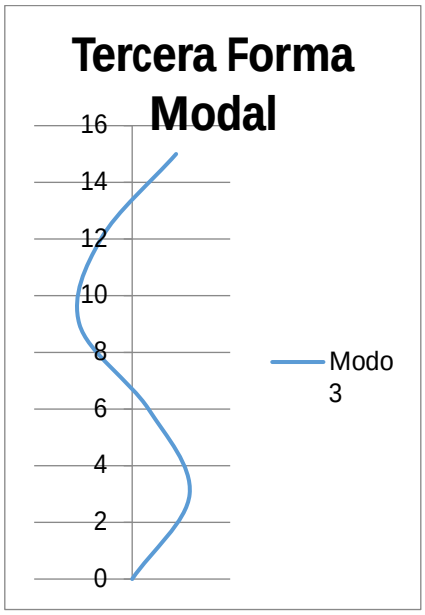

Figura 13. Tercera Forma Modal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

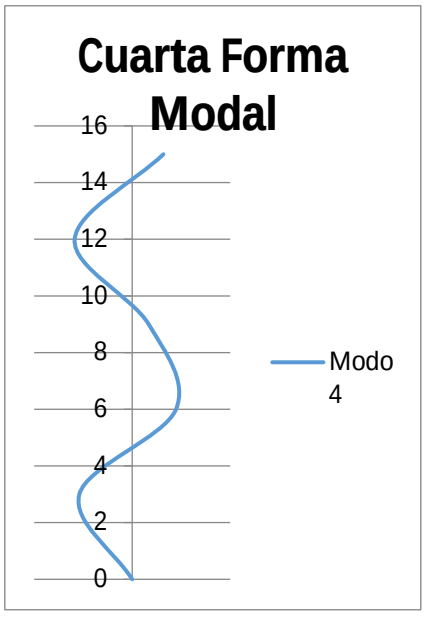

Figura 14. Cuarta Forma Modal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

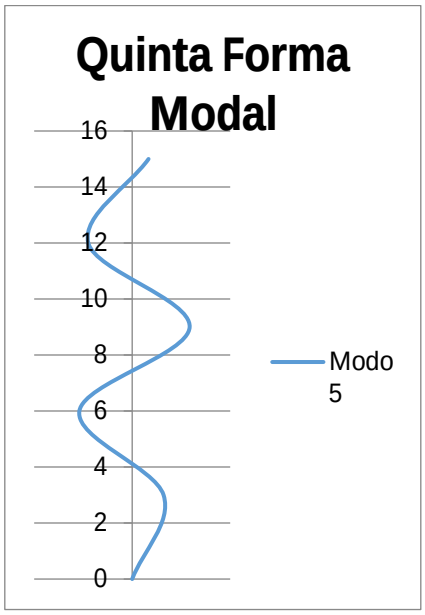

Figura 15. Quinta Forma Modal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

• Aplicando el método de los vectores de Ritz para hallar la frecuencia y modos naturales.

Matriz S
0,259
0,259
0,259
0,259
0,259

Tabla 36. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

K-1 por S	
Y1	0,0410
	0,0739
	0,0985
	0,1149
	0,1231

Tabla 37. Hallando y1 de “ky1=s”.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

((Yt*m1*y)^0,5)
0,379
0,683
0,910
1,062
1,138

Tabla 38. Primer vector de Ritz normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k-1 * (m * yn1)	
y2 =	0,03425
	0,06538
	0,09091
	0,10896
	0,11830

Tabla 39. Hallando Y2.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

a12 =	0,1012

Tabla 40. Hallando a12.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Y2 - (a12*Yn1)
-0,004134
-0,003705
-0,001204
0,001500
0,003164

Tabla 41. Ortogonalizando y2 con respecto a
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	-1,216999334
	-1,090791995
	-0,354582522
	0,441725684
	0,931530354

Tabla 42. Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	9,98	-3,09
	-3,09	91,94

Tabla 43. K´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 44. M´
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	9,98 - w^2	-3,09
	-3,09	91,94 - w^2

Tabla 45. Determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -101,936w^2 + 912,088 = 0

Tabla 46. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	9,91
w2^2 =	92,025
w1n =	3,1480
w2n =	9,5930

Tabla 47. Frecuencias.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 9,91					
	x	0,07	-3,09		1
		-3,09	88,79		0,0348

Tabla 48. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 92,025					
	x	-82,04	-3,09		-0,0376
		-3,09	-0,09		1

Tabla 49. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,3369	-1,2313
	0,6447	-1,1165
	0,8978	-0,3888
	1,0771	0,4018
	1,1700	0,8887

Tabla 50. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

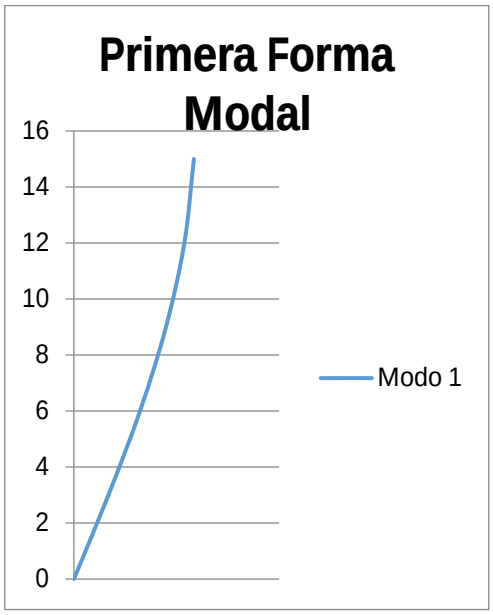

Figura 16. Primera Forma Modal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

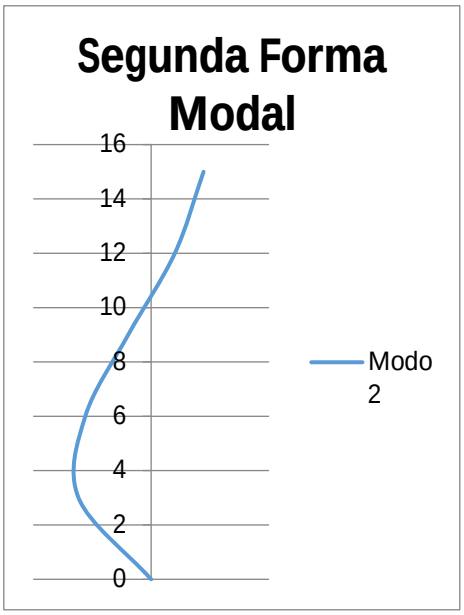

Figura 17. Segunda Forma Modal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Asignando patrones de cargas tanto rectangular, Triangular, Trapezoidal y únicamente en el techo.

(El patrón de carga rectangular ya fue seleccionado debido que la matriz S está en función de la masa y esta misma ya está cargada uniformemente).

Asignando un patrón de carga triangular:

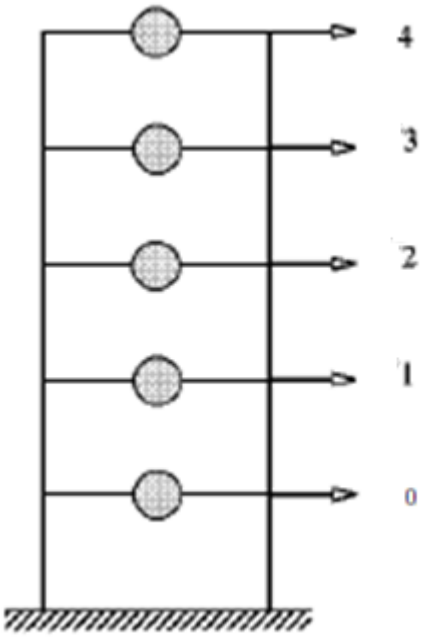

Figura 18. Patrón de carga triangular. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz s
0,000
1,000
2,000
3,000
4,000

Tabla 51. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,3018	0,9978
	0,6036	1,1413
	0,8753	0,6296
	1,0865	-0,2524
	1,2072	-1,0494

Tabla 52. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	9,95	-2,43
	-2,43	84,93

Tabla 53. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 54. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	9,95 - w^2	-2,43
	-2,43	84,93 - w^2

Tabla 55. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -94,88w^2 + 839,15 = 0

Tabla 56. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	9,87
w2^2 =	85,01
w1n =	3,1417
w2n =	9,2201

Tabla 57. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 9,91					
	x	0,08	-2,43		1
		-2,43	81,79		0,0297

Tabla 58. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 92,025					
	x	-75,06	-2,43		-0,0324
		-2,43	-0,08		1

Tabla 59. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0	0
	0,3315	0,9880
	0,6376	1,1217
	0,8940	0,6013
	1,0790	-0,2876
	1,1760	-1,0885

Tabla 60. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

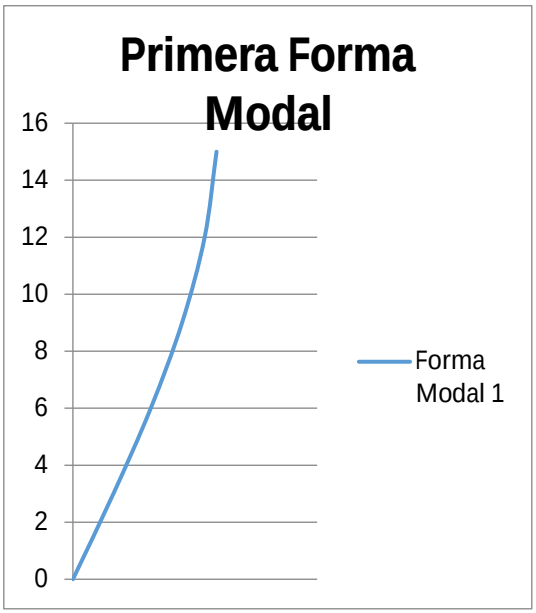

Figura 19. Primera Forma Modal. (Marco de cinco niveles – Carga Triangular)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

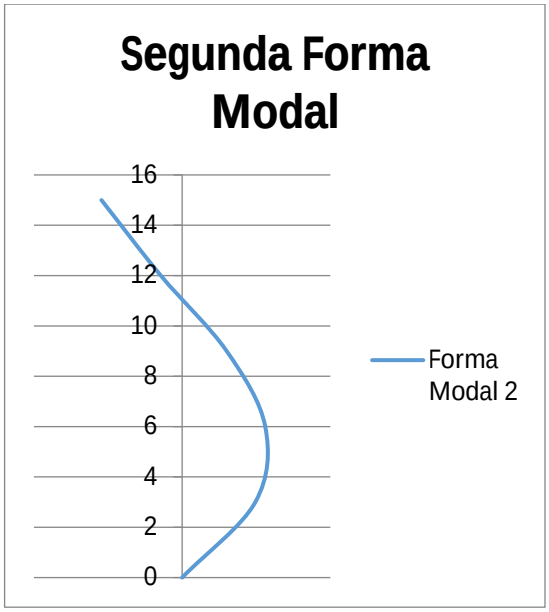

Figura 20. Segunda Forma Modal. (Marco de cinco niveles – Carga Triangular)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Asignando un patrón de carga trapezoidal:

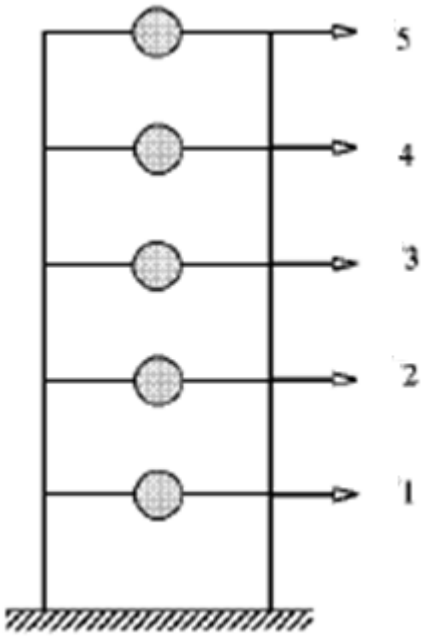

Figura 21. Patrón de carga trapezoidal. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz s
1,000
2,000
3,000
4,000
5,000

Tabla 61. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,3240	0,7549
	0,6264	1,0981
	0,8856	0,7726
	1,0800	-0,1685
	1,1880	-1,2077

Tabla 62. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	9,88	-0,98
	-0,98	87,08

Tabla 63. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 64. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	9,88 - w^2	-0,98
	-0,98	87,08 - w^2

Tabla 65. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -96,96w^2 + 859,39 = 0

Tabla 66. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	9,87
w2^2 =	87,09
w1n =	3,1417
w2n =	9,3322

Tabla 67. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 9,91					
	x	0,01	-0,98		1
		-0,98	83,94		0,0117

Tabla 68. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 92,025					
	x	-77,21	-0,98		-0,0127
		-0,98	-0,01		1

Tabla 69. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

)	
0	0
0,3329	0,7508
0,6393	1,0901
0,8947	0,7613
1,0780	-0,1823
1,1739	-1,2228

Tabla 70. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

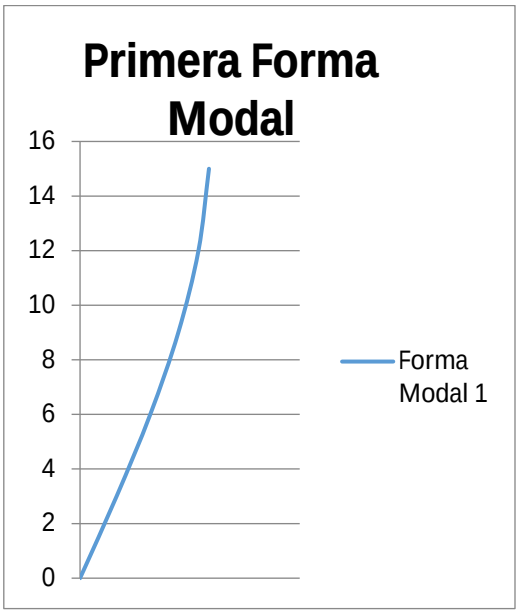

Figura 22. Primera Forma Modal. (Marco de cinco niveles – Carga Trapezoidal)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

