



UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ

**ESTUDIO DEL CAMPO DE FLUJO  
COMPRESIBLE EN LA DESCARGA DE  
UNA TOBERA CONVERGENTE-  
DIVERGENTE UTILIZANDO TÉCNICAS  
DE APROXIMACIÓN NUMÉRICA**

**Autor:**

Granados G. Carlos I.

C.I.: V 24.817.879

Urb. Yuma II, calle N° 3. Municipio San Diego

Teléfono: (0241) 8714240 (master) – Fax: (0241) 8712394

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERIA MECÁNICA

**ESTUDIO DEL CAMPO DE FLUJO COMPRESIBLE EN LA DESCARGA DE  
UNA TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE UTILIZANDO TÉCNICAS  
DE APROXIMACIÓN NUMÉRICA**

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de  
**INGENIERO MECANICO**

**Autor:** Granados G. Carlos I.

C.I.: V 24.817.879

**Tutor:** Ing. Caraballo V. Gruber A.

San Diego, noviembre 2018



Universidad José Antonio Páez  
Facultad de Ingeniería

---

FI-SE-M -002-2018-IICR

Valencia, 13 de Noviembre de 2018.

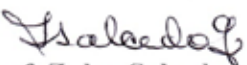
Ciudadanos:  
Carlos Granados  
C.I:24.817.879  
Presente.-

Cumplo con informarle que la Comisión de Trabajo de Grado y Pasantías de la Facultad de Ingeniería en su reunión N° 01-2018 de fecha 13-11-2018 aprobó el proyecto de trabajo de grado titulado **ESTUDIO DEL CAMPO DE FLUJO COMPRESIBLE EN LA DESCARGA DE UNA TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE UTILIZANDO TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN NUMÉRICA** Presentado por usted(es) como requisito para optar al título de Ingeniero Mecánico.

Se ratifica la designación del Ing. Gruber Caraballo C.I: 12.014.408 y la Ing. Alicia Yáñez, C.I.: 4.598.880 como Tutores Académicos que lo asesorarán en el desarrollo de este proyecto.

Atentamente,



  
Prof. Zulay Salcedo  
Decana de la Facultad de Ingeniería

c. c. Coordinación de Pasantías y Trabajo de Grado (1).

ZS/fr



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERIA MECÁNICA

### **ACEPTACIÓN DEL TUTOR**

Quien suscribe, Ingeniero Gruber Antonio Caraballo Villasana, portador de la cédula de identidad N° V 12.014.408, en mi carácter de tutor del trabajo de grado presentado por el ciudadano Carlos Ivan Granados Granados, cédula de identidad N° V 24.817.879, titulado **ESTUDIO DEL CAMPO DE FLUJO COMPRESIBLE EN LA DESCARGA DE UNA TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE UTILIZANDO TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN NUMÉRICA** presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Mecánico, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En San Diego, diciembre 2018.

---

Firma

Ing. Gruber A. Caraballo V.  
C.I.: V - 12.014.408  
Tutor Académico

## AGRADECIMIENTOS

A **Abbá**, por permitirme realizar este trabajo de grado y colocar a cada una de las personas que de una manera u otra influyo en el cumplimiento de este objetivo en tan corto periodo de tiempo, haciendo este desafío posible.

A **mis padres**, por demostrarme con su constancia y dedicación que cualquier objetivo se puede lograr si estamos dispuestos hacer lo que tenemos que hacer de manera oportuna y que cada logro conlleva un sacrificio que vale la pena hacer.

A quien me enorgullece llamar mi amigo, maestro y tutor, **Gruber Caraballo**, sin cuyo apoyo y largas horas de dedicación, este objetivo de hacer un trabajo de grado en un semestre extraordinaria habría quedado en no más que una idea.

A **mis hermanas**, sin cuyo apoyo y palabras de aliento hubiese sido aún más difícil enfrentar este desafío. A **mi familia**, por su apoyo incondicional y su completa disposición a ayudarme en lo que su alcance les permitiese. A **Arlindo Fernades** y **Yajaira Arencibia**, por darme un segundo hogar y una familia incondicional, que me apoya a lo largo de toda mi vida en cada una de mis metas.

A **Giovanni Brizuela** y **Efraín Visconti** mis hermanos, por enseñarme que aun en los caminos rocosos con una buena compañía se puede bailar descalzos. A **Fabiola Sabino**, mi hermana, por su apoyo incondicional a lo largo de toda mi carrera universitaria en las buenas y en las malas.

A mi novia **Isabella Rojas**, por su paciencia y constante apoyo para lograr llevar a cabo este objetivo. A **Guillermo Comes** y **Paola De Luca**, por ser apoyo incondicional y vivo ejemplo de que Abbá está presente en todo lugar y situación, solo hay que saber mirar.

A mis amigos **Anabel Salcedo**, **Graciliano Figueroa**, **Jesús Ortega** y **Yuscarly Hernandez**, por su amistad y apoyo a lo largo de mi carrera universitaria. A **mis profesores universitarios**, quienes, en tiempos tan difíciles, luchan de manera incansable por transmitir sus conocimientos, con un sentido de entrega y abnegación

inmensurables, con tanto amor por lo que hacen. **¡Maestros!**



## ÍNDICE GENERAL

RESUMEN.....	xiv
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO .....	4
I EL PROBLEMA.....	4
1.1. Planteamiento del problema .....	4
1.2. Formulación del problema.....	5
1.3. Objetivos de la investigación.....	5
1.3.1. Objetivo general.....	5
1.3.2. Objetivos específicos .....	5
1.4. Justificación de la investigación.....	6
1.5. Limitaciones .....	6
1.6. Alcance .....	7
II MARCO TEÓRICO .....	10
2.1. Antecedentes de la investigación.....	10
2.2. Bases teóricas .....	13
2.2.1. Toberas .....	13
2.2.2. Toberas convergentes-divergentes.....	13
2.2.3. Ondas de choque.....	16
2.2.4. Ondas de expansión de Prandtl-Meyer .....	22
2.2.5. Separación de la capa límite .....	24
2.2.6. Efecto Coandâ.....	27
2.2.7. Modelos matemáticos .....	28
2.2.8. Modelo de turbulencia Eddy Viscosity.....	33
2.2.9. Modelo de turbulencia kappa-epsilon (k –	

2.2.13. Modelo matemático del efecto Coandâ .....	37
2.2.14. Niveles de aproximación numérica.....	40
2.2.15. Método de solución numérica.....	43
2.2.16. Método de discretización.....	44
2.2.17. Mallado o discretización numérica.....	44
2.2.18. Procedimiento para la solución en CFD .....	52
2.2.19. Verificación de la geometría.....	54
2.2.20. Calidad de malla .....	55
2.2.21. Criterio de convergencia (RMS).....	56
2.3. Definición de términos básicos .....	57
<b>III MARCO METODOLÓGICO.....</b>	<b>59</b>
3.1. Tipo de investigación .....	59
3.2. Diseño de la investigación.....	59
3.3. Nivel de la investigación .....	60
3.4. Población y muestra .....	61
3.5. Técnicas de recolección de información .....	61
3.6. Fases metodológicas.....	62
<b>IV RESULTADOS .....</b>	<b>66</b>
4.1. Investigación sobre las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo externo en la descarga de una tobera convergente – divergente (C – D).....	66
4.2. Modelado mediante una herramienta CAD una tobera C – D.....	66
4.3. Elección del modelo matemático adecuado para el estudio del dominio fluidizado exterior de la tobera C – D .....	68
4.4. Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD.....	68
4.4.1. Modelado de la geometría .....	69
4.4.2. Discretización del dominio .....	70
4.4.3. Configuración de la herramienta de CFD .....	72
4.4.4. Obtención de los resultados .....	78

4.5. Evaluación los resultados en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su caracterización .....	78
4.5.1. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 7.000 m .....	79
4.5.2. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 8.000 m .....	83
4.5.3. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 9.000 m .....	87
4.5.4. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 10.000 m .....	90
4.5.5. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 12.000 m .....	94
4.5.6. Evaluación de los resultados.....	99
4.5.7. Evaluación y caracterización de las irreversibilidades .....	99
4.5.8. Evaluación global de los resultados.....	110
CONCLUSIONES .....	114
RECOMENDACIONES .....	116
REFERENCIAS .....	117

## **ÍNDICE DE APÉNDICES**

APÉNDICE A - Plano de la tobera convergente-divergente seleccionada para el estudio .....	120
---	-----

## **INDICE DE ANEXOS**

ANEXO A - Tabla de propiedades de la atmosfera a gran altitud.....	123
--	-----

## **INDICE DE CUADROS**

CUADRO 1: Patrones de interacción para distintos rangos de número de Mach .....	26
---	----

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: efectos de la contrapresión en el flujo a través de una tobera c-d. ....	15
Figura 2: ondas de coque en la sección divergente de una tobera de laval.....	17
Figura 3: representación de una onda de choque en un diagrama h-s.....	18
Figura 4: onda de choque normal para una relación de $p_c > p_b > p_e$ .....	18
	.... 19
Figura 6: choque oblicuo separado .....	20
Figura 7: vectores de velocidad descompuestos de un choque oblicuo .....	21
Figura 8: toda la variedad de ondas de choque posible para un determinado número de mach de flujo libre. ....	21
Figura 9: ondas de expansión generadas por una cuña bidimensional.....	24
Figura 10: esquematización de los parámetros involucrados en la separación de capa límite para flujos internos .....	27
Figura 11: separación de flujo e inestabilidad de la capa de cizallamiento .....	27
Figura 12: sistema coordinado y anotaciones del efecto coandâ.....	39
Figura 13: técnicas de aproximación numérica en mf .....	43
Figura 14: malla estructurada.....	46
Figura 15: cuadrícula estructurada en 2d .....	46
Figura 16: mallado estructurado con interfaz ajustada .....	47
Figura 17: mallado estructurado en bloque 2d sin interfaces ajustadas .....	48
Figura 18: mallado compuesto en 2d .....	48
Figura 19: malla no estructurada.....	50
Figura 20: ejemplo de mallado no estructurada en 2d .....	50
Figura 21: sesgo en celdas .....	52
Figura 22: ortogonalidad del mallado .....	55
Figura 23: factor de expansión de la malla .....	56
Figura 24: aspecto del radio de la malla "meshaspect radio" .....	56
Figura 25: modelo de la tobera de laval incrustada en el d.f. del caso estudio .....	68
Figura 26: proceso de simulación para ansys® fluent .....	69
Figura 27: superficie de estudio con caras fragmentadas del design modeler .....	70
Figura 28: aspectos generales del mallado.....	71
Figura 29: ortogonalidad de la discretización del dominio.....	71
Figura 30: límites del caso estudio.....	72
Figura 31: configuración del .....	73
Figura 32: preconfiguración del solver .....	73
Figura 33: tipo de fluido del estudio y sus propiedades.....	74