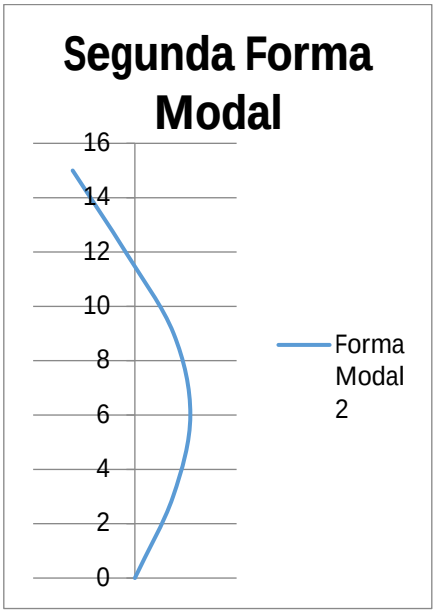

Figura 23. Segunda Forma modal. (Marco de cinco niveles – Carga Trapezoidal)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Asignando un patrón de carga unicamente en el techo:

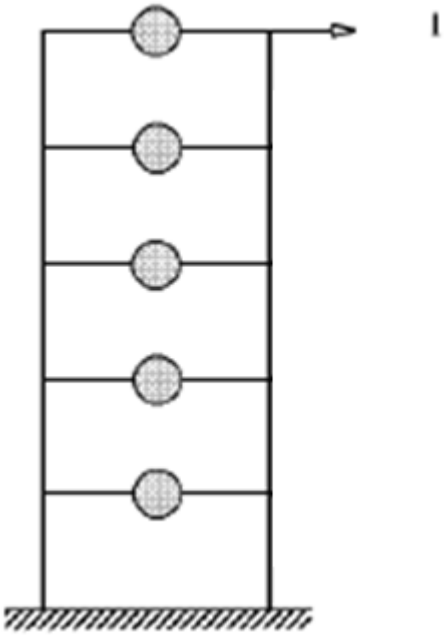

Figura 24. Patrón de carga de techo. (Marco de cinco niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz s
0,000
0,000
0,000
0,000
1,000

Tabla 71. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,2649	0,5939
	0,5298	0,9756
	0,7947	0,9332
	1,0596	0,2545
	1,3245	-1,2725

Tabla 72. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	11,07	-10,64
	-10,64	103,92

Tabla 73. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 74. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	11,07 - w^2	-10,64
	-10,64	103,92 - w^2

Tabla 75. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -114,99w^2 + 1037,18 = 0

Tabla 76. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	9,87
w2^2 =	105,12
w1n =	3,1417
w2n =	10,2528

Tabla 77. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 9,91					
	x	1,20	-10,64		1
		-10,64	100,78		0,1056

Tabla 78. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 92,025					
	x	-94,05	-10,64		-0,1131
		-10,64	-1,20		1

Tabla 79. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0	0
	0,3276	0,5639
	0,6328	0,9157
	0,8932	0,8433
	1,0865	0,1346
	1,1902	-1,4224

Tabla 80. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

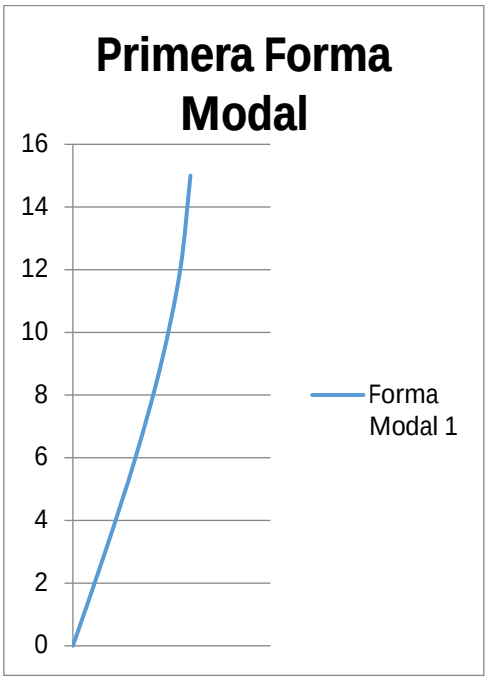

Figura 25. Primera Forma Modal. (Marco de cinco niveles – Carga de techo)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

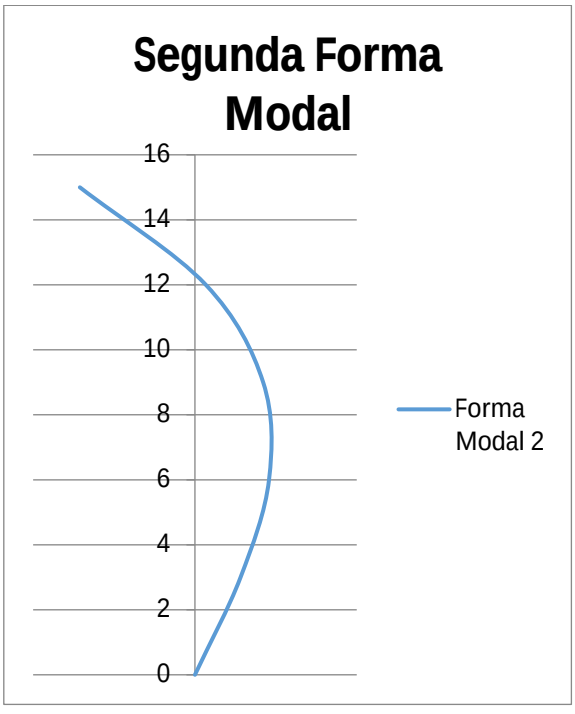

Figura 26. Segunda Forma Modal. (Marco de cinco niveles – Carga de Techo)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Marco Idealizado de seis niveles:

En la estructura siguiente se muestra un marco de seis niveles idealizado como un edificio de cortante cuyo valor de Rigidez varía por nivel al igual que la masa. Determinar las frecuencias y modos naturales del sistema mostrado, además normalice los modos de manera que Mn = 1.

Además aplicar el método de los vectores de Ritz para hallar la frecuencia y modos naturales.

Asignar patrones de cargas tanto rectangular, Triangular, Trapezoidal y únicamente en el techo.

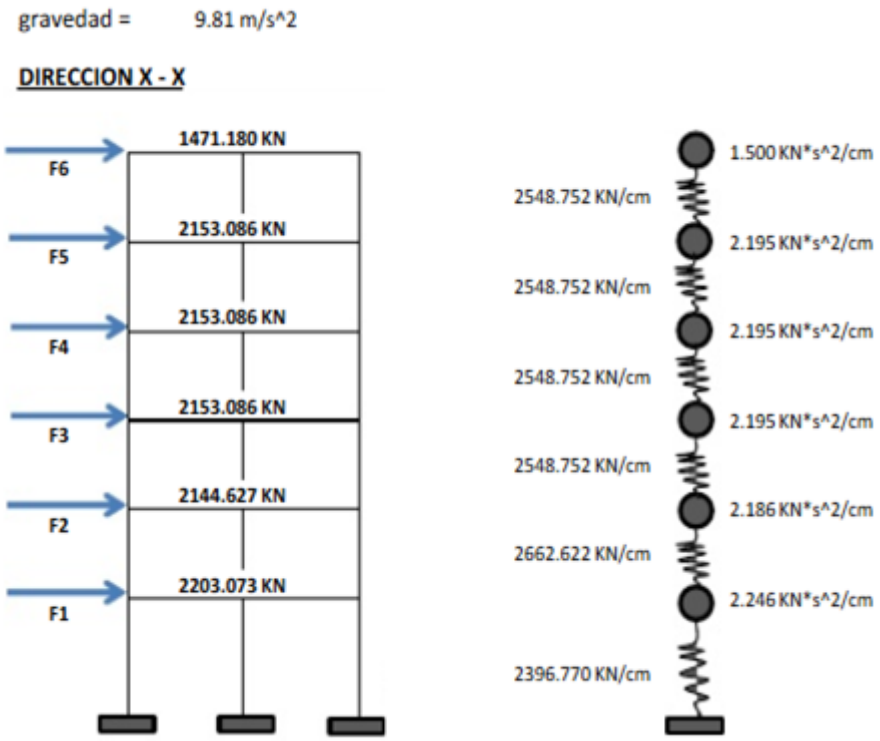

Figura 27. Marco idealizado de 6 niveles.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

h
0
2,875
5,625
8,375
11,125
13,875
16,625

Tabla 81. Altura de la estructura.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz de Rigidez						
K=	5059,392	-2662,622	0	0	0	0
	-2662,622	5211,374	-2548,752	0	0	0
	0	-2548,752	5097,504	-2548,752	0	0
	0	0	-2548,752	5097,504	-2548,752	0
	0	0	0	-2548,752	5097,504	-2548,752
	0	0	0	0	-2548,752	2548,752

Tabla 82. Matriz de Rigidez. (Marco de 6 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz de masa						
m=	2,246	0	0	0	0	0
	0	2,186	0	0	0	0
	0	0	2,195	0	0	0

	0	0	0	2,195	0	0
	0	0	0	0	2,195	0
	0	0	0	0	0	1,500

Tabla 83. Matriz de Masa. (Marco de 6 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det ((K)- W^2*m)						
Det =	5059,39 - 2,25w2	-2662,622	0	0	0	0
	-2662,622	5211,37- 2,18w2	-2548,752	0	0	0
	0	-2548,752	5097,50- 2,19 w2	-2548,752	0	0
	0	0	-2548,752	5097,50- 2,19w2	-2548,752	0
	0	0	0	-2548,752	5097,50-2,19w2	-2548,752
	0	0	0	0	-2548,752	2548,75-1,5w2

Tabla 84. Determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1	8,596	w1^2	73,891
w2	25,091	w2^2	629,558
w3	39,951	w3^2	1596,082
w4	52,511	w4^2	2757,405
w5	61,651	w5^2	3800,846
w6	66,678	w6^2	4445,956

Tabla 85. Frecuencias.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 73,891										
12	x	4893,451	-2662,622	0	0	0	0	=	0	1
		-2662,622	5049,836	-2548,752	0	0	0		0	1,838
		0	-2548,752	4935,329	-2548,752	0	0		0	2,597
		0	0	-2548,752	4935,329	-2548,752	0		0	3,190
		0	0	0	-2548,752	4935,329	-2548,752		0	3,581
		0	0	0	0	-2548,752	2437,939		0	3,743

Tabla 86. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 629,558											
22	x	3645,566	-2662,622	0	0	0	0	=	0		1
		-2662,622	3835,056	-2548,752	0	0	0		0		1,369
		0	-2548,752	3715,758	-2548,752	0	0		0		1,015
		0	0	-2548,752	3715,758	-2548,752	0		0		0,111
		0	0	0	-2548,752	3715,758	-2548,752		0		-0,853
		0	0	0	0	-2548,752	1604,620		0		-1,355

Tabla 87. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W3^2 = 1596,082											
32	x	1475,003	-2662,622	0	0	0	0	=	0		1
		-2662,622	1722,076	-2548,752	0	0	0		0		0,554
		0	-2548,752	1594,443	-2548,752	0	0		0		-0,670
		0	0	-2548,752	1594,443	-2548,752	0		0		-0,973
		0	0	0	-2548,752	1594,443	-2548,752		0		0,061
		0	0	0	0	-2548,752	155,1490		0		1,012

Tabla 88. Tercer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W4^2 = 2757,405											
	x	-1133,029	-2662,622	0	0	0	0	=	0		1
		-2662,622	-816,766	-2548,752	0	0	0		0		-0,426
		0	-2548,752	-954,413	-2548,752	0	0		0		-0,908
		0	0	-2548,752	-954,413	-2548,752	0		0		0,766
		0	0	0	-2548,752	-954,413	-2548,752		0		0,622

		0	0	0	0	-2548,752	-1586,456		0		-0,998

Tabla 89. Cuarto Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W5^2 = 3800,846										**=1**
	x	-3476,327	-2662,622	0	0	0	0	=	0		1
		-2662,622	-3097,899	-2548,752	0	0	0		0		-1,306
		0	-2548,752	-3244,543	-2548,752	0	0		0		0,542
		0	0	-2548,752	-3244,5428	-2548,752	0		0		0,615
		0	0	0	-2548,752	-3244,543	-2548,752		0		-1,326
		0	0	0	0	-2548,752	-3151,277		0		1,072

Tabla 90. Quinto Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W6^2										
	x	-4925,078	-2662,622	0	0	0	0	=	0		1
		-2662,622	-4508,2148	-2548,752	0	0	0		0		-1,850
		0	-2548,752	-4660,422	-2548,752	0	0		0		2,227
		0	0	-2548,752	-4660,422	-2548,752	0		0		-2,223
		0	0	0	-2548,752	-4660,422	-2548,752		0		1,837
		0	0	0	0	-2548,752	-4118,731		0		-1,136

Tabla 91. Sexto Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	=	0,102
		0,188
		0,265
		0,326
		0,366
		0,383

	=	0,308 0,421 0,312 0,034 -0,263 -0,417
	=	0,348 0,193 -0,233 -0,339 0,021 0,352
	=	0,377 -0,160 -0,343 0,289 0,234 -0,377
	=	0,270 -0,353 0,147 0,166 -0,358 0,290
	=	0,160 -0,295 0,355 -0,355 0,293 -0,181

Tabla 92. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

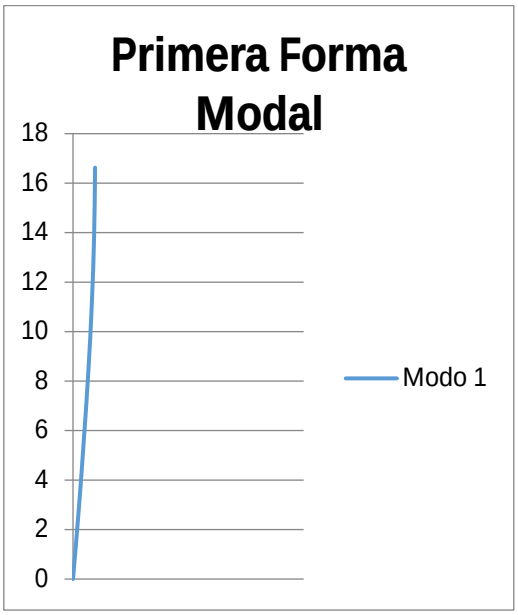

Figura 28. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

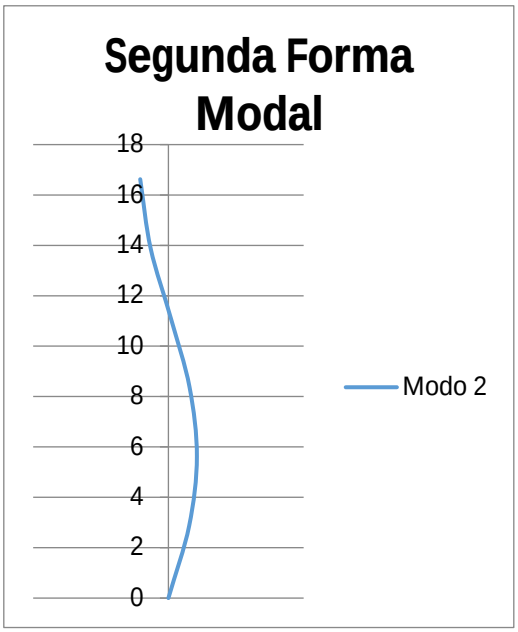

Figura 29. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

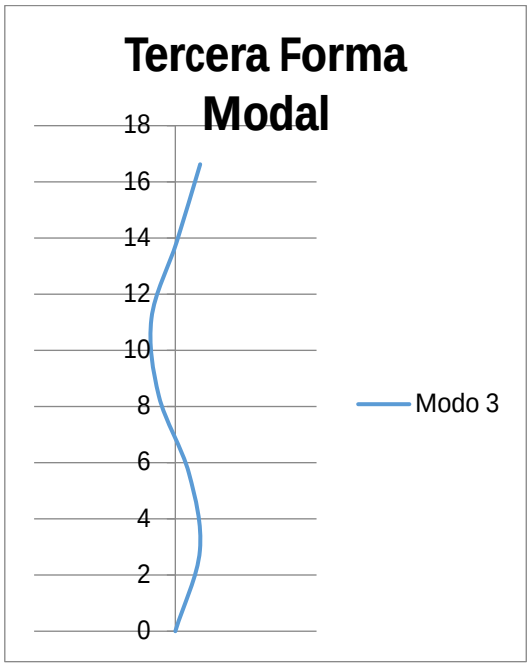

Figura 30. Tercera Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

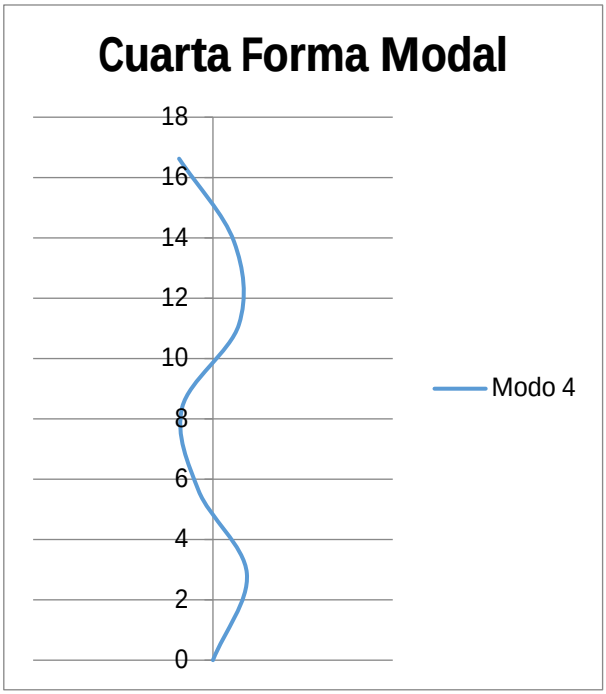

Figura 31. Cuarta Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

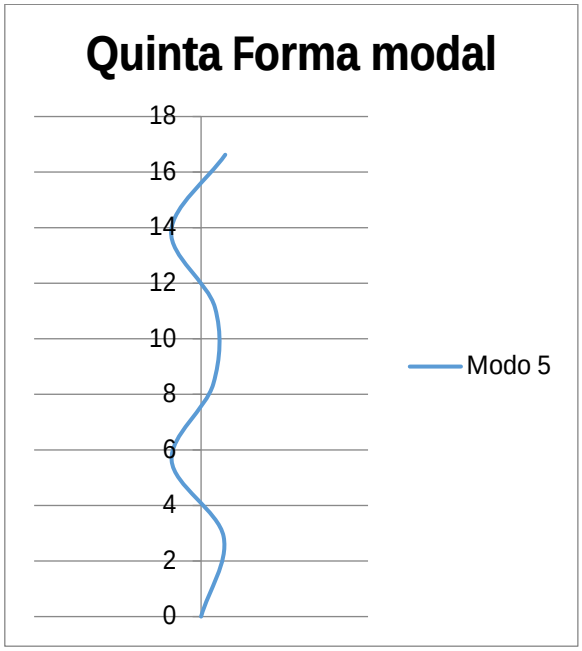

Figura 32. Quinta Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

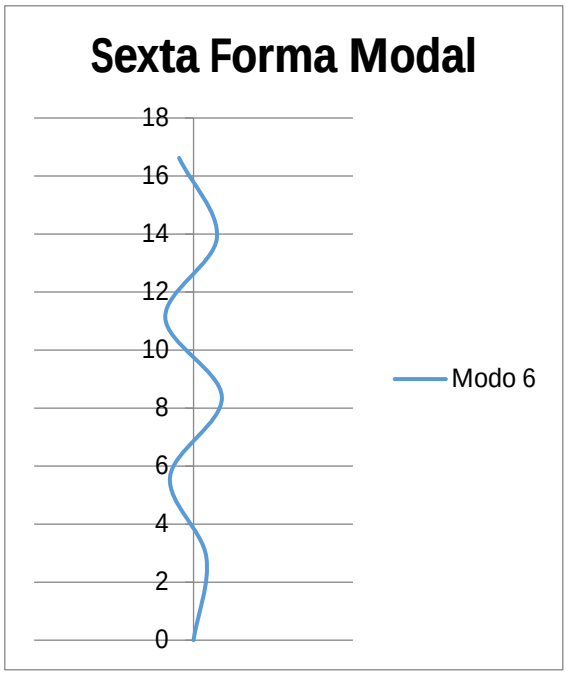

Figura 33. Sexta Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

• Aplicando el método de los vectores de Ritz para hallar la frecuencia y modos naturales.

Matriz s
2,246
2,186
2,195
2,195
2,195
1,500

Tabla 93. Distribución de fuerzas.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

K inversa por s	
Y1	0,0052
	0,0091
	0,0123
	0,0146
	0,0160
	0,0166

Tabla 94. Hallando y1 de “ky1=s”.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,116
	0,202
	0,273
	0,325
	0,357
	0,370

Tabla 95. Primer vector de Ritz normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k-1 * (m * yn1)	
y2=	0,00140
	0,00256
	0,00360
	0,00441
	0,00493
	0,00515

Tabla 96. Hallando Y2.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

a12=	0,0135

Tabla 97. Hallando a12.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Y2 - (a12*	
	-0,000174
	-0,000175
	-0,000091
	0,000018
	0,000106
	0,000146562

Tabla 98. Ortogonalizando y2 con respecto a
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	-0,379398507
	-0,380927215
	-0,197559151
	0,03876389
	0,231340605
	0,319508041

Tabla 99. Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k-1 * (m*yn2)	
y3 =	-0,00044
	-0,00051
	-0,00026
	0,00016
	0,00055
	0,00074

Tabla 100. Hallando Y3.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

a23 =	0,0016

Tabla 101. Hallando a23.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Y3 - (a23*Yn2)
0,000153
0,000082
0,000048
0,000101
0,000189
0,000240135

Tabla 102. Ortogonalizando y3 con respecto a
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

0,30010247
0,161562812
0,093908278
0,19852559
0,371014262
0,471013086

Tabla 103. Tercer vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k-1 * (m*yn3)	
y4 =	0,00133
	0,00228
	0,00312
	0,00389
	0,00449
	0,00477

Tabla 104. Hallando Y4.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

a34 =	0,0111

Tabla 105. Hallando a34.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Y4 - (a34 * Yn3)
-0,001989
0,000489
0,002085
0,001696
0,000384
-0,00044453

Tabla 106. Ortogonalizando y4 con respecto a
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

-0,390918501
0,096035455
0,409919514
0,333333689
0,075569061

	-0,08738197

Tabla 107.Cuarto vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k-1 * (m*yn4)	
y5 =	0,00042
	0,00112
	0,00177
	0,00208
	0,00209
	0,00204

Tabla 108. Hallando Y5.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

a45 =	0,0031

Tabla 109. Hallando a45.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Y5 - (a45 * Yn4)
0,001614
0,000827
0,000519
0,001054
0,001858
0,002305438

Tabla 110. Ortogonalizando y5 con respecto a
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

0,317092262
0,162393124
0,101867012
0,207027629
0,364857735
0,452838054

Tabla 111.Quinto vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k-1 * (m*yn5)	
y6 =	0,00135
	0,00229
	0,00314
	0,00389
	0,00448
	0,00474

Tabla 112. Hallando Y6.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

a56 =	0,0110

Tabla 113. Hallando a56.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Y6 - (a56 * Yn5)
-0,002157
0,000496
0,002011
0,001608
0,000445
-0,00026011

Tabla 114. Ortogonalizando y6 con respecto a
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

-0,422453733
0,097046137
0,393795792
0,314929261
0,087205759
-0,050942056

Tabla 115. Sexto vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	74,78	-23,33
	-23,33	687,38

Tabla 116. K´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 117. M´
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	74,78-w^2	-23,33
	-23,33	687,78-w^2

Tabla 118. Determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -762,16w^2 + 50857,99 = 0

Tabla 119. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	73,89
w2^2 =	688,27
w1n =	8,5959
w2n =	26,2349

Tabla 120. Frecuencias.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 73,89	

	x	0,89	-23,33		1
		-23,33	678,79		0,0344

Tabla 121. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 688,27					
	x	-613,49	-23,33		-0,0380
		-23,33	-0,89		1

Tabla 122. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,1034	-0,3838
	0,1893	-0,3886
	0,2663	-0,2079
	0,3260	0,0264
	0,3649	0,2178
	0,3810	0,3054

Tabla 123. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

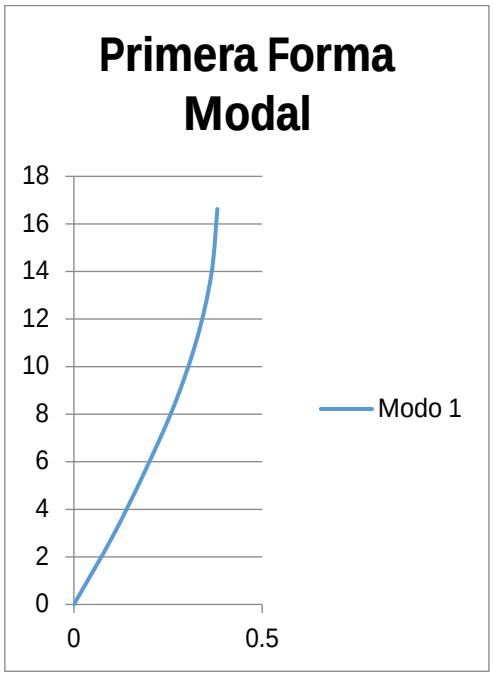

Figura 34. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

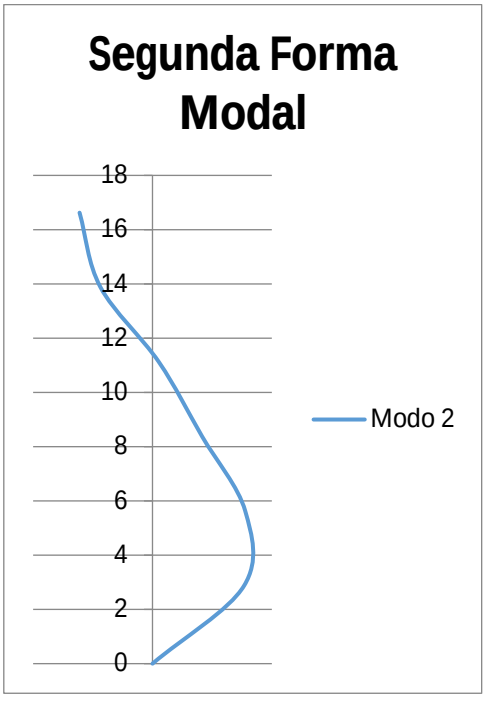

Figura 35. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Asignando patrones de cargas tanto rectangular, Triangular, Trapezoidal y únicamente en el techo.