Figura 34: parámetros de la herramienta de calculo .....	75
Figura 35: convergencia de las ecuaciones para una altitud de 7.000 m .....	76
Figura 36: convergencia de las ecuaciones de continuidad, momento y energía para una altitud de 7.000 m .....	77
Figura 37: convergencia de las ecuaciones del modelo de turbulencia k-omega para 7.000m .....	77
Figura 38: curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 7.000m....	80
Figura 39: diagrama de contorno de la presión para 7.000m.....	80
Figura 40: curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 7.000m	81
Figura 41: diagrama de contorno de la velocidad para 7.000m .....	81
Figura 42: curva del número de mach versus la posición a lo largo del flujo para 7.000m .....	82
Figura 43: diagrama de contorno del número de mach para 7.000m.....	82
Figura 44: curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 8.000m....	83
Figura 45: diagrama de contorno de la presión para 8.000m.....	84
Figura 46: curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 8.000m	84
Figura 47: diagrama de contorno de la velocidad para 8.000m .....	85
Figura 48: curva del número de mach versus la posición a lo largo del flujo para 8.000m .....	86
Figura 49: diagrama de contorno del número de mach para 8.000m.....	86
Figura 50: curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 9.000m....	87
Figura 51: diagrama de contorno de la presión para 9.000m.....	88
Figura 52: curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 9.000m	88
Figura 53: diagrama de contorno de la velocidad para 9.000m .....	89
Figura 54: curva del número de mach versus la posición a lo largo del flujo para 9.000m .....	89
Figura 55: diagrama de contorno del número de mach para 9.000m.....	90
Figura 56: curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 10.000m..	91
Figura 57: diagrama de contorno de la presión para 10.000m.....	91
Figura 58: curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 10.000m .....	92
Figura 59: diagrama de contorno de la velocidad para 10.000m .....	92
Figura 60: curva del número de mach versus la posición a lo largo del flujo para 10.000m .....	93
Figura 61: diagrama de contorno del número de mach para 10.000m.....	93
Figura 62: curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 12.000m..	95
Figura 63: diagrama de contorno de la presión para 12.000m.....	95
Figura 64: curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 12.000m .....	96

Figura 65: diagrama de contorno de la velocidad para 12.000m .....	97
Figura 66: curva del número de mach versus la posición a lo largo del flujo para 12.000m .....	98
Figura 67: diagrama de contorno del número de mach para 12.000m.....	98
Figura 68: diagrama de contorno y curva del número de mach para 10.000m.....	100
Figura 69: efecto coandâ para una altura de 10.000m .....	101
Figura 70: flujo expansivo de prandtl meyer para una altura de 10.000m.....	101
Figura 71: ondas de choque oblicuas internas en la estela de flujo compresible a 10.000m .....	102
Figura 72: estudio del campo vectorial y sus subdivisiones a 10.000 m .....	102
Figura 73: campo vectorial a.....	103
Figura 74: campo vectorial b.....	104
Figura 75: campo vectorial c.....	104
Figura 76: campo vectorial d.....	105
Figura 77: comparación de contornos de velocidad y presión para una altura de 10.000m .....	107
Figura 78: diagrama de contorno y curva del número de mach para una altura de 10.000m .....	108
Figura 79: variaciones de la presión en la estela en diferentes exposiciones de luz para 10.000 m .....	109
Figura 80: abanico de ondas de choque oblicuas para una altura de 10.000m .....	110
Figura 81: comparación de los gráficos a las distintas alturas de estudio.....	112
Figura 82: comparación de los contornos de velocidad a las diferentes alturas de trabajo .....	113



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERIA MECÁNICA

## **ESTUDIO DEL CAMPO DE FLUJO COMPRESIBLE EN LA DESCARGA DE UNA TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE UTILIZANDO TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN NUMÉRICA**

**Autor:** Granados Granados Carlos Ivan

**Tutor:** Ing. Caraballo V. Gruber A.

**Fecha:** Enero, 2019

### **RESUMEN**

El presente trabajo de investigación consistió en el estudio del campo de flujo compresible en la descarga de una tobera convergente – divergente, del cual se analizó su comportamiento según la geometría de las diferentes ondas de choque y de expansión en la estela del flujo, por medio de técnicas de aproximación numérica y el uso de una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD. Una vez analizados los resultados arrojados por mencionada herramienta, se llegó a la conclusión de que la principal variable en el comportamiento del campo de flujo compresible en dicha zona, era el diferencial de presión que existe entre la entrada y la salida de la tobera. Dicho diferencial, al estar en el orden de los 750 kPa, generó una estela supersónica. Por otra parte, también se seleccionó el modelo matemático más adecuado para la resolución de las ecuaciones del caso estudio, por medio de procesadores de datos incluidos en la CFD, que generaron gráficos específicos para la variable en cuestión y permitieron caracterizar irreversibilidades como: flujo de Prandtl Meyer, efecto de Coandâ, y múltiples comportamientos de ondas de choque oblicuas a lo largo de la estela.

**Descriptor:** Campo de flujo compresible, tobera convergente-divergente, dinámica de fluidos computacional (CFD), onda de choque.



## INTRODUCCIÓN

Desde 1755 cuando Euler dedujo la ecuación fundamental de las turbomáquinas el estudio de los fluidos y los dispositivos empleados para la manipulación y control de los mismos comenzó a ser una realidad. Los estudios del campo analítico y experimental, con el desarrollo de la ciencia y tecnología en las últimas décadas, abrió paso a otra opción: las soluciones aproximadas por métodos numéricos.

La aplicación las soluciones aproximadas por métodos numéricos, describe con una exactitud muy cercana a la realidad el comportamiento del campo de flujo compresible que atraviesa las toberas convergentes divergentes y el comportamiento de la estela de flujo una vez abandona el dispositivo. Los grandes fabricantes de mencionado artefacto, suelen tener bancos de pruebas experimentales, lo que deriva en elevados costos y se limitan a casos muy específicos en entornos profundamente controlados lo que los hace poco precisos, por lo que en la actualidad optan por métodos de aproximación numérica, usando herramientas tales como la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD por sus siglas en ingles).

En el presente trabajo de investigación se estudia el comportamiento de la estela de flujo de una tobera convergente-divergente, siendo un campo de flujo compresible que sufre cambios altamente irreversibles, generados por la aparición de ondas de choque oblicuas y de expansión, que logran la aceleración del flujo a velocidades mayores a las del sonido. El objeto es describir el comportamiento de mencionadas ondas a lo largo del flujo y las consecuencias específicas que derivan de cada una, así como caracterizar las propiedades que influyen de manera directa en este comportamiento, esto lográndolo a través de un modelo bidimensional de la tobera generado a partir de una herramienta de Diseño Computacional (CAD por sus siglas en inglés) posteriormente exportarlo y por medio de una CFD realizar el estudio al campo de flujo compresible.

Inicialmente se discretiza el dominio fluidizado de tobera y se establecen las condiciones de borde, esto es, entrada y salida del flujo, así como la pared sólida con la que va a interactuar el campo de flujo y el eje de simetría. Luego se procede a realizar las pruebas del rendimiento de la malla computacional y una vez obtenida la más eficiente se realizan los experimentos numéricos o simulaciones por medio de un centro de procesamiento de datos denominado “ ”.

Una vez ejecutado el solver se obtienen los resultados que describen el comportamiento del campo de flujo, con los cuales se procede a comparar con los datos bien sean teóricos o experimentales para lograr la validación de los mismos.

En el **capítulo I** el problema es el protagonista, desglosándolo para obtener su correcto planteamiento, formulación del problema y, por otra parte, plasmar el objetivo general y los específicos, justificando la presente investigación y exponiendo su alcance y limitaciones. Posteriormente en el **capítulo II** se hace referencia a los antecedentes consultados, así como a toda la terminología y conceptos necesarios que representan la base para el desarrollo del estudio.

Por su parte el **capítulo III** muestra la metodología que se va a implementar, se describe el tipo de investigación las técnicas y los procedimientos para llevar a cabo la misma. Donde, se explica detalladamente las diversas fases y actividades que conforman el aspecto experimental. Por último, se lleva a cabo el cumplimiento de los objetivos en el **capítulo IV**, en el cual se detallan los resultados obtenidos siguiendo las fases metodológicas definidas en el capítulo anterior.



# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA

En este capítulo se explica la razón del estudio a realizar en este trabajo de grado, los objetivos planteados, así como la justificación de la investigación, sus limitaciones y alcances, las cuales condicionan el presente proyecto.

### 1.1. Planteamiento del problema

A lo largo de la historia el hombre ha aprovechado la energía entregada o absorbida por los fluidos para facilitar las labores necesarias en el desarrollo de la vida, desde el aprovechamiento de la energía cinética y potencial en los primeros molinos, pasando por las aplicaciones industriales, hasta para la generación de impulso en los aviones supersónicos y los cohetes de propulsión. Así el estudio y manejo de los fluidos se hizo imprescindible para el desarrollo científico y tecnológico del ser humano.

Cuando se habla de toberas se interpreta en una reducción de la sección transversal del área en el recorrido longitudinal del flujo, transformando la presión en energía cinética. En una tobera convergente la velocidad absoluta sería limitada por la velocidad del sonido, sin embargo, en las toberas convergente-divergente, se puede lograr la aceleración del fluido a velocidades súper sónicas, adicionando una sección de flujo divergente en la garganta de la tobera.

Actualmente existen estudios teóricos que son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden no lineales, lo que representa un grado de complejidad muy alto, por lo que se dificulta obtener valores exactos y cuantitativos, que den por resultado una solución analítica. Sin embargo, las mismas simplifican el fenómeno, logrando así dar soluciones particulares para casos muy específicos en entornos controlados. Una segunda opción es el estudio empírico, sería necesario un

banco de pruebas, la fabricación de una tobera convergente-divergente, los equipos para medir las variables involucradas, entre otros; en otras palabras, se necesitaría un alto costo de inversión, puesto que la fabricación de la tobera es muy compleja y los equipos de medición son muy específicos ya que requieren de alta precisión, sin mencionar el extenso tiempo que tomaría obtener resultados de esta manera.

De la misma forma existe una tercera opción, el análisis por medio de la aproximación y modelado numérico, a través de software específicos, que, facilitan el uso de los modelos matemáticos previamente mencionados, dando cavidad a simulaciones de alta precisión del campo de flujo en la descarga de una tobera convergente-divergente, permitiendo obtener resultados aptos para estudiar el comportamiento del fluido en la sección de descarga. Este último método fue por el cual se realizó el estudio del campo de flujo compresible en mencionada zona.

## **1.2. Formulación del problema**

¿Cómo se podrían describir las variables que forman el campo de flujo en la descarga de una tobera convergente – divergente y analizar su comportamiento según la geometría de las diferentes ondas de choque y de expansión en la estela del flujo?

## **1.3. Objetivos de la investigación**

### **1.3.1. Objetivo general**

Estudiar el campo de flujo compresible en la descarga de una tobera convergente-divergente utilizando técnicas de aproximación numérica.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

1. Investigar acerca de las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo externo en la descarga de una tobera convergente – divergente (C – D).
2. Modelar mediante una herramienta CAD una tobera C – D.
3. Elegir el modelo matemático adecuado para el estudio del dominio fluidizado exterior de la tobera C – D.

4. Simular el campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD.
5. Evaluar los resultados en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su caracterización

#### **1.4. Justificación de la investigación**

Con el transcurso del tiempo, la era tecnológica y computacional ha dado paso a un sinnúmero de posibilidades de estudio, las mismas otorgan un procesamiento de datos en un corto plazo de tiempo, consiguiendo así resultados que años atrás hubiesen significado días, semanas e incluso meses de cálculos de manera analítica. La ingeniería se ha visto altamente beneficiada de estos avances, siendo hoy en día esenciales para su continuo desarrollo.

El estudio de comportamiento de fluidos no es excepción de lo anteriormente explicado, la dinámica de fluidos computacional o CFD (Computational fluid dynamics) tiene como objeto la simulación del flujo de gases o líquidos, para simplificar el estudio de una infinidad de fenómenos que estos representan. Esto se logra por medio de la utilización de métodos numéricos, para describir el comportamiento del caso en cuestión, convirtiéndose así en una herramienta inestimable para el análisis y diseño.

En consecuencia, emplear estos métodos para el estudio de la compresibilidad del campo de flujo en la sección de descarga de una tobera convergente-divergente, permitirá la obtención de propiedades de flujo con mayor detalle y obtener resultados cercanos a la realidad sin recurrir a un banco de pruebas real, que traduciría en un elevado costo de inversión. De esta manera comparar los diversos modelos matemáticos y determinar cuál se adapta mejor al comportamiento del flujo en específica sección. Obteniendo beneficios académicos y económicos en todos los ámbitos de estudio.

#### **1.5. Limitaciones**

Durante la investigación se presentaron las siguientes limitantes:

El pensum carece de una cátedra especializada en el estudio computacional de la dinámica de fluidos, lo que podría derivar en impedimentos al utilizar la herramienta o software para la resolución de los modelos matemáticos adecuados.

Es necesario el modelado geométrico de gran exactitud y un mallado de alta calidad, requiriéndose así computadores con procesadores de elevado rendimiento, teniendo en cuenta que, para obtener resultados más cercanos a la realidad, es conveniente mallados de alta precisión.

La escasa información de los pocos estudios realizados acerca del comportamiento real de una tobera convergente-divergente, cuya gran mayoría son realizados en ambientes sumamente controlados y para aplicaciones específicas

La ausencia de un banco experimental donde se ensaye con una tobera convergente-divergente para la verificación de los resultados obtenidos.

### **1.6. Alcance**

La presente investigación abarcará exclusivamente el estudio del campo de flujo comprensible en la descarga de una tobera convergente-divergente, ya que tomando en cuenta el tiempo establecido, no se indagará en otro tipo de consideraciones en el campo de flujo y/o estados termodinámicos que pudiesen existir. Por lo tanto, tampoco se indagará en los cambios que puedan sufrir las propiedades por la presencia de elementos externos, como lo son la transferencia de calor generada por el medio donde se encuentra la tobera o la fricción entre el fluido y las paredes internas de la tobera, por lo que en todo momento se considerará flujo estacionario sin transferencia de calor o interacciones de trabajo y sin cambio de energía potencial, así como también, en la onda de choque el flujo será considerado irreversible y adiabático.

El estudio y la simulación numérica sólo serán referidas para un modelo matemático específico, así como los resultados obtenidos sólo serán aplicables a una

tobera convergente-divergente. Los resultados obtenidos serán arrojados en forma de datos y mediante el uso de gráficos experimentales de las variables que describen el fenómeno.



## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

Esta sección es la base fundamental del presente trabajo de grado, ya que en esta se indaga en los conocimientos teóricos requeridos para la explicación del problema y las diferentes terminologías empleadas en el desarrollo de los resultados. En otras palabras, este capítulo es elemental para comprender, analizar y concluir la investigación en sí.

#### **2.1. Antecedentes de la investigación**

El análisis de fluidos por medio de La Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) en particular, son de fechas recientes y pocos los investigadores que se han dado a la labor de profundizar en esta área. ergo es aún más escaso el desarrollo de investigaciones de toberas convergentes-divergentes, por medio de este tipo de análisis numérico computarizado, cabe destacar que las existentes son de casos de estudio muy específicos de este tipo de toberas, ya sea para una aplicación específica en un entorno determinado o el estudio del comportamiento del flujo compresible bajo estrictos parámetros.

Prieto Carlos (2018), en su trabajo de grado para optar al título de ingeniero mecánico en la Universidad José Antonio Páez, titulado **Simulación del campo de flujo en una tobera convergente – divergente mediante una herramienta computacional de CFD** realizó el estudio del comportamiento del campo de flujo compresible en el interior de una tobera convergente-divergente y como afectan las ondas de choque normal en este, logrando caracterizar las propiedades del flujo más relevantes, partiendo de un modelo tridimensional generado a partir de una herramienta CAD, realizando un análisis numérico por medio de una CFD, y posteriormente comparo los modelos matemáticos, concluyendo que la variable de mayor interés en el estudio es la contrapresión o presión de descarga y demostró que

en presencia de ondas de choque normales se generan cambios repentinos en las propiedades del flujo.

El presentado antecedente, fue base para la realización de esta investigación, debido al estudio realizado a las ondas de choque y como aquellas afectan de manera importante al fluido. No menos importante, siendo también de gran aporte el método de análisis numérico computacional a partir de una CFD de amplio espectro en el mercado como ANSYS® Workbench, para la posterior comparación de los modelos matemáticos existentes, siendo una guía explícita del procedimiento de cálculo.

Así mismo, Echezuría Raúl (2017), en su trabajo de grado para optar al título de ingeniero mecánico en la Universidad José Antonio Páez, titulado **Estudio del flujo compresible en una tobera convergente-divergente utilizando dinámica de fluidos computacional**. Estudió el comportamiento del campo de flujo que atraviesa una tobera convergente-divergente, enfocándose en como incide la transferencia de calor y la rugosidad superficial en las propiedades del flujo. La investigación fue llevada a cabo por medio de una herramienta computacional de dinámica de fluidos ANSYS® Workbench, observando que la rugosidad no afecta de manera notoria las propiedades del flujo, a diferencia de la transferencia de calor.

El mencionado estudio, apoyó la investigación de manera indirecta, puesto que en este antecedente se consideran propiedades como la rugosidad y la transferencia de calor, características que no serán incluidas en la presente. No obstante, el método de comparación y análisis de datos arrojados por la CFD, son de suma utilidad dando aportes significativos de cómo realizar dichos análisis y comparaciones.

También, Dipen R. Dangi, Parth B. Thaker y Atal B. Harichandan (2017) en su trabajo , presentado en la sexta conferencia internacional sobre las tendencias recientes en ingeniería, ciencias y gestión. Por medio de ANSYS 14.0 se estudió el comportamiento del flujo que atraviesa una tobera de tipo campana, modificando el número de Mach, basándose en el modelo de turbulencia , esto para concebir la geometría más



logrando así evaluar el comportamiento de las ondas de choque normal, las ondas de choque oblicuas y la descripción del flujo de Prandtl-Meyer, que se generan en la estela de la zona exterior de la tobera.

Este último antecedente sirvió como base de esta investigación en virtud de que los estudios realizados por Ekeneyake en su tesis, tienen gran similitud con los objetivos propuestos en el presente trabajo de grado, puesto que se refieren exclusivamente, al comportamiento del campo de flujo compresible en la zona exterior de la descarga de una tobera convergente-divergente de los aviones caza mencionados, por medio de técnicas de aproximación numérica, siendo un importante aporte documental.

## **2.2. Bases teóricas**

En congruencia con Behar Daniel (2008), “El marco teórico nos amplía la descripción del problema. Integra la teoría con la investigación y sus relaciones mutuas.” (p.33). Es decir, el marco teórico apoya a explicar el problema y para su correcto desarrollo debe estar basado en la relación de la investigación y la teoría necesaria para comprender, analizar y concluir la investigación en sí.

### **2.2.1. Toberas**

Según Çengel Y. y Boles M. (2012) “Una tobera es un dispositivo que incrementa la velocidad de un fluido a expensas de la presión.” (p.233), esta definición da a entender que las toberas son dispositivos ingenieriles utilizados para transformar parte de la presión de un fluido, en energía cinemática, adquiriendo así el flujo que lo atraviesa mayor velocidad. Esto lo logra disminuyendo la sección transversal que atraviesa este en su recorrido longitudinal.

### **2.2.2. Toberas convergentes-divergentes**

Las toberas comunes o toberas convergentes, están limitadas a la velocidad del sonido, obteniendo así que el número de Mach máximo alcanzable por estos dispositivos es la unidad, esta velocidad es alcanzada en la garganta de aquellas. A pesar de lo anteriormente mencionado, es posible la aceleración de un flujo a

velocidades supersónicas, inclusive hipersónicas; basta con agregar una sección de divergencia a la salida o garganta de una tobera convergente, con esta combinación se obtiene lo que se conoce como una tobera convergente-divergente. No obstante, hacer que el flujo atraviese una zona de divergencia, no asegura su aceleración a velocidades superiores a la velocidad sónica.

Çengel y Boles (2012) Forzar el paso de un fluido a través de una tobera convergente-divergente no garantiza que el fluido se acelerará a una velocidad super sónica. De hecho, el fluido puede desacelerarse en la sección divergente en lugar de acelerarse, si es que la contrapresión no se encuentra en el intervalo correcto. (p.865)

Es decir, una tobera convergente divergente depende en grado no menor de la relación de presiones entre la presión de entrada ( $P_o$ ) y la presión de la zona de descarga de la tobera ( $P_b$ ). para explicar mejor, la relación existente entre las presiones y como incide en el comportamiento del fluido a través de la tobera nos apoyaremos en la Figura 1.

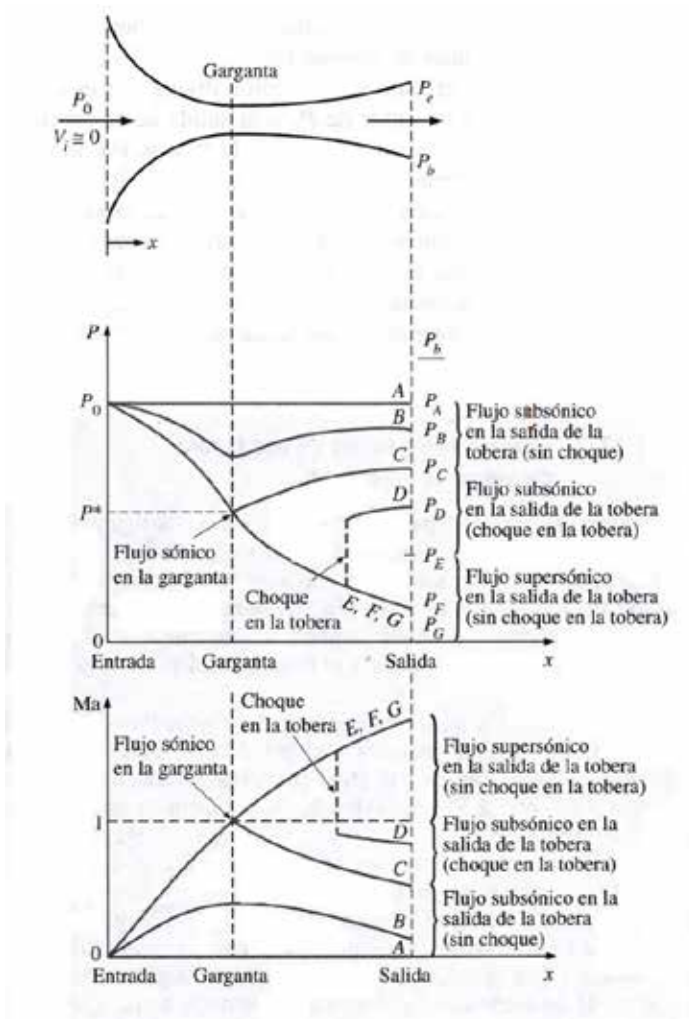
Cuando  $P_o=P_b$  (caso A en la gráfica) no existe flujo dentro del dispositivo, esto en consecuencia de que el mismo es controlado por la diferencia de presiones, al no haber diferencia, no existe tal.

Para  $P_o > P_b > P_c$ , el fluido saldrá de la tobera a velocidades sub sónicas, o en otras palabras a  $Mach < 1$ . A pesar de que en la zona de convergencia el fluido se acelera, no alcanza la velocidad del sonido, por lo tanto, la zona de divergencia actúa como un difusor, haciendo que el fluido gane presión, sacrificando la velocidad.

Cuando  $P_b=P_c$ , la presión en la zona de menor área o la garganta de la tobera es  $P^*$ , alcanzando así el fluido la velocidad del sonido, a pesar de esto, la sección de divergencia de la tobera sigue actuando como un difusor

Para  $P_c>P_b > P_e$ , el fluido que alcanzo una velocidad sónica en la parte mas estrecha de la tobera, sigue acelerándose a velocidades super sónica a medida que se sacrifica la presión. Sin embargo, esta aceleración se detiene de manera

repentina con la aparición de una onda de choque normal, lo que provoca una caída de la velocidad de manera inmediata, que se transforma en presión. De allí en más el fluido continúa desacelerándose.