Asignando un patrón de carga rectangular:

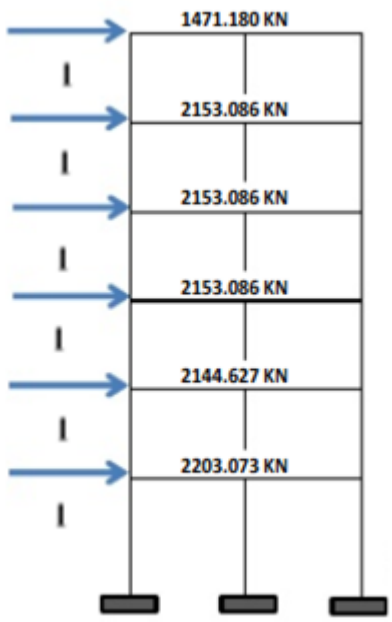

Figura 36. Patrón de carga rectangular. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz s
1,000
1,000
1,000
1,000
1,000
1,000

Tabla 124. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,1135	-0,4188	0,2886513	-0,148255	0,3222948	-0,1752

	0,1987	-0,3945	0,0899021	0,1612846	0,1108398	0,145817
	0,2699	-0,1596	-0,043458	0,3946683	-0,025802	0,3788373
	0,3233	0,0999	0,0306441	0,4162609	0,0336469	0,411608
	0,3589	0,2469	0,2596047	0,2712607	0,2331203	0,2944027
	0,37667331	0,1901219	0,6538262	-0,082105	0,6412385	-0,070815

Tabla 125. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	74,43	-19,78
	-19,78	797,58

Tabla 126. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 127. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	74,43-w^2	-19,78
	-19,78	797,58-w^2

Tabla 128. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -872,01w^2 + 58972,63 = 0

Tabla 129. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	73,89
w2^2 =	798,12
w1n =	8,5959
w2n =	28,2510

Tabla 130. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 73,89					
	x	0,54	-19,78		1
		-19,78	788,99		0,0251

Tabla 131. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 688,27					
	x	-723,69	-19,78		-0,0273
		-19,78	-0,54		1

Tabla 132. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0	0
	0,1030	-0,4219
	0,1888	-0,3999
	0,2659	-0,1670
	0,3258	0,0910
	0,3651	0,2371
	0,3814	0,1798

Tabla 133. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

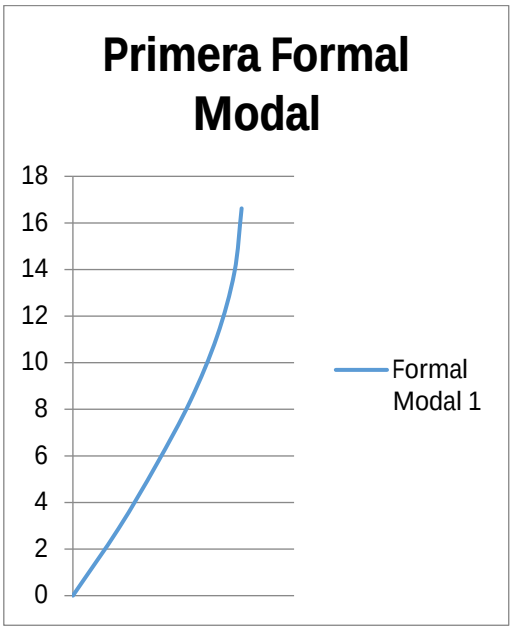

Figura 37. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles - Cargar Rectangular)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

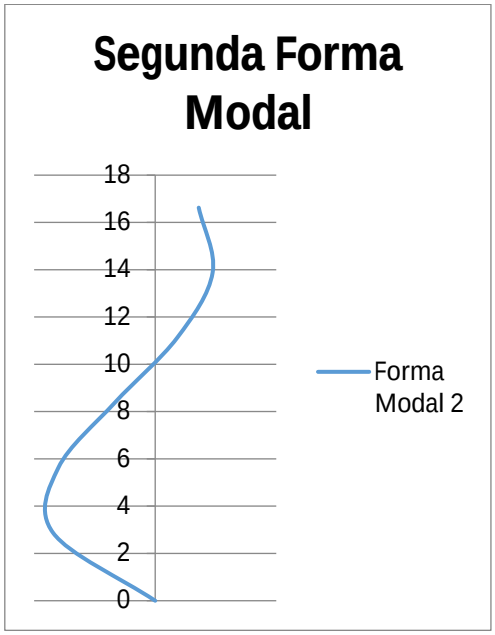

Figura 38. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles - Carga Rectangular)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Asignando un patrón de carga triangular:

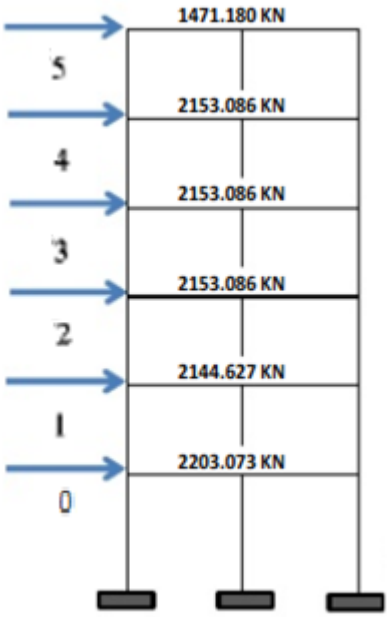

Figura 39. Patrón de carga triangular. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz s
0,000
1,000
2,000
3,000
4,000
5,000

Tabla 134. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,0912	0,2608	0,1154529	-0,005524	0,097206	0,0370141
	0,1732	0,3429	0,2555096	-0,122825	0,2430256	-0,093594
	0,2532	0,2871	0,2700344	0,0397361	0,2727426	0,032418
	0,3218	0,1050	0,194638	0,3788176	0,2049815	0,35215
	0,3732	-0,1673	0,2133266	0,4440497	0,2062151	0,4607841
	0,401781355	-0,464496	0,5682594	-0,379303	0,5778996	-0,397779

Tabla 135. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	74,96	-25,63
	-25,63	687,55

Tabla 136. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 137. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	74,96-w^2	-25,63
	-25,63	687,55-w^2

Tabla 138. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -762,51w^2 + 50881,85 = 0

Tabla 139. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	73,89
w2^2 =	688,62
w1n =	8,5959
w2n =	26,2416

Tabla 140. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 73,89					
	x	1,07	-25,63		1

		-25,63	678,96		0,0377

Tabla 141. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 688,27					
	x	-613,66	-25,63		-0,0418
		-25,63	-1,07		1

Tabla 142. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0	0
	0,1010	0,2570
	0,1861	0,3357
	0,2640	0,2765
	0,3257	0,0916
	0,3669	-0,1829
	0,3842	-0,4813

Tabla 143. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

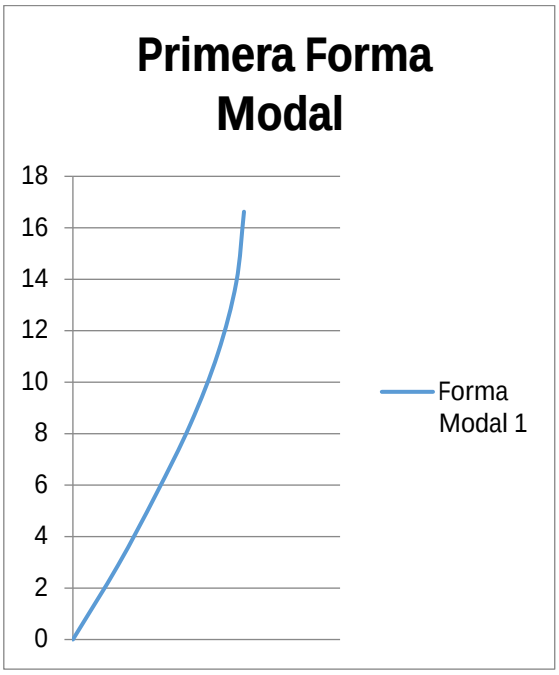

Figura 40. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles - Carga Triangular)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

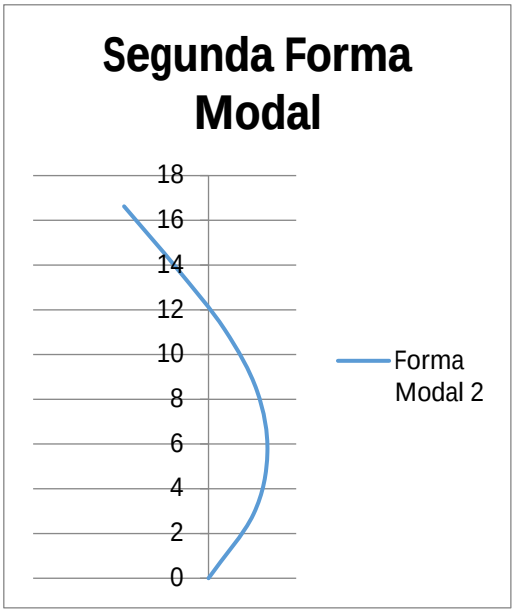

Figura 41. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles carga triangular)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Asignando un patrón de carga trapezoidal:

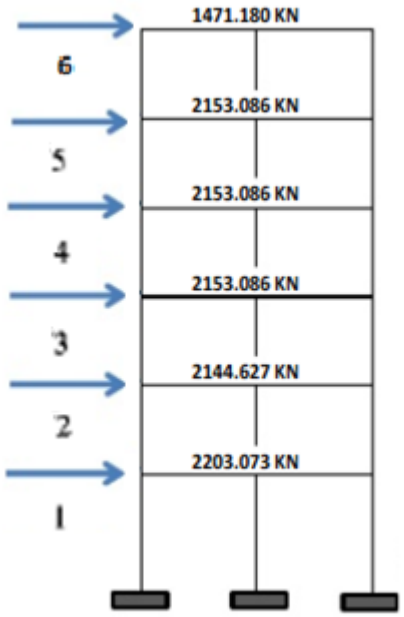

Figura 42. Patrón de carga trapezoidal. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz s
1,000
2,000
3,000
4,000
5,000
6,000

Tabla 144. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,0966	0,2039	0,23179	-0,076568	0,2078337	-0,053717
	0,1795	0,3068	0,3248683	-0,048672	0,3006498	-0,026251
	0,2574	0,2975	0,2229975	0,1562599	0,2148245	0,1620768
	0,3223	0,1424	0,0350469	0,4261388	0,0383559	0,4207834
	0,3699	-0,1502	0,0331537	0,4868738	0,0304673	0,4906044
	0,395844649	-0,524603	0,5969273	-0,078486	0,6319087	-0,107973

Tabla 145. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	74,35	-17,86
	-17,86	764,79

Tabla 146. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 147. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	74,35-w^2	-17,86
	-17,86	764,79-w^2

Tabla 148. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -839,14w^2 + 56543,16 = 0

Tabla 149. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	73,89
w2^2 =	765,25
w1n =	8,5959
w2n =	27,6632

Tabla 150. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 73,89					
	x	0,46	-17,86		1

		-17,86	756,19		0,0236

Tabla 151. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 688,27					
	x	-690,90	-17,86		-0,0258
		-17,86	-0,46		1

Tabla 152. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0	0
	0,1015	0,2014
	0,1867	0,3021
	0,2644	0,2908
	0,3256	0,1340
	0,3663	-0,1597
	0,3835	-0,5348

Tabla 153. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

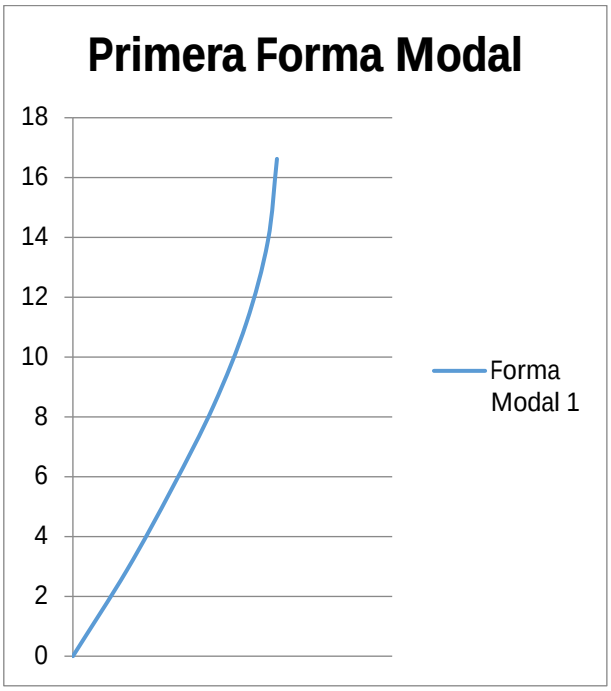

Figura 43. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles carga trapezoidal)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

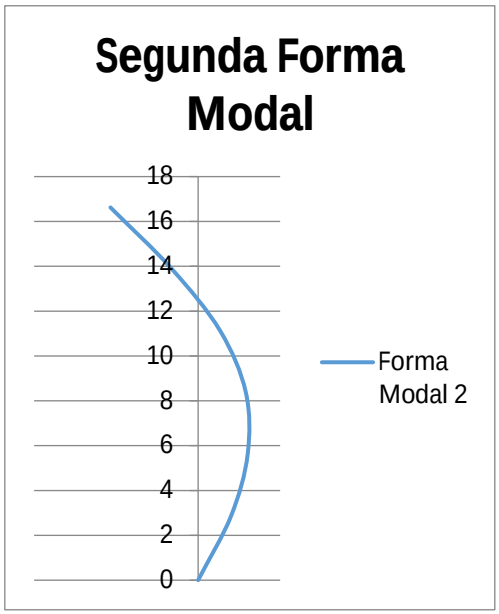

Figura 44. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles carga trapezoidal)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Asignando un patrón de carga unicamente en el techo:

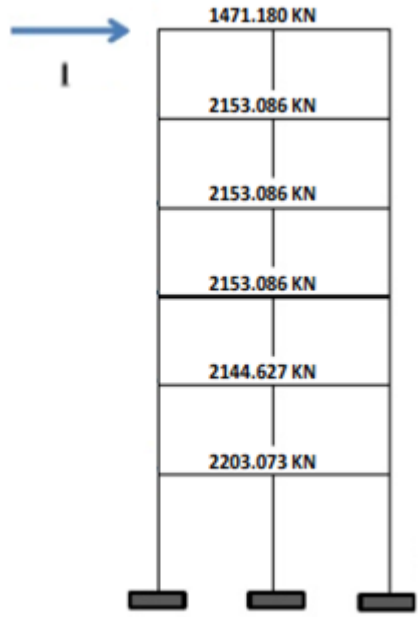

Figura 45. Patrón de carga de techo. (Marco de seis niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Matriz s
0,000
0,000
0,000
0,000
0,000
1,000

Tabla 154. Distribución de fuerzas.