**Figura 1: efectos de la contrapresión en el flujo a través de una tobera C-D.**

Fuente: Çengel y Boles Termodinámica (2012) p.867

A medida que la presión en la descarga de la tobera disminuye, la onda de choque se aleja cada vez más de la garganta de la tobera aproximándose al plano de salida de la tobera, para cuando  $P_E = P_b$  se forma la onda de choque en el plano de salida de la tobera. siendo así el fluido supersónico en la zona de

divergencia, sin embargo, por el efecto de la onda de choque, el fluido se desacelera a velocidades subsónicas antes de abandonar la tobera.

Cuando  $P_E > P_b > 0$ , el flujo es super sónico y no se genera choque normal dentro de la tobera. Para  $P_b = P_F$  no se genera choque normal dentro o fuera de la tobera. Cuando  $P_b < P_F$ , ondas de expansión y de mezclado irreversibles ocurren corriente abajo. No obstante, dado el caso de que  $P_b > P_F$ , la presión del fluido aumenta de  $P_F$  a  $P_b$  en forma irreversible en la estela a la salida de la tobera, creando choques oblicuos

Precisamente las reacciones del flujo para estos últimos casos de  $P_b$ , son los casos de estudio de la presente investigación.

### **2.2.3. Ondas de choque**

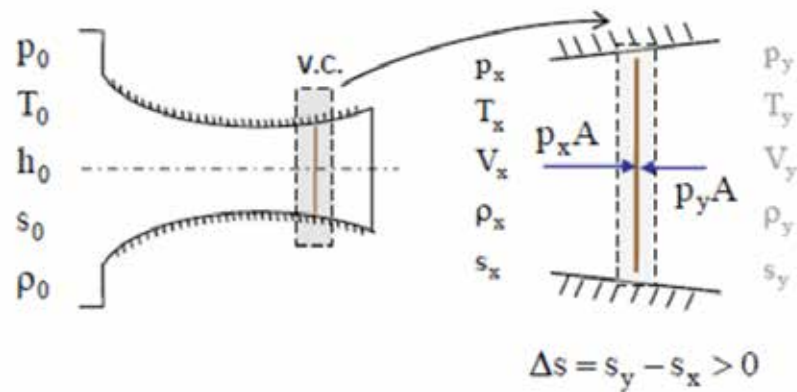
Las ondas de choque son generadas por disturbios infinitamente pequeños de presión que ocurren al acelerar un fluido a velocidades supersónicas y son altamente irreversibles, presentando cambios repentinos en las propiedades del flujo. A continuación, se desarrollarán las condiciones en las cuales se desarrollan las misma y como afectan al flujo.

#### **Ondas de choque normal**

Estas ondas se presentan en un plano normal al del flujo, de allí su nombre. Este proceso es altamente irreversible por lo que no puede considerarse isentrópico. Al ser las ondas de choque normales tan angostas (del orden de  $10^{-6}$  m) tienen altos gradientes de presión y de temperatura, en el sentido del flujo.

La aplicación de la segunda ley de la termodinámica a la onda de choque normal delgada y adiabática, revela que las ondas de choque normales sólo pueden causar un fuerte aumento de la presión del gas y deben ser supersónico aguas arriba y subsónico aguas debajo de la onda choque normal. De la misma manera, debido al aumento de temperatura en una onda de choque de muy poco espesor, los gradientes térmicos son elevados y siempre en el sentido del flujo ( $2 > 1$ ), lo que implica alta velocidad de transmisión de calor.

Se considera flujo estacionario sin transferencia de calor o interacciones de trabajo y sin cambios de energía potencial. Se denotan las propiedades del flujo inmediatamente corriente arriba de la onda de choque con el subíndice x y las propiedades del flujo inmediatamente corriente abajo, con el subíndice y (ver Figura 2) se tiene lo siguiente:



**Figura 2: Ondas de choque en la sección divergente de una tobera de Laval**

Fuente: G. Caraballo. Diapositivas de Dinámica de Gases – U.C. (2008)

Aplicando las ecuaciones de gobierno al volumen de control se derivan:

a) Ecuación de la conservación de la masa:

$$\rho_x V_x = \rho_y V_y \quad (\text{Ec. 1})$$

b) Ecuación de la cantidad de movimiento:

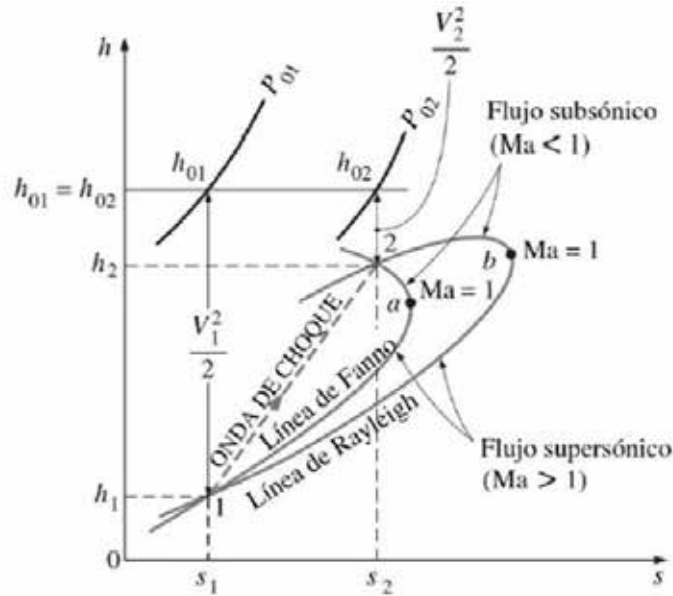
$$(P_x - P_y)A = \dot{m}(V_y - V_x) \quad (\text{Ec. 2})$$

c) Ecuación de la energía:

$$h_x + \frac{V_x^2}{2} = h_y + \frac{V_y^2}{2} \quad (\text{Ec. 3})$$

, tal como se muestra en la figura 3, los puntos de intersección entre las curvas del mismo

flujo másico por unidad de área representan los estados en que se cumplen las leyes de conservación antes y después de la onda de choque normal.

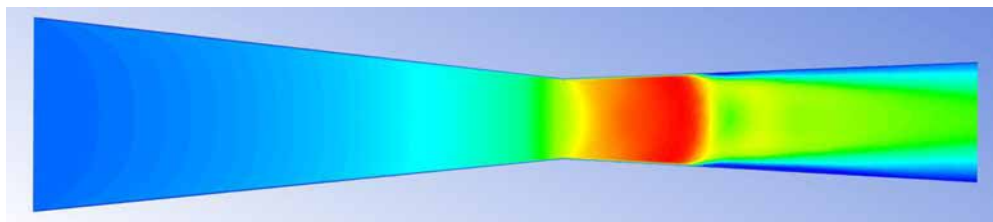


**Figura 3: Representación de una onda de choque en un diagrama h-s**

Fuente: G. Caraballo. Diapositivas de Dinámica de Gases – UC (2008)

Por su parte J. Anderson (2002) refiriéndose a la energía contenida justo antes de la onda de choque sostiene que:

El principio de la conservación de energía exige que la entalpía de estancamiento  $p_e$  significa que la temperatura de estancamiento de un gas ideal también permanece constante durante el choque. Sin embargo, se nota que la presión de estancamiento disminuye durante el choque debido a las irreversibilidades, mientras que la temperatura normal (estática) aumenta drásticamente debido a la conversión de energía cinética en entalpía y causa un gran descenso en la velocidad del fluido.



**Figura 4: Onda de choque normal para una relación de  $P_C > P_b > P_E$**

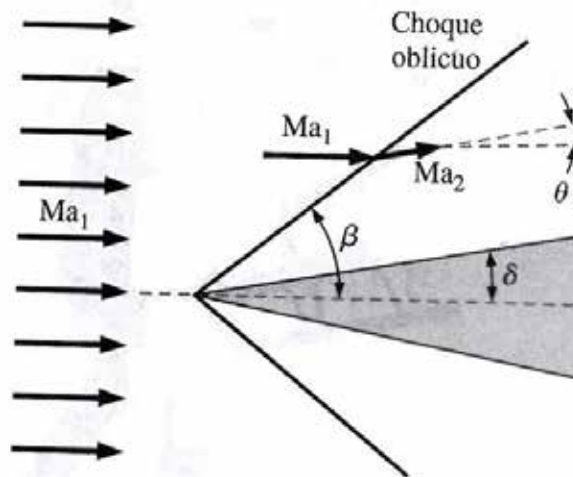
Fuente: C. Prieto. Trabajo de grado (2018) p.92

La figura 4, muestra la aparición de una onda de choque normal, dentro de la zona de divergencia de la tobera C-D, para la siguiente relación de presiones  $P_C > P_b > P_E$ , para finalmente desacelerarse el flujo a la velocidad previa antes de atravesar la garganta.

### Ondas de choque oblicuas

A diferencia de los choques normales, donde el número de Mach disminuye corriente abajo, mientras que, en los choques oblicuos, puede ser: subsónico, sónico o supersónico, dependiendo del número de Mach justo antes de generarse el choque y del ángulo de giro.

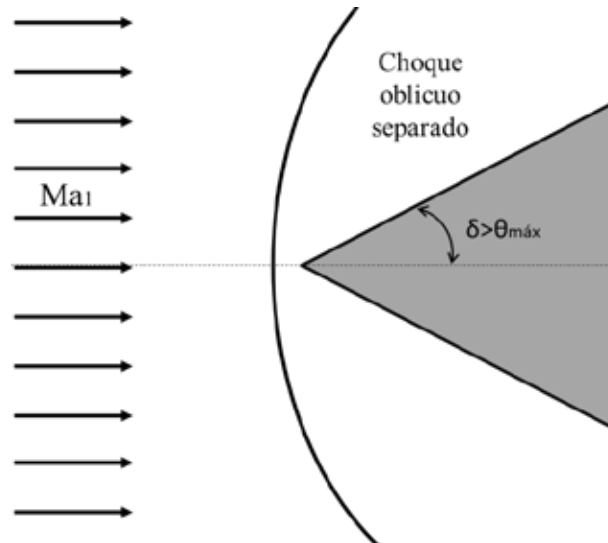
Para la explicación del ángulo de giro o ángulo de deflexión, considere un fluido incidiendo a velocidades super sónicas sobre una cuña delgada, cuyo ángulo es  $\theta$ . Debido a que el fluido no puede fluir a través de la cuña, el fluido de pronto gira en un ángulo conocido como ángulo de giro  $\beta$ . El resultado es una onda de choque oblicua recta, alineada con el ángulo de choque o el de onda  $\delta$  (Ver Figura 5).



**Figura 5**

Fuente: Çengel y Boles Termodinámica (2012) p.876

Sin embargo, Çengel (2012), enuncian que “un choque oblicuo separado se presenta corriente arriba de una cuña bidimensional de ángulo  $\theta$  cuando  $Ma_1$  es mayor al ángulo de deflexión máximo posible  $\beta_{max}$ . A un choque de este tipo se le llama choque oblicuo separado...” p.879



**Figura 6: Choque oblicuo separado**

Fuente: Çengel y Boles. Termodinámica (2012) p.879

Al descomponer los vectores de velocidades que aparecen en un choque oblicuo (Ver Figura 7), y tomando un pequeño volumen de control alrededor del choque, se puede asumir que todas las propiedades del fluido son aproximadamente idénticas antes y después de la aparición del choque y no existe ningún trabajo realizado por el flujo, ni hay transferencia de calor. En consecuencia, las ecuaciones para el estudio de los choques oblicuos vienen dadas de la siguiente manera

- a) Ecuación de conservación de masa

$$\rho_1 V_{1,n} = \rho_2 V_{2,n} \quad (\text{Ec. 4})$$

- b) Ecuación de la cantidad de movimiento

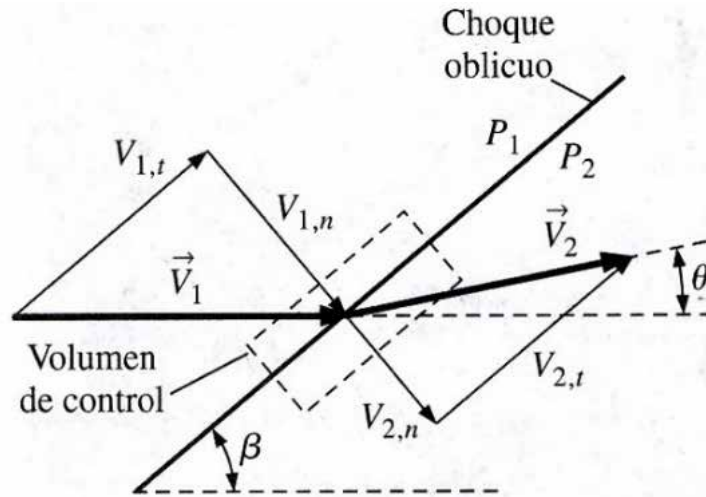
$$P_1 - P_2 = \rho_2 V_{2,n}^2 - \rho_1 V_{1,n}^2 \quad (\text{Ec. 5})$$

- c) Ecuación de la energía

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{1,n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{2,n}^2 \quad (\text{Ec. 6})$$

- d) - -Ma

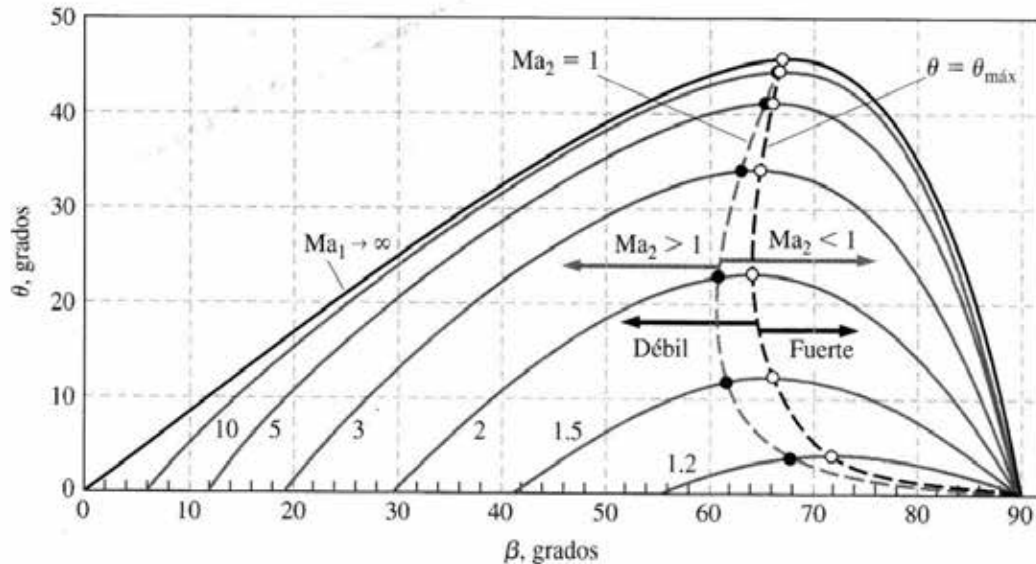
$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{Ma_1^2(k + \cos 2\beta) + 2} \quad (\text{Ec. 7})$$



**Figura 7: Vectores de velocidad descompuestos de un choque oblicuo**

Fuente: Çengel y Boles. Termodinámica (2012) p.877

La Figura 8, muestra un gráfico de  $\theta$  vs  $\beta$  para algunos valores de Ma. En esta gráfica se puede observar muchas propiedades del fluido.



**Figura 8: toda la variedad de ondas de choque posible para un determinado número de Mach de flujo libre.**

Fuente: Çengel y Boles. Termodinámica (2012) p.879

La gráfica desarrollada por Çengel y Boles, presentada y explicada en su publicación *Termodinámica* (2012), expresa lo siguiente:

La dependencia del ángulo de deflexión del choque oblicuo recto respecto del ángulo de choque para diferentes valores del número de Mach  $Ma_1$  corriente arriba. Los cálculos están hechos para un gas ideal con  $k=1.4$ . La línea negra punteada conecta los puntos con un ángulo de deflexión máxima ( $\theta = \theta_{max}$ ). Los puntos a la izquierda de esta línea, mientras que los puntos a la derecha de esta línea. La línea gris punteada conecta los puntos donde el número de mach corriente abajo es  $Ma_2 = 1$ . El punto corriente abajo ( $Ma_2 > 1$ ) está a la izquierda de esta línea, mientras que el punto corriente abajo ( $Ma_2 < 1$ ) queda a la derecha de esta línea. p.879

#### **2.2.4. Ondas de expansión de Prandtl-Meyer**

Cuando el flujo supersónico gira en dirección opuesta, se le conoce como flujo expansivo o de expansión. Al igual que el flujo de compresión que produce un choque oblicuo, el flujo cambia de dirección para preservar la masa. A pesar de esto un flujo de expansión no genera una onda de choque, al contrario, aparece una región expansiva continua denominada abanico de expansión, la cual está constituida por infinitas ondas de Mach, las que son denominadas ondas expansivas o de Prandtl-Meyer.

Lo anteriormente explicado indica que el flujo gira gradualmente, a diferencia de las ondas de choque oblicuas que lo hacen de manera instantánea, esto se debe a que cada onda de Mach sucesiva gira el flujo en una cantidad infinitesimal. Es importante destacar que en virtud de que cada onda expansiva es isentrópica, el flujo a lo largo de todo el abanico es también isentrópico.

En el transcurso de este fenómeno expansivo el número de Mach sufre un aumento a medida que la presión, densidad y temperatura disminuyen, muy similar al comportamiento del flujo cuando atraviesa la zona de divergencia de una tobera de Laval.

Las ondas expansivas de Prandtl-Meyer son inclinadas a un ángulo local de Mach  $\theta$  como lo muestra la figura 9. Sin embargo, para simplificar el estudio,

solamente se muestran tres ondas expansivas en la figura, no obstante, el número de ondas es infinito.

Çengel y Boles (2012). El ángulo de Mach de la primera onda expansiva se determina de manera sencilla como  $\mu_1 = \sin^{-1}(1/Ma_1)$ . De modo similar,  $\mu_2 = \sin^{-1}(1/Ma_2)$ , donde se debe ser cuidadoso al medir el ángulo con respecto a la nueva dirección del flujo corriente debajo de la expansión; a precisar, la dirección paralela de la pared superior a lo largo de la cuña si se ignora la influencia de la capa límite a lo largo de la pared. p.881

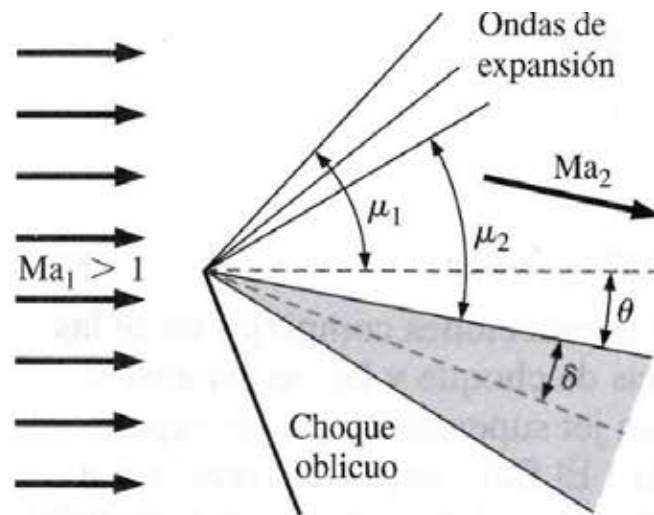
Para determinar el valor de  $Ma_2$  teniendo ya los valores de  $Ma_1$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , se calcula el ángulo función de Prandtl-Meyer el cual es el ángulo a través del cual se debe expandir el flujo tanto para los valores antes de la onda expansiva como para los posteriores a la misma. La ecuación para el cálculo de este ángulo viene dada por:

$$v(Ma) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (Ma^2 - 1)} \right] - \tan^{-1} (\sqrt{Ma^2 - 1}) \quad (\text{Ec. 8})$$

Para lograr obtener un flujo supersónico debe comenzar en  $v=0$  para  $Ma=1$ , e ir creciendo a medida que el número de Mach adquiere valores super sónicos ( $Ma>1$ ).

Una vez calculado  $v(Ma_1)$  y  $v(Ma_2)$ , se procede a calcular el **ángulo de giro en un abanico de expansión**, cuya ecuación es:

$$\theta = v(Ma_2) - v(Ma_1) \quad (\text{Ec. 9})$$



**Figura 9: Ondas de expansión generadas por una cuña bidimensional.**  
 Fuente: Çengel y Boles Termodinámica (2012) p.881

Çengel y Boles (2012) afirman que “El flujo gira un ángulo  $\theta$ , y el número de Mach se incrementa a través del abanico de expansión.” (p.881), sustentando en los autores, se puede concluir que, las ondas expansivas inducen una aceleración al flujo, lo cual lo lleva a velocidades super sónicas.

### 2.2.5. Separación de la capa límite

La separación del flujo en la sección divergente de la tobera es uno de los muchos fenómenos que se producen en flujos internos sometidos a régimen supersónico, cuando una onda de choque interactúa con la capa límite, ocurren diversos fenómenos como inestabilidad, vórtice de flujo, ondas de presión, mezcla aleatoria y turbulencia (ver cuadro 1).

La separación de la capa límite se debe a las fuerzas tangenciales que incrementan la fricción en las zonas de presión de la capa interna entre el flujo y la pared de la tobera; esta crea inestabilidad seguido por muchos choques débiles, que desaceleran al gas. El aumento adverso del gradiente de presión del choque Incidente provoca que la capa límite se separe aguas abajo de la pared de la tobera formando una capa de cizallamiento. La región que limita la capa de cizallamiento y la pared de la tobera se llama la zona de separación y también se conoce como la zona de





circulación. La inestabilidad iniciada por la interacción de la onda de choque con la capa límite en la sección divergente de una tobera supersónica hace que el gas de escape pierda la acumulación de energía cinética del fluido, por lo tanto, existe una desaceleración de la velocidad del flujo y disminución del empuje. Para flujo interno, estos efectos se traducen en pérdida total de presión e inestabilidad, y la pérdida de rendimiento del control de flujo es una gran desventaja.

Con el aumento progresivo del número de Mach, se reduce el mínimo de la tensión de cizallamiento. Se llega a cero en un punto donde se forma una burbuja de separación diminuta (separación incipiente). Con un mayor aumento en el número de Mach, la zona o burbuja de separación crece y la interacción se hace más fuerte.

Asimismo, a altos números de Reynolds, las pequeñas perturbaciones generadas en el punto de desarrollo se amplifican en las capas de cizallamiento formadas entre el flujo y la zona de re-circulación, desembocando remolinos que se alternan de un lado a otro con la consiguiente asimetría del flujo. Debido a esta inestabilidad, se crea una estructura bifurcada entre las dos zonas de separación del flujo.