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0,0800	0,1714	0,145997	-0,121148	0,1294569	-0,067899
	0,1520	0,2813	0,2299618	-0,104396	0,2180013	-0,065655
	0,2273	0,3104	0,2500131	0,0866183	0,258004	0,0603165
	0,3025	0,2109	0,228413	0,3590264	0,2418484	0,3126092
	0,3777	-0,0597	0,2614256	0,3950396	0,2465959	0,4400254
	0,452980099	-0,544162	0,5384679	-0,448251	0,5481047	-0,471074

Tabla 155. Primer y Segundo vector de Ritz Normalizado.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

k´=	86,86	-104,35
	-104,35	914,81

Tabla 156. Obteniendo k´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

m´=	1,0	0,0
	0,0	1,0

Tabla 157. Obteniendo m´.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Det (K-W^2*m) = 0		
Det =	86,86-w^2	-104,35
	-104,35	914,81-w^2

Tabla 158. Determínate.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Determinante
w^4 -1001,67w^2 + 68571,47 = 0

Tabla 159. Ecuación de la determinante.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

w1^2 =	73,91
w2^2 =	927,76
w1n =	8,5971
w2n =	30,4592

Tabla 160. Frecuencias naturales.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W1^2 = 73,89					
	x	12,95	-104,35		1
		-104,35	906,22		0,1151

Tabla 161. Primer Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

W2^2 = 688,27					
	x	-840,90	-104,35		-0,1241
		-104,35	-12,95		1

Tabla 162. Segundo Modo.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	0	0
	0,0997	0,1614
	0,1844	0,2624
	0,2630	0,2822
	0,3268	0,1734
	0,3709	-0,1066
	0,3903	-0,6004

Tabla 163. Normalizando los Modos.
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

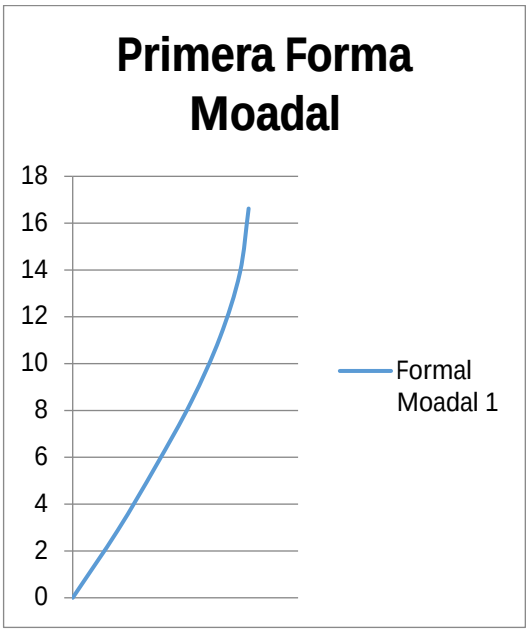

Figura 46. Primera Forma Modal. (Marco de seis niveles - Carga de Techo)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

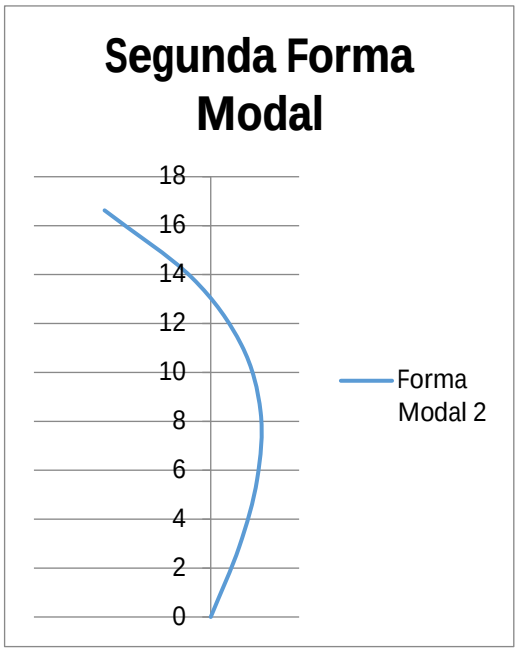

Figura 47. Segunda Forma Modal. (Marco de seis niveles - Carga de Techo)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

4.4 Comparando el método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados.

4.4.1 Marco de dos niveles idealizado.

Marco de dos niveles idealizado.								
	Frecuencia		Modos					% ERROR DE LAS FORMAS
	Auto Valores	Ritz	Auto valores		Ritz			
			Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2	H	
			0	0	0	0	0	
Piso 1	6,8029	6,8055	0,8024	-1,1321	0,8652	-1,1387	2	2,17138E-05
Piso 2	13,6305	13,6108	1,6037	1,1386	1,6103	1,1387	4	

Tabla 164. Cuadro Comparativo. (Marco de 2 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

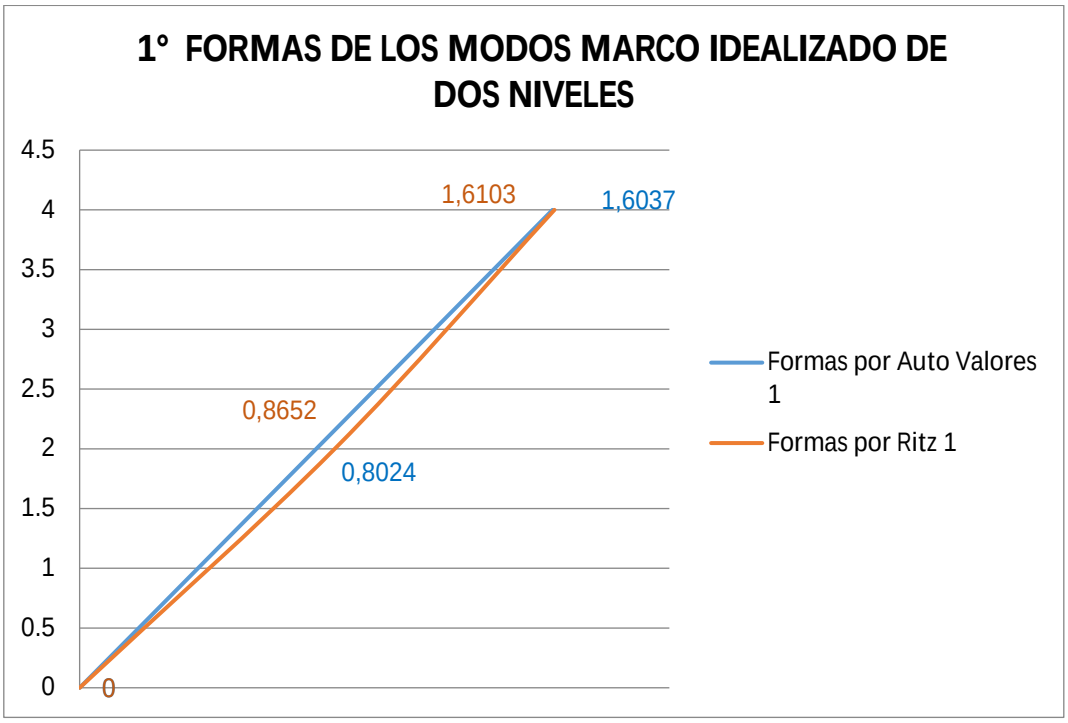

Figura 48. Gráfica comparativa de la Primera Forma Modal. (Marco de 2 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

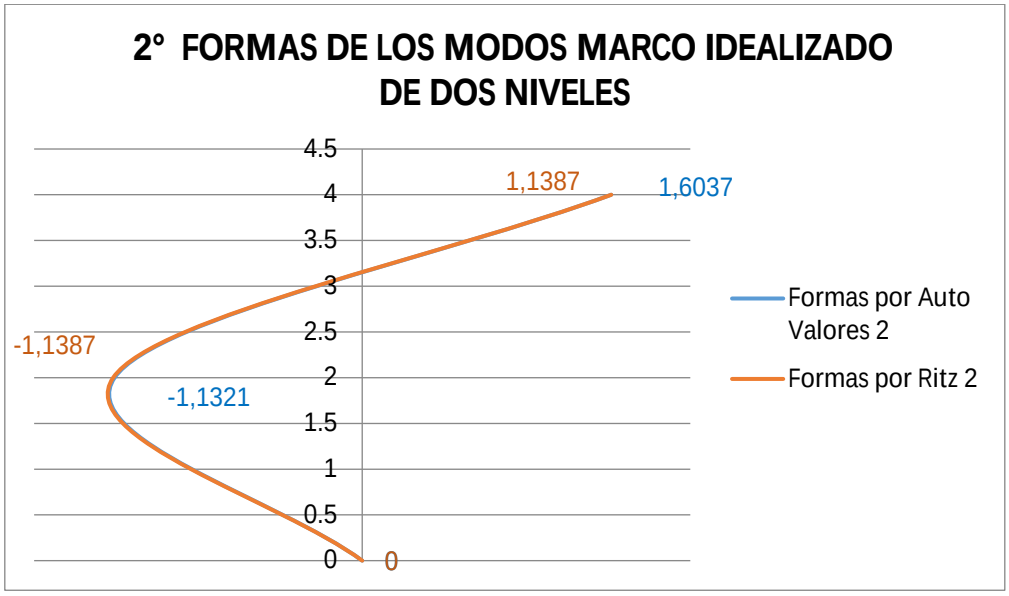

Figura 49. Gráfica comparativa de la Segunda Forma Modal. (Marco de 2 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	Frecuencia		COMPARACION DE APROXIMACIONES Y RESULTADOS EXACTOS	
	Auto Valores	Ritz		
1	6,8029	6,8055	FRECUENCIA 1 (%) DE ERROR	FRECUENCIA 2(%) DE ERROR
2	13,6305	13,6108	0,038218995	0,144528814

Tabla 165. Porcentaje de error de las frecuencias. (Marco de 2 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

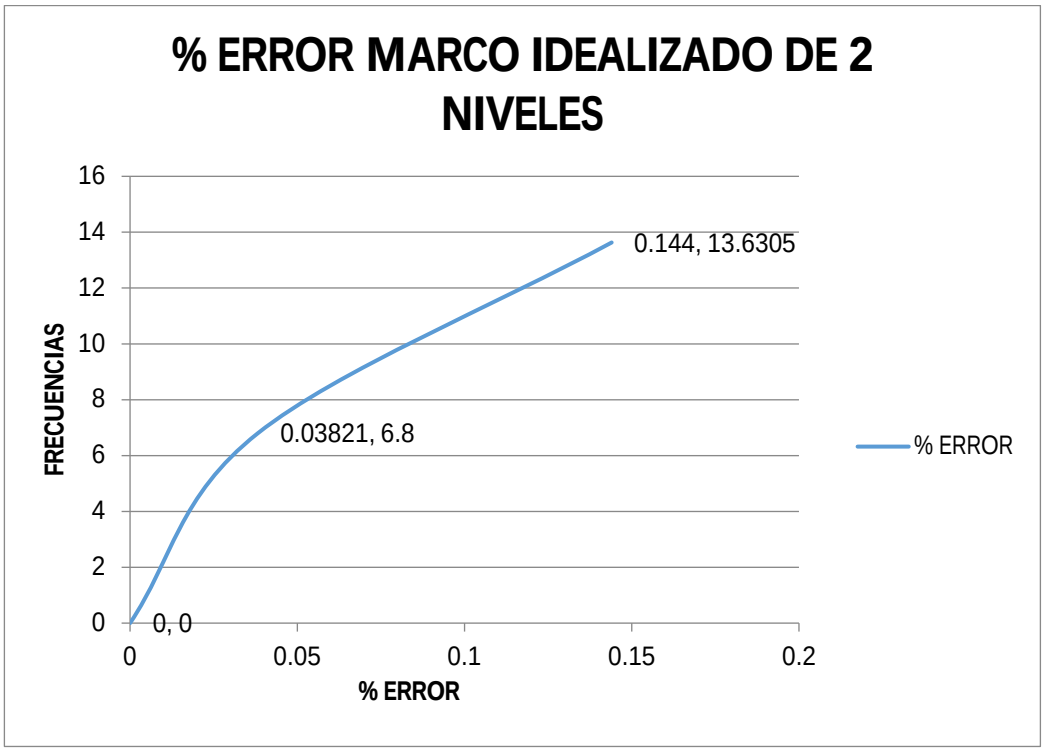

Figura 50. Gráfica del % de error. (Marco de 2 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Podemos observar para un marco idealizado de dos niveles, el cual el cálculo por Auto Valores se determina relativamente fácil y obtenemos a su vez valores reales de frecuencias y sus Formas Modales de la estructura exactos y en el cálculo de los vectores de Ritz como se ha mencionado a lo largo de esta tesis que es no más que un procedimiento de aproximación muy eficaz para el cálculo de frecuencias y Formas.

Al comparar estos resultados podemos observar que los resultados obtenidos por ambos métodos son relativamente los mismo debido a la facilidad de cálculo de ambas, los cuales es recomendable aplicar el método de Auto Valores ya que a menor niveles más sencillo es y los resultados son más exactos aunque por el método de Ritz es sencillo los cálculos y más rápido su obtención.

Además el % de error entre las frecuencias está por debajo del 1 % lo que significa la exactitud en la obtención de las frecuencias por el método de Ritz;

también en el cálculo del porcentaje de error de sus frecuencias observamos un error del 0 % lo que indica la perfecta y totalidad de seguridad al aplicar este método.