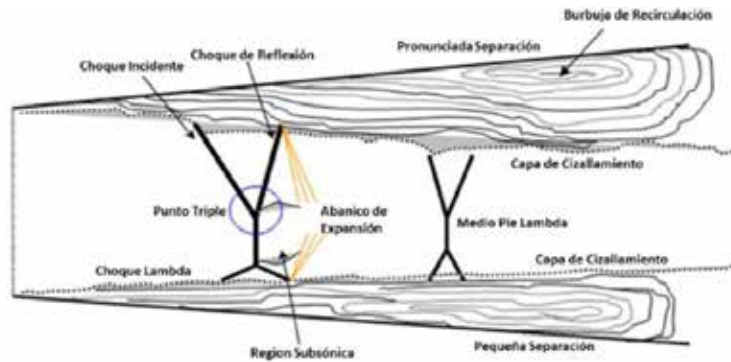
El choque Resultante se crea a partir de un choque Incidente que surge desde el punto de la pared superior donde inicia la zona de separación y estos se encuentran en un punto común llamado punto triple, donde el choque de Reflexión y el choque vertical Lambda también se encuentran. El choque de Reflexión rebota desde la capa de cizallamiento como un abanico de expansión que rebota de nuevo por la reflexión de la zona de circulación opuesta como una onda de compresión. Este patrón se moverá aguas abajo repitiéndose. Las corrientes de deslizamiento onduladas que emergen del punto triple crean una zona de un canal de flujo convergente – divergente que genera una región subsónica. La forma de triángulo es conocida como pie Lambda, y el tamaño de este choque se convierte en la mitad del tamaño corriente abajo (ver figura 10) y con el tiempo disminuye de distancia entre la salida y la región de pluma (después de la salida de la tobera). Cuando se incrementa la relación de presión, los pies de choque Lambda se alejan de la garganta y la zona de separación se transforma de asimétrica a simétrica (ver figura 11)

**Cuadro 1: Patrones de Interacción para distintos rangos de número de Mach**

Número de Mach	Patrón de interacción	Condición	Representación gráfica
$1 < M_1 < 1,2$	Débil	No hay separación	
$1,2 < M_2 < 1,32$	Moderada	Separación incipiente	
$1,32 < M_3 < 1,5$	Fuerte	Separación considerada	
$M_4 > 1,5$	Muy Fuerte	Sistema de múltiples ondas de choque	

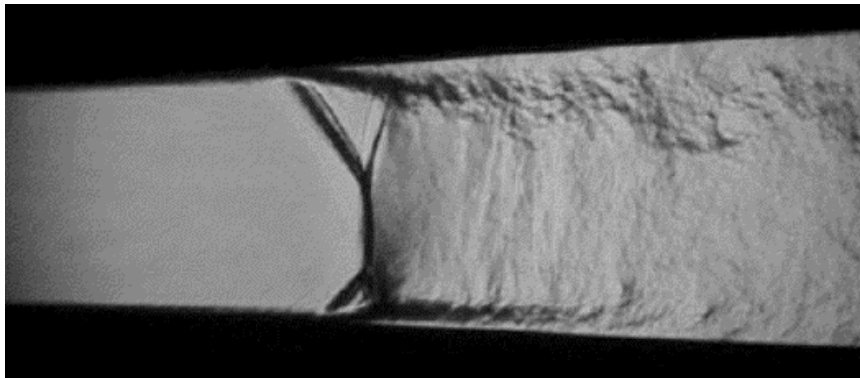
Fuente: E.M. S. Ekanayake (2010)

Anteriores investigaciones de la separación de la capa límite a lo largo de las paredes de toberas supersónicas mostraron que se puede asumir que esta se separa siempre que la re-compresión de la onda de choque Incidente excede la presión a la salida. Generalmente, efectos similares deberían ocurrir si el ángulo de divergencia de la tobera fuese demasiado grande generando aumentos perjudiciales en los gradientes de presión aguas abajo de la onda de choque donde el flujo es subsónico. Algunos trabajos experimentales realizados en flujos externos, muestran que en la interacción de la onda de choque y la capa límite turbulenta los aumentos de presión en el punto de separación son independientes de la geometría de la interacción y solo dependen del número de Mach aguas arriba del choque. Tal suposición también podría aplicarse a flujos sobre expandidos en una tobera, donde por lo general, se espera que sea requerida la fuerza de una onda de choque oblicua para que se genere la separación de capa límite. (E.M. S. Ekanayake, 2010)



**Figura 10: Esquemización de los parámetros involucrados en la separación de capa límite para flujos internos**

Fuente: E.M. S. Ekanayake (2010)



**Figura 11: Separación de flujo e inestabilidad de la capa de cizallamiento**

Fuente: E.M. S. Ekanayake (2010)

### 2.2.6. Efecto Coandâ

Se observa con frecuencia que las estelas se adhieren y fluyen alrededor de límites sólidos cercanos y una vez abandonan los mismos, intentan preservar la dirección que la geometría les indica, tanto en flujos líquidos como gaseosos, esta clase de fenómeno se conoce como efecto Coandâ. En los últimos años se ha dedicado especial atención a este fenómeno, puesto que existe la posibilidad de usarse en aeronaves con despegue y aterrizajes cortos, para logra una vectorización del flujo.

Es un flujo continuo bidimensional, laminar y turbulento que se desarrolla como una lámina de chorro. En 2012, A. Dumitrache, F. Frunzulica y T.C. Ionescum en su trabajo titulado “Mathematical Modelling and Numerical Investigations on the Coanda Effect” demostraron que este flujo se puede aproximar con soluciones

similares tanto para el régimen laminar, como para el turbulento. Principalmente utilizando transformaciones de Falkner-Skan, ecuaciones de momento que pueden reducirse a una ecuación diferencial ordinaria.

### 2.2.7. Modelos matemáticos

Se presentan los modelos matemáticos para estudiar el campo de flujo, por medio de su geometría y tomando como base las leyes de conservación.

#### Ecuación de la continuidad

En la ecuación 10 se expresa la ecuación de continuidad como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{Ec. 10})$$

Donde  $\mathbf{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$  y  $\nabla$  es la divergencia de la velocidad y el término

continuidad no hace referencia a ningún sistema de coordenadas en específico, es la forma para expresarla empleando diversos sistemas de coordenadas, en el caso de un flujo incompresible, en el que la densidad de una partícula de fluido no cambia

en forma diferencial (Ec. 11) y vectorial (Ec. 12) respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{Ec. 11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{Ec. 12})$$

#### Ecuación de momentum

La ecuación que expresa el momentum viene dada por:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + S_M \quad (\text{Ec. 13})$$

Como se muestra en la anterior el esfuerzo cortante  $\boldsymbol{\tau}$ , está relacionado con la velocidad de deformación por:

$$\tau = \mu(\nabla + (\nabla\nabla)^T) - \frac{2}{3}\delta\nabla \cdot V \quad (\text{Ec. 14})$$

Las ecuaciones diferenciales de momentum se pueden escribir para flujos incompresibles, utilizando la derivada material (Ec. 15, 16 y 17):

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu\nabla^2 u \quad (\text{Ec. 15})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu\nabla^2 v \quad (\text{Ec. 16})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu\nabla^2 w \quad (\text{Ec. 17})$$

Y en forma vectorial:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p - \rho g + \mu\nabla^2 V \quad (\text{Ec. 18})$$

Se han añadido tres ecuaciones adicionales a la ecuación de continuidad para obtener cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. Con las condiciones de frontera iniciales apropiadas, es posible obtener una solución que nos dé un campo de velocidad y presión para este flujo incompresible.

### **Ecuación de la energía total**

Como se muestra en la siguiente ecuación la energía total se expresa como:

$$\frac{\partial(\rho h_{tot})}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V h_{tot}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (V \cdot \tau) + V \cdot S_M + \quad (\text{Ec. 19})$$

Donde  $h_{tot}$  es la entalpía total, relacionada con la entalpía estática h (T, p) por la siguiente ecuación:

$$h_{tot} = h + \frac{1}{2}U^2 \quad (\text{Ec. 20})$$

El término  $\tau_{xy}$  representa el trabajo debido a los esfuerzos viscosos y es llamado término de trabajo viscoso y el término  $\tau_{xx}$  representa el trabajo debido a las fuentes de momentum externo y se desprecia en la actualidad.

### Ecuación de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones que definen el comportamiento dinámico de un fluido. Derivan de aplicar los principios de conservación de la mecánica y de la termodinámica al fluido, de donde se obtiene una formulación integral que generalmente se suele transformar en una formulación diferencial más práctica. Existen diferentes formulaciones para estas ecuaciones, en función del problema que se desea resolver.

Muchos fluidos exhiben una relación lineal entre las componentes del esfuerzo y los gradientes de velocidad. Se llaman fluidos newtonianos a tales materiales, que incluyen fluidos comunes tales como agua, aceite y aire. Si además de la linealidad se exige que el fluido sea isotrópico (las propiedades del fluido son independientes de la dirección) es posible relacionar las componentes del esfuerzo y los gradientes de velocidad empleando sólo dos propiedades del fluido, la viscosidad  $\mu$  y el segundo

-velocidad-gradiente, conocidas como ecuaciones constitutivas, se presentan en las ecuaciones:

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot V \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{Ec. 21})$$

$$\sigma_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot V \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{Ec. 22})$$

$$\sigma_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot V \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{Ec. 23})$$

Para la generalidad de los gases, y con exactitud para los gases monoatómicos, el segundo coeficiente de viscosidad está relacionado con la viscosidad como se muestra en la ecuación:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{Ec. 24})$$

Condición conocida como hipótesis de Stokes. Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos normales es igual a la presión, es decir:

$$-\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = P \quad (\text{Ec. 25})$$

Utilizando las ecuaciones 86; 87 y 88, se puede demostrar que esto siempre se cumple para un líquido en el que  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , y con la hipótesis de Stokes también se cumple para un gas.

Si sustituimos las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de momentum, se obtiene, utilizando las hipótesis de Stokes:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 26})$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 27})$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 28})$$

Donde se ha supuesto un fluido homogéneo, es decir, que las propiedades del fluido (incluida la viscosidad) son independientes de la posición. En el caso de un flujo incompresible la ecuación de continuidad permite reducir las ecuaciones anteriores como muestra las ecuaciones:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{Ec. 29})$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{Ec. 30})$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{Ec. 31})$$

Éstas se denominan ecuaciones de Navier-Stokes; con estas tres ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de continuidad se tienen cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , y  $p$ . Se supone que las propiedades de viscosidad y densidad del fluido se conocen. Con las condiciones de borde apropiadas, es de esperar que se puedan resolver las ecuaciones. Varias geometrías relativamente sencillas permiten soluciones analíticas; aunque para muchos flujos de interés ingenieril se han determinado soluciones numéricas. Puesto que las ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, no se puede confiar en que la solución que se obtenga se pueda reproducir realmente en el laboratorio; es decir, las soluciones no son únicas. Por ejemplo, un flujo laminar y uno turbulento pueden tener condiciones iniciales y de frontera idénticas, a pesar de que los dos flujos (las dos soluciones) son muy diferentes. Se puede expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en forma vectorial multiplicando las ecuaciones por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ , respectivamente, y sumando:

$$\frac{Du}{Dt} \hat{i} + \frac{Dv}{Dt} \hat{j} + \frac{Dw}{Dt} \hat{k} = \frac{DV}{Dt} \quad (\text{Ec. 32})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \nabla p \quad (\text{Ec.33})$$

$$\nabla^2 u \hat{i} + \nabla^2 v \hat{j} + \nabla^2 w \hat{k} = \nabla^2 V \quad (\text{Ec.34})$$

Donde se ha utilizado el operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Ec. 35})$$

Combinando lo anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes adoptan la forma vectorial como:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 V \quad (\text{Ec.36})$$

Esta forma nos permite utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando otros sistemas de coordenadas (rectangulares, cilíndricas y esféricas). (J. Anderson, 2002).

### 2.2.8. Modelo de turbulencia Eddy Viscosity

C. Mataix, (1998). Una propuesta sugiere que la turbulencia se compone de pequeños remolinos que se forman y disipan continuamente, en la cual los esfuerzos de Reynolds se asumen proporcionales a los gradientes de la velocidad media. Esto define a los modelos “Eddy-Viscosity”. Esta hipótesis supone que los esfuerzos de Reynolds pueden estar relacionados con los gradientes de velocidad promedio y la viscosidad de “Eddy”, a través de la hipótesis del gradiente de difusión. Se representan mediante:

$$-\overline{\rho u x u} = \mu_t (\nabla U + (\nabla U)^T) - \frac{2}{3} \delta (\rho k + \mu_t \nabla \cdot U) \quad (\text{Ec. 37})$$

Donde  $\mu_t$  es la viscosidad turbulenta o viscosidad de Eddy.

Análoga a la hipótesis de viscosidad de Eddy, la difusividad de Eddy es la hipótesis que afirma que los flujos de Reynolds son un escalar linealmente relacionadas con el gradiente de la media escalar como se muestra en la ecuación 38.

$$-\overline{\rho u \phi} = \Gamma_t \nabla \phi \quad (\text{Ec. 38})$$

Donde  $\Gamma_t$ , el número de turbulencia de Prandtl.

Las ecuaciones anteriores sólo pueden expresar los términos de las fluctuaciones de la turbulencia en función de la velocidad promedio si la viscosidad turbulenta  $\mu_t$  se conoce, tomando en cuenta que tanto los modelos  $k - \epsilon$  y  $k - \omega$  proporcionan esta variable; sujeto a esta hipótesis, tanto la ecuación de momento promedio de Reynolds y la ecuación escalar de transporte se pueden expresar como:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = \mathbf{B} - \nabla p' + \nabla \cdot (\mu_{\text{eff}} (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T)) \quad (\text{Ec. 39})$$

Donde  $\mathbf{B}$  es la suma de las fuerzas en el cuerpo y  $\mu_{\text{eff}}$  es la viscosidad efectiva definida en la ecuación:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t \quad (\text{Ec. 40})$$

Y  $p'$  es la presión modificada definida por:

$$p' = p + \frac{2}{3} \rho k + \frac{2}{3} \mu_t \bar{\nabla} \cdot \nabla \quad (\text{Ec.41})$$

### 2.2.9. Modelo de turbulencia kappa-epsilon ( $k - \epsilon$ )

El modelo de turbulencia empleado para el flujo multifásico es una generalización del modelo  $K - \epsilon$  para una sola fase. Implementando el modelo  $K - \epsilon$  sólo para la fase continua no teniendo en cuenta los efectos de la fase dispersa sobre la turbulencia de la fase continua (C. Mataix, 1998).

$$\frac{\partial (r_\alpha \rho_\alpha k)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_\alpha \rho_\alpha U_\alpha k) = \nabla \cdot \left( r_\alpha \frac{\mu_{\text{eff}\alpha}}{C_k} \nabla k \right) + P_k - \rho_\alpha \epsilon \quad (\text{Ec. 42})$$

$$\frac{\partial(r_{\alpha}\rho_{\alpha}\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_{\alpha}\rho_{\alpha}U_{\alpha}\varepsilon) = \nabla \cdot \left( r_{\alpha} \frac{\mu_{\text{eff}\alpha}}{C_{\varepsilon}} \nabla \varepsilon \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \rho_{\alpha} \quad (\text{Ec. 43})$$

Donde:

$k$ =energía cinética de turbulencia

= Disipación viscosa

El modelo  $k - \varepsilon$  tiene cinco constantes, que garantizan la homogeneidad dimensional. Las cuales son:

$$C_{\mu} = 0,09 \quad C_1 = 1,44 \quad C_2 = 1,92 \quad k = 1,0 \quad \varepsilon = 1,3$$

Si bien los modelos estándar de dos ecuaciones, como el modelo  $k - \varepsilon$ , dan una buena predicción para muchos problemas de fluidos en ingeniería, existen otras aplicaciones para las cuales estos modelos pueden no ser los más adecuados. Entre estos se encuentran: Flujos con separación de capa límite, corrientes con cambios bruscos en la tasa promedio de los esfuerzos, flujos rotativos, flujos sobre superficies curvas. Entre las principales ventajas e inconvenientes del modelo de turbulencia kappa - épsilon son las siguientes

#### **Ventajas:**

Sólo se necesita fijar las condiciones iniciales y de contorno.

Resultados satisfactorios para una gran cantidad de flujos.

Es el modelo turbulento más ampliamente utilizado en la mayoría de flujos en aplicaciones industriales.

Se dispone de leyes de pared desarrolladas como condiciones de contorno para este tipo de modelos.

Desde el punto de vista de modelado computacional, presenta mejor rendimiento en flujo rotacional.

#### **Inconvenientes:**

Implementación más compleja que los modelos algebraicos debido a la introducción de dos ecuaciones diferenciales adicionales.

Pobres resultados en casos como: flujos no confinados, flujos con grandes gradientes longitudinales, flujos turbulentos completamente desarrollados en conductos no circulares.

### 2.2.10. Modelo de turbulencia kappa-omega k – $\omega$ .

Una de las ventajas de la formulación k –  $\omega$  es el tratamiento para zonas cercanas a la pared para cálculos con bajo número de Reynolds. El modelo no requiere la resolución de ecuaciones no lineales complejas, como en el modelo k –  $\epsilon$  y por lo tanto es más preciso y más robusto. El modelo k –  $\omega$  asume que la viscosidad turbulenta está relacionada con la energía cinética de la turbulencia (C. Mataix, 1998), mediante la relación siguiente:

$$\mu_f = \rho \frac{k}{\omega} \quad (\text{Ec. 44})$$

Donde  $\omega$  = Rata de disipación específica

El punto inicial de la presente formulación es que el modelo k –  $\omega$  desarrollado por Wilcox resuelve dos ecuaciones de transporte, una para la energía cinética de la turbulencia, k y otra para la frecuencia de la turbulencia.

#### Ecuación

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U k) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - B' \rho k \omega \quad (\text{Ec. 45})$$

#### Ecuación

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \omega) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k\omega}} \right) \nabla \omega \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - B' \rho k \omega^2 \quad (\text{Ec. 46})$$

Las variables independientes, la densidad,  $\rho$ , y el vector de velocidad, U, son tratadas como variables conocidas provenientes del método de Navier-Stokes.  $P_k$  es la tasa de producción de turbulencia, la cuales se calculan en el modelo k –  $\omega$ .

### **2.2.11. Modelo shear stress transport (SST)**

C. Mataix, (1998). El modelo k- basado en el transporte de esfuerzos cortantes, brinda una alta precisión en la predicción de la aparición y cantidad de la separación de flujos bajo condiciones de gradientes de presión adversas; esta alta precisión se obtiene limitando la formulación de “Eddy Viscosity” restringiendo el limitador de la capa límite de la pared. Su formulación se basa en la distancia más cercana a la superficie y en las variables de flujo.

### **2.2.12. Modelos de la capa límite**

C. Mataix (1998). La capa límite es la zona del campo fluido próxima a un contorno sólido en la que se manifiestan especialmente los efectos viscosos. Debido a la viscosidad y a la condición de no deslizamiento, cerca de cualquier contorno sólido aparece un gradiente de velocidades en la dirección normal a dicho contorno. Este gradiente de velocidades condiciona el intercambio energético entre las distintas partículas de fluido con velocidades diferentes, originando vorticidad y turbulencia.

El problema básico para la modelización numérica del intercambio energético en la capa límite sobre cualquier frontera sólida consiste en la definición correcta de las velocidades de las partículas en una zona muy próxima a dicha frontera. Esto implica una densidad de mallado muy elevada, necesaria para capturar los distintos fenómenos que se producen dentro de la capa límite.

Esta dificultad se ha abordado usando varias aproximaciones, que se pueden englobar en cuatro grupos: modelos de distribución de las pérdidas, modelos de capa de cortadura, modelos de capa límite y leyes de pared, que son brevemente explicados a continuación.

### **2.2.13. Modelo matemático del efecto Coandâ**

A. Dumitrache (2012) consideraron la posibilidad del aumento del empuje producido por el arrastre del fluido en el flujo del chorro. La vectorización del empuje de las aeronaves, es una tecnología clave para los vehículos aéreos, tanto actuales como los del futuro, y puede lograrse utilizando el efecto Coandâ para alterar el ángulo del chorro primario desde una boquilla de escape del motor. Afirmando que “El problema considerado aquí es solo una aproximación cruda del fenómeno físico.

Sin embargo, creemos que las soluciones singulares que desarrollamos allanan el camino hacia un enfoque más preciso del problema.”

Consideremos el constante flujo bidimensional de un fluido incompresible desarrollado sobre una superficie cilíndrica como un chorro de hojas. Las ecuaciones de tipo de capa límite se escriben en un sistema de coordenadas curvilíneas que se muestra en la Figura 1. Suponiendo que el ancho de la ranura del chorro es pequeño en comparación con el radio de curvatura del cilindro,  $R$ , las aproximaciones de la capa límite se pueden aplicar, lo que simplifica ecuaciones de movimiento

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = 0 \quad (\text{Ec. 47})$$

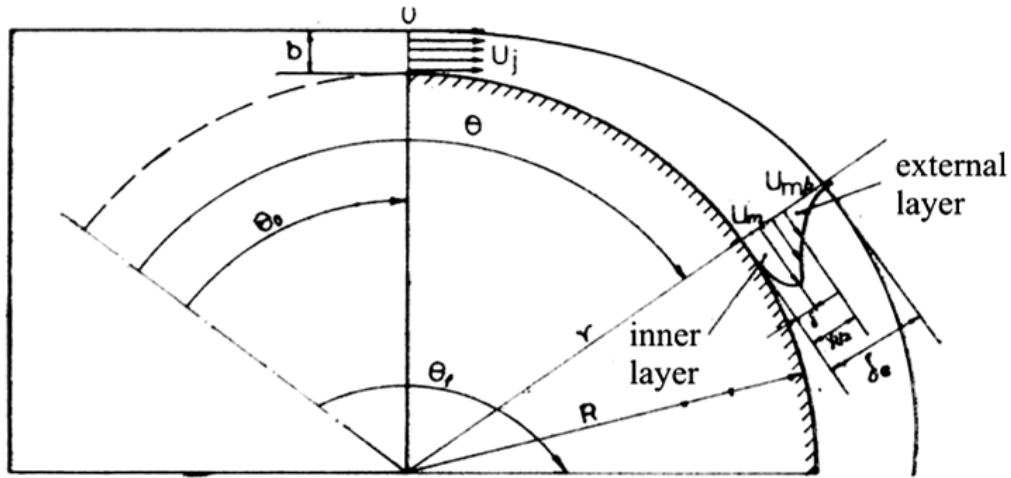
$$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial r} \quad (\text{Ec. 48})$$

$$\rho \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{Ec. 49})$$

Donde la tensión de corte laminar es  $\tau = \mu \frac{\partial V_\theta}{\partial r}$  y la tensión de corte turbulenta, donde se descuida la contribución de la subcapa laminar (omita el término  $\mu \frac{\partial V_\theta}{\partial r}$ ), tiene la forma  $\tau = \mu_t \frac{\partial V_\theta}{\partial r}$ , con  $\mu_t$  la viscosidad turbulenta, supuesta constante en una sección transversal como capa de corte, es decir,  $\frac{\mu_t}{\nu} = \sigma \theta^c$ .

Las variables en las ecuaciones 47 a 49 pueden hacerse adimensionales, como sigue:

$$V_r^* = \frac{V_r}{U_j}, V_\theta^* = \frac{V_\theta}{U_j}, r^* = \frac{r}{R}, p^* = \frac{P}{\rho U_j^2}, Re = \frac{U_j R}{\nu}, y^* = \frac{y}{R} = r^* - 1, v = \mu / \rho, y^* \ll$$



**Figura 12: Sistema coordenado y anotaciones del efecto Coandă**

Fuente: A. Dumitrache (2012)

Donde  $U_j$  es la velocidad del chorro a la salida de la boquilla (asumiendo constante la sección transversal),  $Re$  es el número de Reynolds basado en el radio del cilindro e  $r$  es la distancia radial desde la superficie del cilindro, es decir,  $r = R$ .