4.4.2 Marco de cinco niveles idealizado

Marco de cinco niveles idealizado											
	Frecuencia		Modos								% ERROR DE LAS FORMAS
	Auto Valores	Ritz	Auto valores					Ritz			
			Forma 1	Forma 2	Forma 3	Forma 4	Forma 5	Forma 1	Forma 2	H	
			0	0	0	0	0	0	0	0	
Piso 1	3,1415	3,148	0,3338	-0,8953	1,1725	-1,0786	0,6405	0,3369	-1,2313	3	
Piso 2	9,171	9,593	0,6405	-1,1725	0,3328	0,8944	-1,0777	0,6447	-1,1165	6	
Piso 3	14,458		0,8953	-0,64	-1,078	0,3369	1,1726	0,8978	-0,3888	9	0,151051423
Piso 4	18,564		1,0776	0,3344	-0,6389	-1,1737	-0,8953	1,0771	0,4018	12	
Piso 5	21,179		1,1726	1,0779	0,8966	0,6365	0,3337	1,17	0,8887	15	

Tabla 166. Cuadro Comparativo. (Marco de 5 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

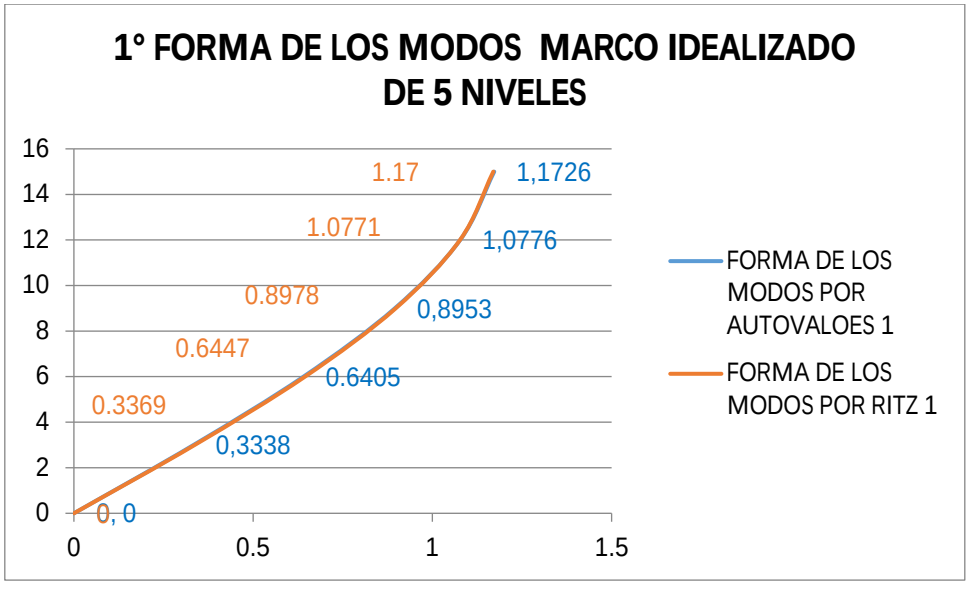

Figura 51. Gráfica comparativa de la Primera Forma Modal. (Marco de 5 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

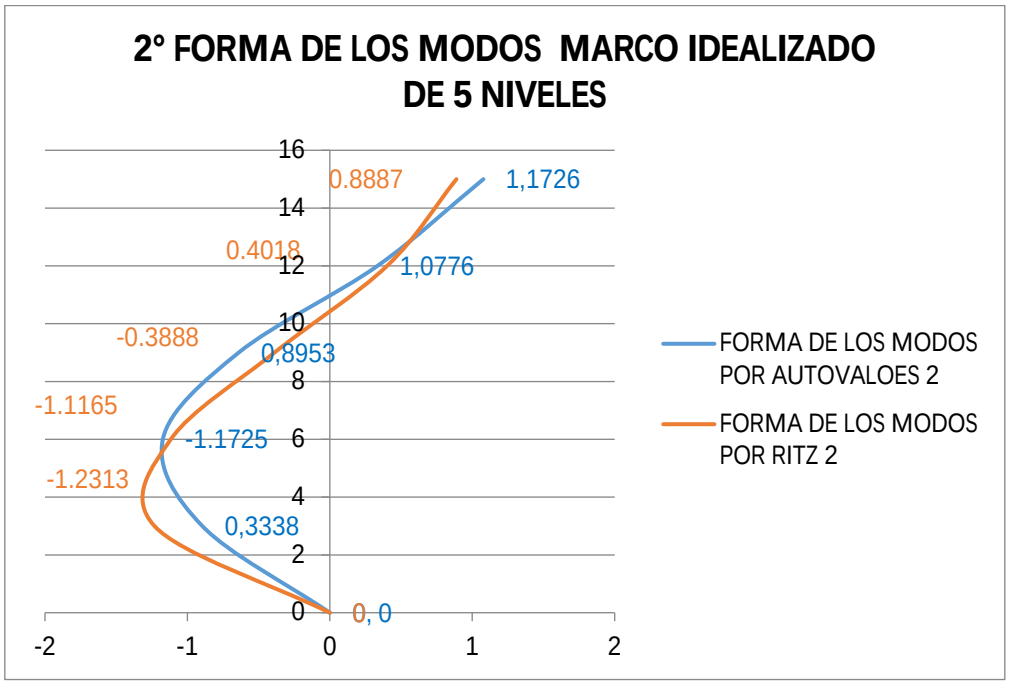

Figura 52. Gráfica comparativa de la Segunda Forma Modal. (Marco de 5 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	Frecuencia		COMPARACION DE APROXIMACIONES Y RESULTADOS EXACTOS	
	Auto Valores	Ritz		
1	3,1415	3,148	FRECUENCIA 1 (%) DE ERROR	FRECUENCIA 2(%) DE ERROR
2	9,171	9,593	0,206907528	4,601461127
3	14,458			
4	18,564			
5	21,179			

Tabla 167. Porcentaje de error de las frecuencias. (Marco de 5 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

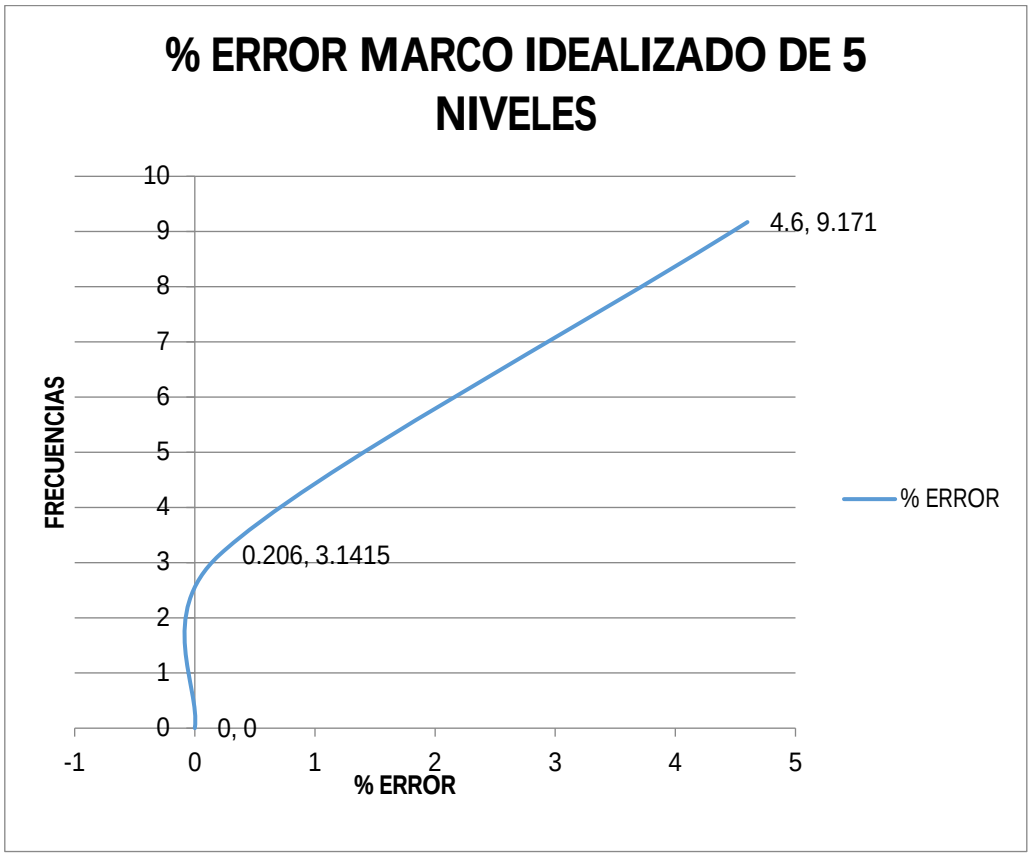

Figura 53. Gráfica del % de error. (Marco de 5 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	Marco de cinco niveles idealizado											
	Ritz											
	Frecuencias				Formas Modales							
	Patrones de cargas											
	Rectangular	Triangular	Trapezoidal	Techo	Rectangular		Triangular		Trapezoidal		Techo	
					Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piso 1	3,1480	3,1417	3,1417	3,1417	0,3369	-1,2313	0,3315	0,9880	0,3329	0,7508	0,3276	0,5639
Piso 2	9,5930	9,2201	9,3322	10,2528	0,6447	-1,1165	0,6376	1,1217	0,6393	1,0901	0,6328	0,9157
Piso 3					0,8978	-0,3888	0,8940	0,6013	0,8947	0,7613	0,8932	0,8433
Piso 4					1,0771	0,4018	1,0790	-0,2876	1,0780	-0,1823	1,0865	0,1346
Piso 5					1,1700	0,8887	1,1760	-1,0885	1,1739	-1,2228	1,1902	-1,4224

Tabla 168. Cuadro Comparativo de patrones de cargas. (Marco de 5 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

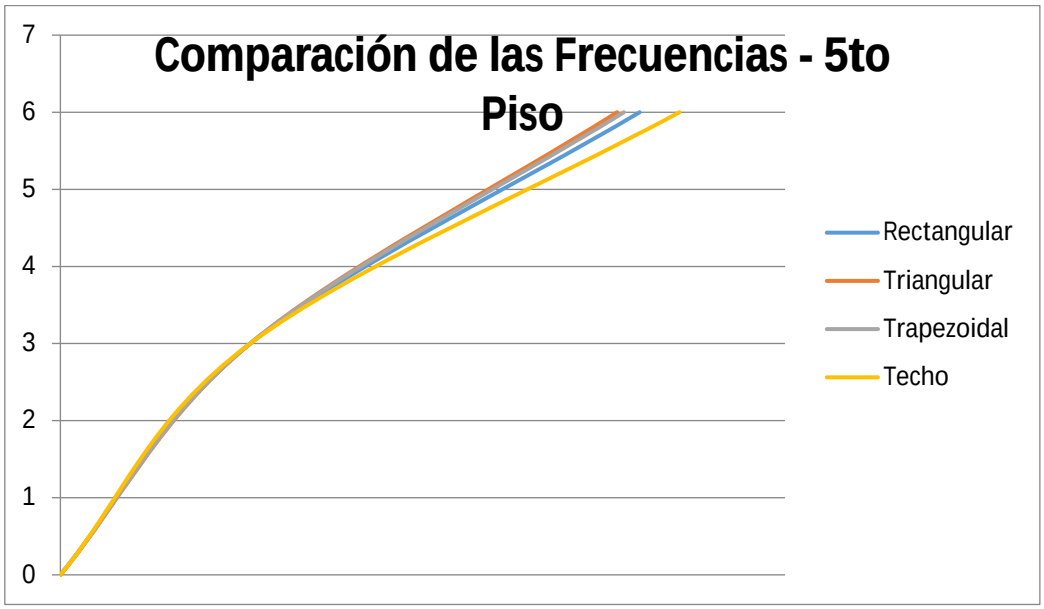

Figura 54. Gráfica comparativa de las frecuencias con diferentes patrones de cargas. (Marco de 5 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

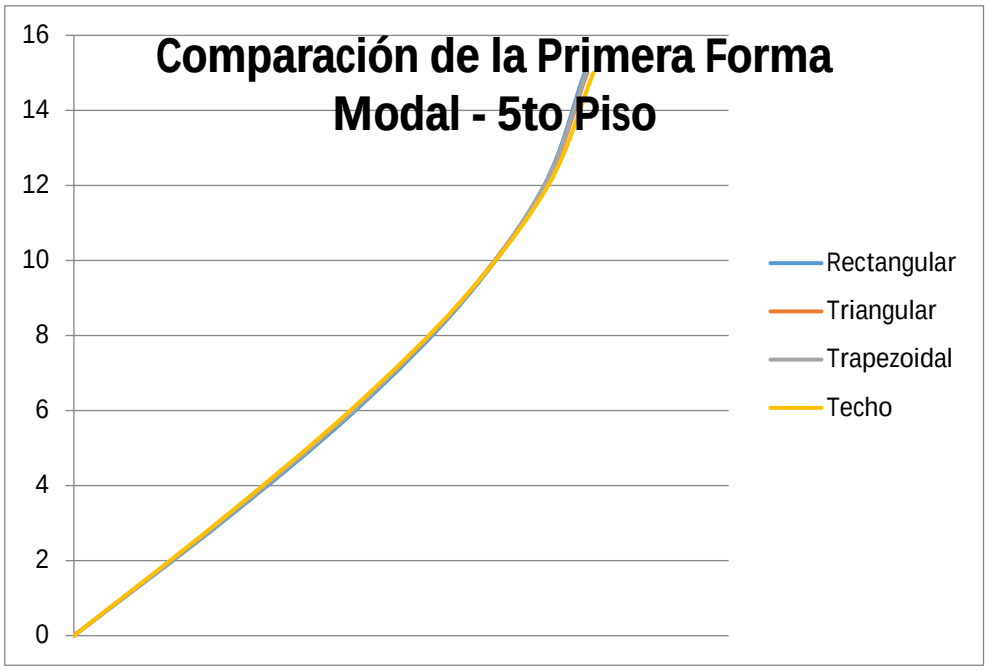

Figura 55. Gráfica comparativa de la Primera Forma Modal con diferentes patrones de cargas. (Marco de 5 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

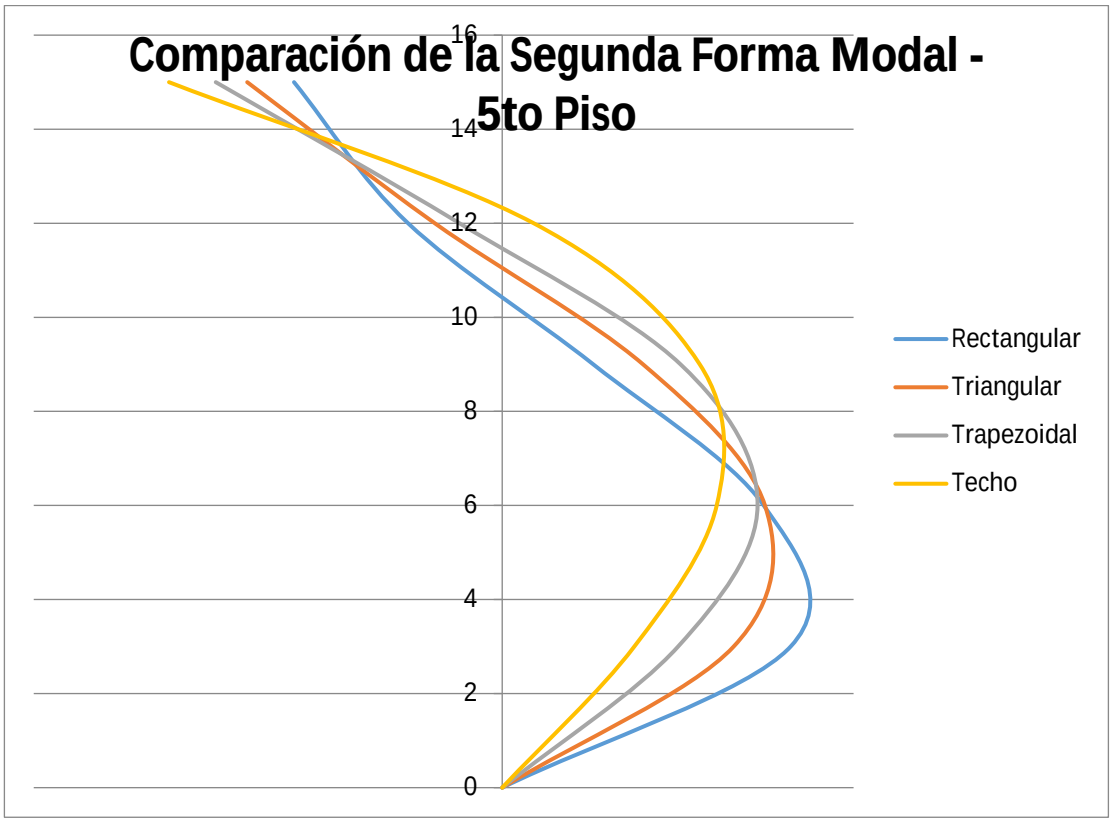

Figura 56. Gráfica comparativa de la Segunda Forma Modal con diferentes patrones de cargas. (Marco de 5 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

En este ejercicio de un marco de 5 niveles ya la obtención de la frecuencia y los modos no son tan fáciles como en el ejercicio anterior debido a que entre más niveles este método requiere de muchos más calculo computacional el cual puede llevar mucho tiempo y conocimiento básico de ecuaciones diferenciales y matriciales tanto para hallar la determinantes de la matriz 5x5 como para hallar los modos de la estructura, el procedimiento de Ritz es idéntico y los valores obtenidos son técnicamente los mismo y sin contar que el tiempo y esfuerzo empleado en este método es mucho más beneficio y sencillo para quien realice estos cálculos.

El primer modo obtenido varían por pequeñas decimas lo que lo convierte en un método factible y confiable a la hora de tomar los valores y en el segundo modo igualmente sucede lo mismo son valores aceptados que se puedan utilizar.

El porcentaje de error varia un poco más que el marco anteriormente calculado pero incluso la diferencia entre sus frecuencias son muy pocas

Realizando el estudio aplicando por diferentes patrones de cargas “S” podemos observar que los valores de las frecuencias son muy parecidos debido aunque se esté trabajando directamente con un patrón de carga diferente, las frecuencias como es bien sabido está relacionado directamente con la masa y la rigidez de la estructura y esta no cambia aunque se esté trabajando con un patrón de carga diferente y en las formas modales no hay variación significativa para la primera forma modal, ya que, el efecto de corrección estática está contenido en el primer vector de Ritz porque se obtiene de los desplazamientos estáticos debido a las fuerzas aplicadas, pero ya obtenido los valores de la segunda forma modal podemos observar que los demás patrones de cargas varían solo un poco. Esto es debido a que al tener un patrón de carga uniforme estos desplazamientos convergen más rápido que los cortantes, además los resultados de las aproximaciones son generalmente más precisos para los modos inferiores y gradualmente se deterioran para los modos superiores.

4.4.3 Marco de seis niveles idealizado

Marco de seis niveles idealizado												
	Frecuencia		Modos									% ERROR DE LAS FORMAS
	Auto Valores	Ritz	Auto valores						Ritz			
			Forma 1	Forma 2	Forma 3	Forma 4	Forma 5	Forma 6	Forma 1	Forma2	H	
			0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Piso 1	8,596	3,148	0,1022	0,3076	0,3479	0,3771	0,2703	0,1596	0,1034	0,3838	2,875	
Piso 2	25,0912	9,593	0,1879	0,4212	0,1927	-0,1605	-0,3529	-0,2952	0,1893	0,3886	5,625	
Piso 3	39,951		0,2654	0,3124	-0,2332	-0,3425	0,1466	0,3555	0,2663	0,2079	8,375	1,61757092
Piso 4	52,511		0,3261	0,0342	-0,3386	0,2887	0,1663	-0,3547	0,326	-0,0264	11,125	
Piso 5	61,651		0,3661	-0,2625	0,0214	0,2344	-0,3583	0,2932	0,3649	-0,2178	13,875	
Piso 6	66,678		0,3827	-0,4169	0,352	-0,3765	0,2898	-0,1813	0,381	-0,3054	16,525	

Tabla 169. Cuadro Comparativo. (Marco de 6 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

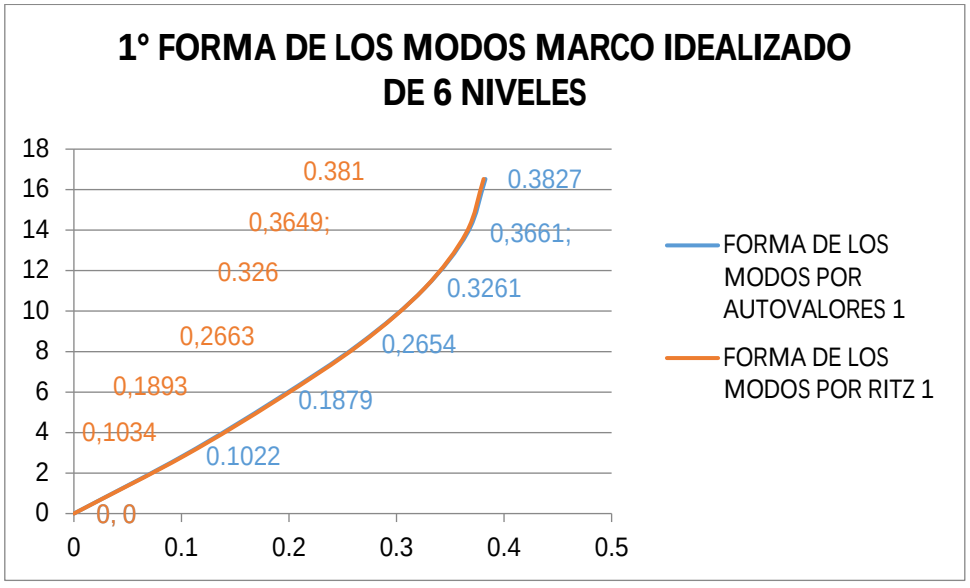

Figura 57. Gráfica comparativa de la Primera Forma Modal. (Marco de 6 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

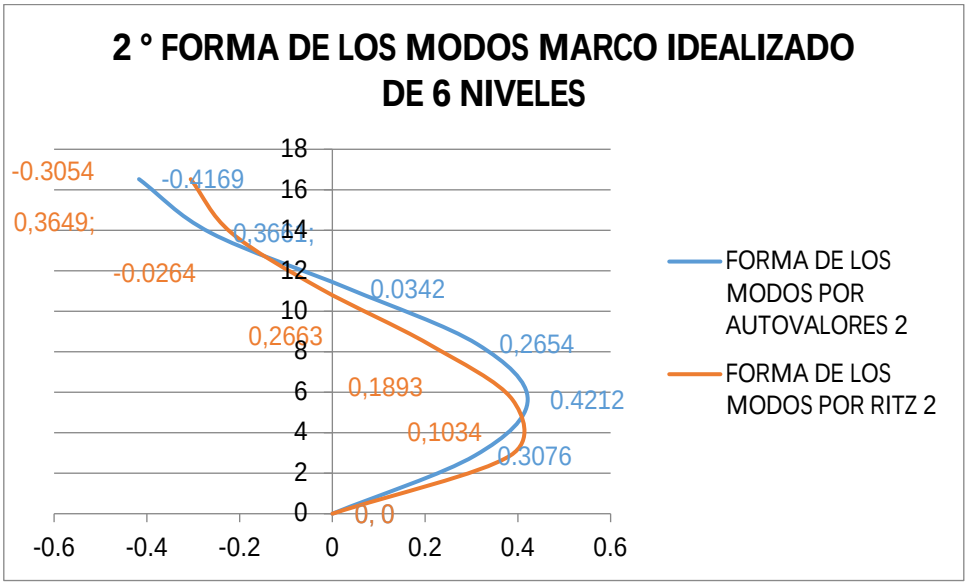

Figura 58. Gráfica comparativa de la Segunda Forma Modal. (Marco de 6 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	Frecuencia		COMPARACION DE APROXIMACIONES Y RESULTADOS EXACTOS	
	Auto Valores	Ritz		
Piso 1	8,596	8,5959	FRECUENCIA 1 (%) DE ERROR	FRECUENCIA 2(%) DE ERROR
Piso 2	25,0912	26,2349	0,001163332	4,558171789
Piso 3	39,951			
Piso 4	52,511			
Piso 5	61,651			
Piso 6	66,678			

Tabla 170. Porcentaje de error de las frecuencias. (Marco de 6 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

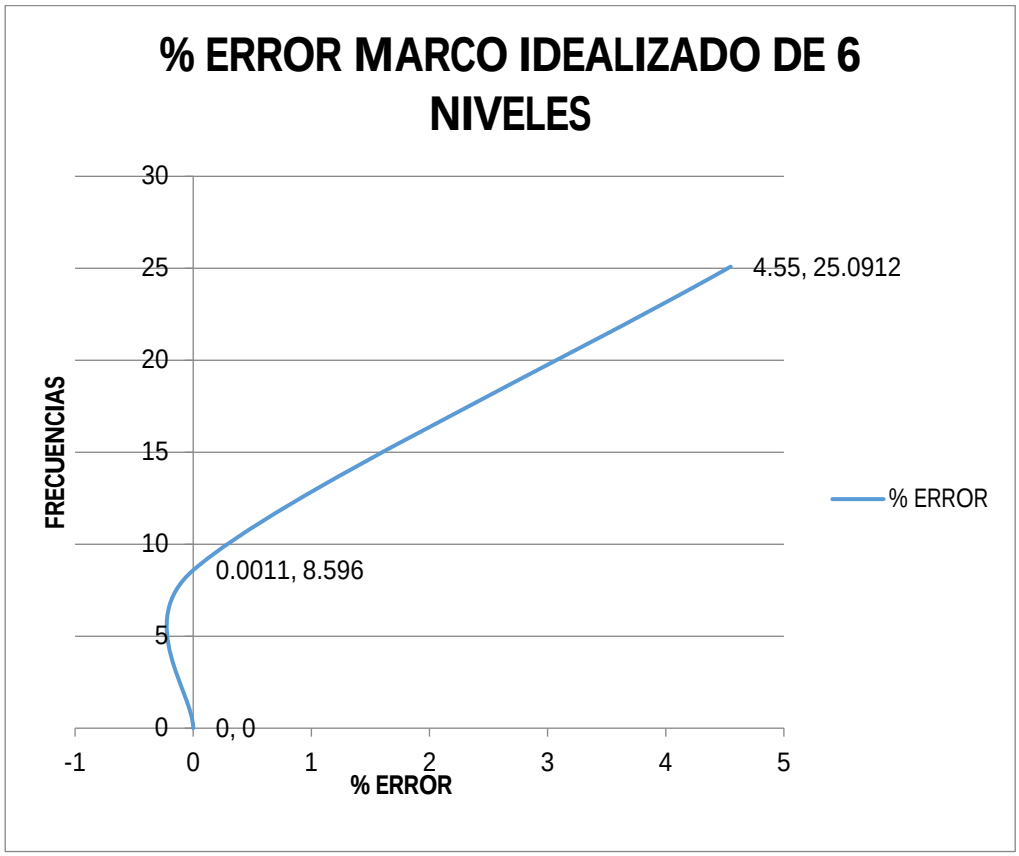

Figura 59. Gráfica del % de error. (Marco de 6 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

	Marco de seis niveles idealizado											
	Ritz											
	Frecuencias				Formas Modales							
	Patrones de cargas											
	Rectangular	Triangular	Trapezoidal	Techo	Rectangular		Triangular		Trapezoidal		Techo	
					Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2	Forma 1	Forma 2
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piso 1												
Piso 2												
Piso 3												
Piso 4												
Piso 5												
Piso 6												

Tabla 171. Cuadro Comparativo de patrones de cargas. (Marco de 6 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

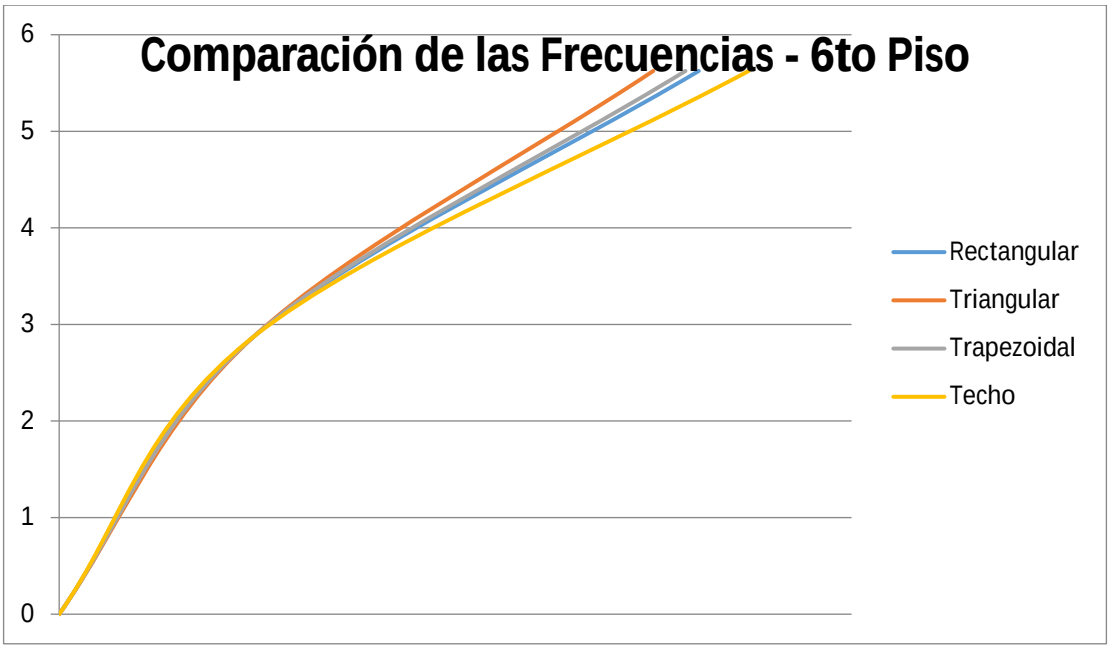

Figura 60. Gráfica comparativa de las frecuencias con diferentes patrones de cargas. (Marco de 6 niveles)
Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

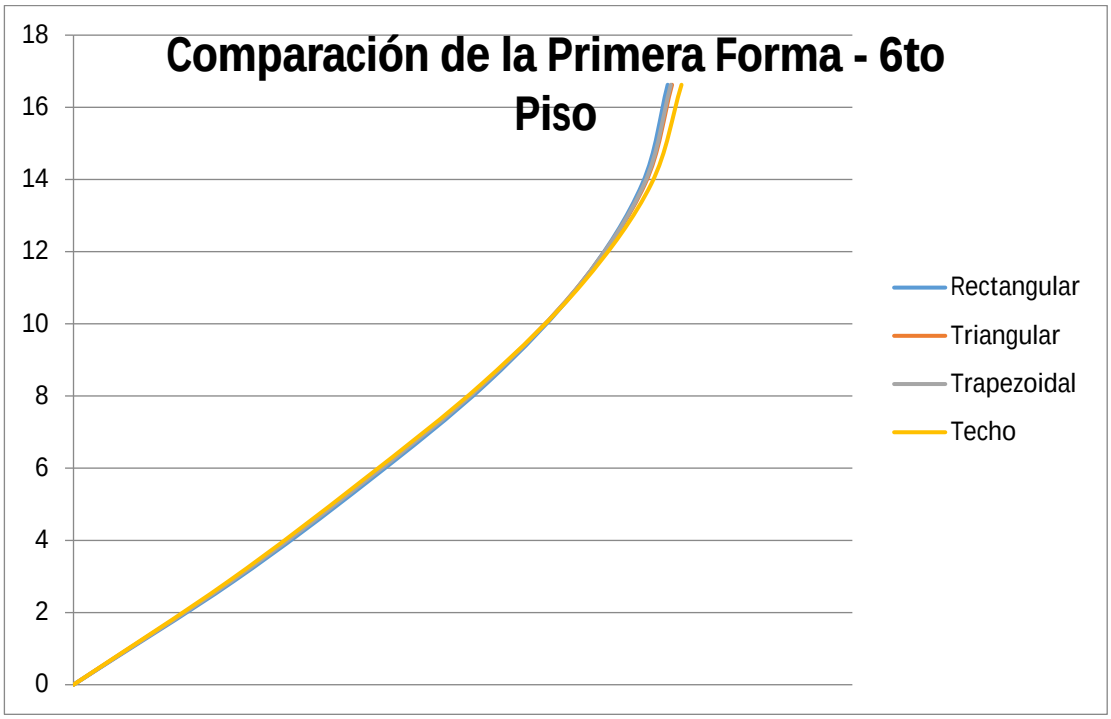

Figura 61. Gráfica comparativa de la Primera Forma Modal. (Marco de 6 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

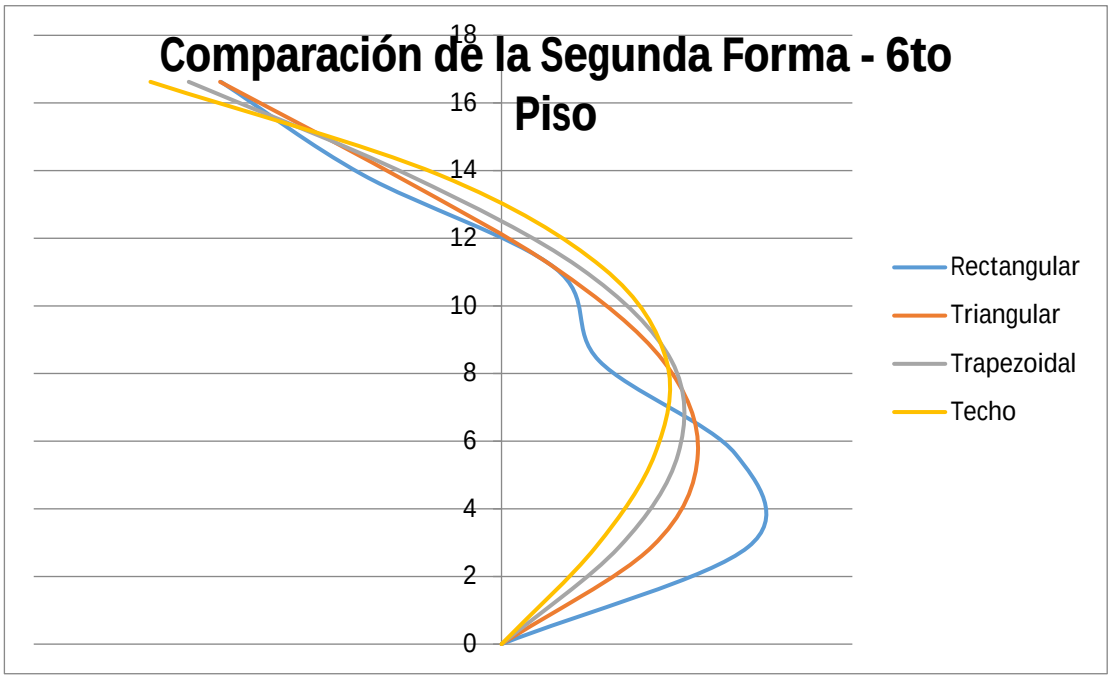

Figura 62. Gráfica comparativa de la Segunda Forma Modal. (Marco de 6 niveles)

Autores: Rodríguez, Díaz; 2017

Para este marco de seis niveles el cual, los valores obtenidos por Auto Valores ya no son tan sencillo de obtener debido a que se origina una matriz de 6x6 para hallar la determinante y así el valor de sus frecuencias por nivel; a diferencia del método de Ritz cuyo procedimiento no varía técnicamente de los otros ejercicios para hallar estos mismo valores y aun sin importar el nivel los valores son muy parecidos y tomando en cuenta que este mismo no es más que un método de aproximación el tiempo de empleo y la dificultad del mismo son muchos menores.

En el cálculo de los modos, por Auto Valores y por Ritz no hay tanta discrepancia en su forma de obtención, Observamos que los valores del primer modo son técnicamente idénticos y del segundo modo aunque se notó una mayor diferencia en comparación a el primer modo igualmente son resultados muy cercanos y valores aceptados para el cálculo dinámico.

También podemos observar que el porcentaje de error de sus formas es mayor debido que solo se utilizó para sus cálculos solo dos vectores de Ritz y si se utilizara más vectores de Ritz este valor cada vez se aproximaría a 0 % pero al fin y al cabo solo muestra un porcentaje de error menos del 2 %.

Muy parecido a los porcentajes obtenidos del marco de cinco nivel las frecuencias varían muy poco ya que la masa y rigidez se mantienen paras los diferentes patrones de cargas y la primera forma modal son muy parecidos y el que varía un poco es el patrón de carga del techo, debido a que se encuentra en una posición más alta que los demás.

Como se concluyó en el marco anterior el patrón de carga uniforme varia con respecto a los demás debido a como está distribuido su fuerzas que no varían de nivel a nivel y en los otros casos estos mismo van aumentando entre pisos, además; Por lo general, la segunda mitad del conjunto de las frecuencias y modos J no es precisa para ser útil. Por lo que el número de vectores Ritz incluidos debe ser suficiente para determinar con precisión el número deseado de modos naturales. Debido a que estos modos aproximados Phi son ortogonales con respecto a las matrices m y k de masa y

rigidez, pueden utilizarse de la misma manera que los modos exactos en el análisis modal clásico del sistema.

Conclusiones

En la descripción del procedimiento empleado en cada método, se obtiene que el método de Auto Vectores es un poco más extenso y complejo ya que al aplicar esté a estructuras de más de 3 GLD, la resolución de los modos y formas de vibración pasan a ser polinomios de grados altos, donde se requiere sistemas de cálculo avanzado; mientras con los Vectores de Ritz reduce el sistema a una matriz de masa y de rigidez.

La metodología para realizar el método de auto valores y el método de Ritz; ambos métodos presentan semejanza respecto a su metodología, el método de Auto Valores es un método más directo, pero a la vez más complejo en la parte de cálculo, mientras que en el método de Ritz reduce las matrices un sistema más sencillo para luego resolver un sistema de menor grado por Auto Valores.

Realizar los cálculos matemáticos para obtener la frecuencia y modos usando ambos métodos: Los cálculos matemáticos para obtener la frecuencia y modos usando ambos métodos arrojaron valores en el método de vectores de Ritz para el análisis dinámico lineal, como en los modelos analizados tiene una buena convergencia con un menor número de modos que el método de valores y vectores propios, ya que, la base Ritz que desacopla las ecuaciones de movimiento permiten un ahorro importante del esfuerzo computacional, sobre todo para sistemas estructurales de muchos grados de libertad. El algoritmo de generación de vectores de Ritz tiene un esquema sencillo, pero resulta eficiente en términos del cálculo numérico. En los modelos analizados se ha podido comprobar que se han requerido menos modos con vectores de Ritz que con valores y vectores propios para alcanzar una participación de masa mayor. De los resultados obtenidos en los modelos analizados se puede afirmar que los desplazamientos convergen más rápido que los cortantes, por tanto se requiere un menor número de modos para su cálculo.

Comparar el método de auto valores y vectores de Ritz, en estructuras regulares de marcos idealizados: Los últimos cuadros presentados en este trabajado de grado nos muestran con más claridad los diferentes valores arrojados por estos métodos los cuales se pueden observar mucha similitud entre estos lo que indica un buen empleo tanto del método de Auto Valores como el método de los vectores de Ritz, además no solo son resultados numéricos sino representados gráficamente lo cual indica los comportamientos de estas estructuras de marcos idealizados en frente a diferentes patrones de cargas y niveles ya mostrado con anterioridad recalcando ciertos aspectos importantes a considerar al trabajar con estos métodos.

Recomendaciones

1. Evaluar otras alternativas respecto al vector inicial para la generación de vectores de Ritz; si es factible otro tipo de vectores de inicio que permitan una convergencia similar o mejor.
2. El uso del método sobre todo en estructuras con cierto grado de complejidad y múltiples grados de libertad, ya que permiten un ahorro sustancial en el tiempo de ejecución.
3. En el caso del análisis no lineal, se debería investigar para modelos con irregularidades y mayor complejidad y poder comparar con métodos de integración directa paso a paso.
4. En el análisis comparativo se puede ampliar más la investigación, incluyendo en el análisis matriz de amortiguamiento, para obtener resultados entre ambos métodos de como convergen con otro componente en el análisis modal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁGICAS

Acosta G. Rionia, (2012). **Diseño Sismorresistente:** http://www.monografias.com/trabajos81/diseno-sismico/diseno-sismico2.shtml

Bazan E. y Meli R (1990). **Diseño sísmico de edificios.**

Bathe K., Finite Element Procedures. **Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1996**

CHOPRA, ANIL K. **Dinámica de estructuras (Cuarta edición)**

Grases José, Gutiérrez Arnaldo y Salas J, (2010). Rafael. **La Ingeniería Sismorreistente.** http://www.acading.org.ve/info/ingenieria/pubdocs/hist_ing_est/Cap_VII.pdf

Fernández F. Rosario y Núñez M. Ellys G. (2002). **Evaluación de la vulnerabilidad de estructuras ante la ocurrencia de eventos sísmicos.**

Hutton D. Fundamental of Finite Element Analysis**. Mc Graw Hill. USA. 2004**

Wilson E. Yuan M., Dickens J. **Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.10, pp. 813-821.**