La ecuación de continuidad sin dimensiones (47) es satisfecha por una función de flujo, elegida de tal manera que  $v_r^* = \left(-\frac{1}{r^*}\right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)$  y  $v_\theta^* = \frac{\partial \Psi}{\partial r^*}$ . Dado que  $\epsilon$  es mucho más pequeño que la unidad, puede ser descuidado en comparación con la unidad en la ecuación sin dimensiones (48). Introduciendo una variable de modelado de la forma.

$$\eta = Re \cdot y^* \cdot \frac{c+1}{\sigma} \theta^{(c+1)(\alpha-1)} \quad (\text{Ec. 50})$$

Y con la función de corriente elegido como

$$\Psi = \theta^{\alpha(c+1)} f(\eta) \quad (\text{Ec. 51})$$

La ecuación (48) se puede transformar en la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$f^m + \alpha f f' + (1 - 2\alpha) f'^2 = 0 \quad (\text{Ec. 52})$$

#### **2.2.14. Niveles de aproximación numérica**

El desarrollo de las técnicas numéricas y su aplicación a cualquier ciencia o tecnología han dado lugar al desarrollo y a la concienciación generalizada de uno de los conceptos básicos en ingeniería como es el de grado de aproximación. Esta idea es bastante clara si se considera que lo que se pretende con cualquier técnica numérica es conocer las variables físicas a partir de la resolución numérica de una serie de ecuaciones que gobiernan el fenómeno.

Se han de definir y establecer las distintas aproximaciones que introducen los métodos numéricos. En lo referente a la Mecánica de Fluidos, la primera aproximación que aparece es el planteamiento del modelo físico-matemático que defina el comportamiento real de un determinado flujo. Dicho modelo matemático está habitualmente basado en la hipótesis del continuo, válida para la mayor parte de problemas industriales, pero que tiene sus limitaciones para casos extremos de flujos de gases. Una vez hecha esta salvedad, aplicando las leyes básicas de la física clásica se puede establecer una serie de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento matemático de toda partícula fluida. La resolución exacta de dichas ecuaciones serviría para determinar completamente cualquier movimiento en el seno de un fluido. Se puede decir que un modelo matemático se define únicamente tras haber considerado el nivel de aproximación a la realidad requerido a la hora de obtener la exactitud deseada en el cálculo de una serie de variables dependientes. Desafortunadamente, debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales que aparecen, a la complejidad geométrica de los flujos, y a la complejidad de las condiciones de contorno iniciales, no resulta posible obtener soluciones analíticas de dichas ecuaciones de gobierno.

Establecidas las ecuaciones de gobierno resulta imprescindible introducir una segunda aproximación al problema. La forma clásica de abordarlo sería construir un modelo a escala reducida del flujo en cuestión y analizarlo experimentalmente en el laboratorio. La aproximación numérica implica introducir algunas hipótesis simplificadas que aproximen lo más posible los resultados finales a los que se

obtendrían si se pudiera calcular la solución exacta. Dichas hipótesis se dirigen habitualmente hacia la simplificación tanto de la geometría a estudiar como de las ecuaciones a resolver. Obviamente, al no disponerse de la solución analítica exacta resulta bastante complicado establecer de antemano qué hipótesis sirven y cuales son descartables y, por tanto, en cualquier simulación aplicada a la Mecánica de Fluidos, es preciso dedicar mucho esfuerzo al análisis de los resultados obtenidos antes de aceptarlos como válidos.

Una vez definidas las ecuaciones diferenciales simplificadas, aparece otro problema relacionado con el posible tratamiento que se pueda hacer de dichas ecuaciones usando técnicas computacionales. Por medio de los ordenadores resulta muy fácil resolver una ecuación o sistema de ecuaciones algebraico, sin embargo, las ecuaciones que estudian el movimiento de los fluidos son ecuaciones diferenciales no lineales. Resulta obligatorio realizar la transformación de las ecuaciones de forma que puedan ser resueltas por un ordenador. El paso de las ecuaciones diferenciales a sus equivalentes lineales constituye otro nivel de aproximación y normalmente recibe el nombre de discretización de las ecuaciones.

En cuanto a la geometría a estudiar, se debe señalar que la aproximación a la que debe someterse no sólo es de orden descriptivo respecto a su contorno, sino que además ha de establecerse la definición del espacio ocupado por el fluido. En este sentido, resulta imprescindible referir los puntos a un determinado sistema de coordenadas en los que se pretenderá resolver las ecuaciones para obtener soluciones de las variables deseadas. Aunque el campo fluido sea un continuo, no se puede pretender resolver las ecuaciones en todos los puntos de un determinado volumen, porque entonces se tendría un número enorme de ecuaciones a resolver. Por tanto, hay que elegir cierto conjunto de puntos en los que se resolverán las mencionadas ecuaciones y que serán los puntos dónde finalmente se conocerán los valores de las variables fluidas. La definición de estos puntos es lo que se denomina habitualmente discretización espacial del dominio (también se habla de generación del mallado). El

proceso descrito no deja de ser otra aproximación que se introduce en el cálculo y que define el nivel de aproximación espacial.

En el caso de tener ecuaciones que dependan de la variable tiempo (flujo no estacionario) es esencial la definición de un nivel de aproximación temporal. No es posible tampoco estudiar la evolución de las variables en el tiempo de forma continua. El nivel indicará la forma de modelizar la evolución real introduciendo lo que se denomina discretización temporal del sistema de ecuaciones. A partir de la solución calculada se podrá realizar un promediado temporal oportuno para estudiar ciertas características medias de flujo que dependan de la evolución de las variables con el tiempo.

Finalmente, se pueden manipular las ecuaciones eliminando ciertos términos cuya influencia en un determinado problema se considere despreciable. La conclusión de que algún término no afecta a la solución de un determinado flujo se debe alcanzar tras analizar detenidamente la sensibilidad del problema ante valores dispares de dicho término. Normalmente dicho estudio se hace tras dimensionalizar convenientemente las ecuaciones y realizar el correspondiente análisis de semejanza (técnicas asintóticas). Esta cuestión es de importancia capital en la Mecánica de Fluidos y está en el origen de cualquier estudio experimental. Desde el punto de vista numérico, la eliminación de algún término en las ecuaciones introduce lo que se denomina nivel de aproximación dinámico de las ecuaciones consideradas.

Resumiendo, desde el modelo matemático (ecuaciones diferenciales no lineales) que aproxima la realidad física en un medio continuo se llega a un número finito de ecuaciones algebraicas que eliminan algún término de las ecuaciones de partida y que aproximan la evolución temporal real que, tras resolver con técnicas apropiadas, proporcionan una aproximación al valor de las variables incógnita en los puntos elegidos como discretización espacial del dominio de cálculo. En definitiva, se establece un nivel de aproximación numérico límite por debajo del cual será imposible acercarse al valor real de las variables en los puntos elegidos. Sin embargo, desde un punto de vista ingenieril, el proceso descrito es perfectamente válido y ha

significado a lo largo de la evolución de las técnicas numéricas, la posibilidad de mejorar diseños y ahorrar mucho esfuerzo que de otra manera supondría trabas insalvables a la evolución de muchos sectores industriales. En la Figura 13 se muestra gráficamente la panorámica explicada en este apartado (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017)



**Figura 13: Técnicas de aproximación numérica en MF**

Fuente: ANSYS CFX-SolverTheory Guide (2017)

### 2.2.15. Método de solución numérica

(J. Anderson, 2002) Existen dos métodos fundamentales para el diseño y el análisis de sistemas en ingeniería relacionados con el flujo de fluidos: uno es la experimentación y otro es el cálculo. La experimentación, es basada mediante la construcción de modelos que son ensayados en instalaciones, mientras el segundo, el cálculo significa la resolución de ecuaciones diferenciales, estas ecuaciones se resuelven por métodos analíticos tradicionales o por métodos alternativos como se aplica a este trabajo, la cual es el método de volumen finito, en ambos métodos se puede hacer el uso de las herramientas computacionales para rapidez de cálculos.

Ambos métodos se complementan entre sí, por ejemplo, los ingenieros podrían obtener propiedades globales, como sustentación, fuerza de arrastre, caída de presión o potencia, experimentalmente; pero emplean la CFD para obtener detalles acerca del campo de flujo, como los esfuerzos de corte, velocidad y perfiles de presión y líneas de corriente. Además, los datos experimentales se emplean con frecuencia para

validar soluciones de CFD al comparar cantidades globales determinadas de manera computacional y experimental. La CFD se emplea para reducir la cantidad necesaria de análisis experimental. Actualmente la dinámica de fluidos computacional puede manejar flujos laminares, pero los flujos turbulentos de interés práctico son difíciles de resolver sin tener que recurrir a los modelos de turbulencia. Por desgracia, ningún modelo de turbulencia es universal y una buena solución en CFD de flujo turbulento depende de que tan apropiado sea el modelo de turbulencia aplicado. A pesar de esta limitación, los modelos estándares producen resultados razonables para muchos problemas prácticos de ingeniería. Continuando con lo antes dicho, se tiene que el punto de partida de cualquier método numérico es el modelo matemático, la selección de las ecuaciones diferenciales o integrales y las condiciones de borde. Se elige un modelo apropiado para la aplicación (flujos compresibles o incompresibles, turbulentos, de dos o tres dimensiones, etc.). Como ya dijimos, este modelo podría incluir simplificaciones de las leyes de conservación. Un método de solución es designando un modelo para una ecuación en particular seleccionada.

#### **2.2.16. Método de discretización**

Después de seleccionar el modelo matemático, se tiene que elegir un método de discretización apropiado, un método de aproximación de las ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en estudio de localizaciones discontinuas en espacio y tiempo. Hay muchos enfoques, pero los más importantes son: diferencia finita (FD), volumen finito (FV) y los métodos de elemento finito (FE). Cada método produce la misma solución si el mallado es muy refinado. Sin embargo, algunos métodos son más apropiados para alguna clase de problemas que otros. A menudo la preferencia es determinada por la actitud del desarrollador. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

#### **2.2.17. Mallado o discretización numérica**

La generación de la malla donde se definen las celdas que es el punto de partida para el cálculo de las variables de flujo (velocidad y presión, etc.), en todo el dominio

computacional. Los modernos paquetes comerciales de CFD vienen con sus propios generadores de malla y también están disponibles programas para generar mallas independientes.

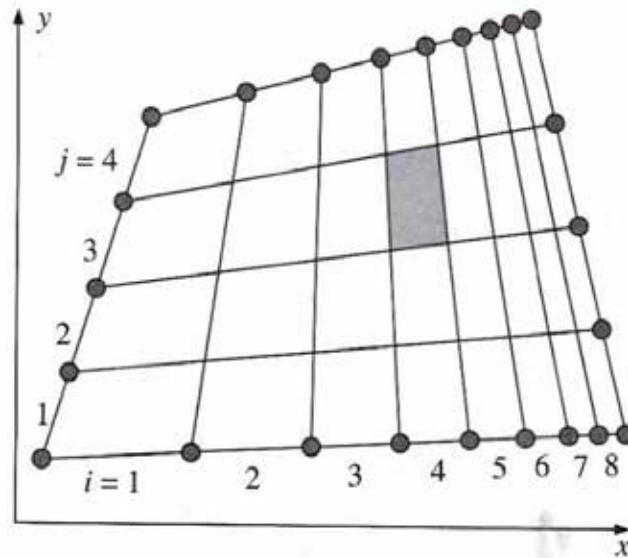
Las ubicaciones discontinuas en las que las variables calculadas son definidas por la discretización numérica que es esencialmente una representación discontinua del dominio geométrico sobre el cual el problema será solucionado. Divide el dominio de solución en un número finito de subdominios (elementos, volúmenes de control, etc.). Algunas de las opciones disponibles son las siguientes:

### **Mallas regulares estructuradas**

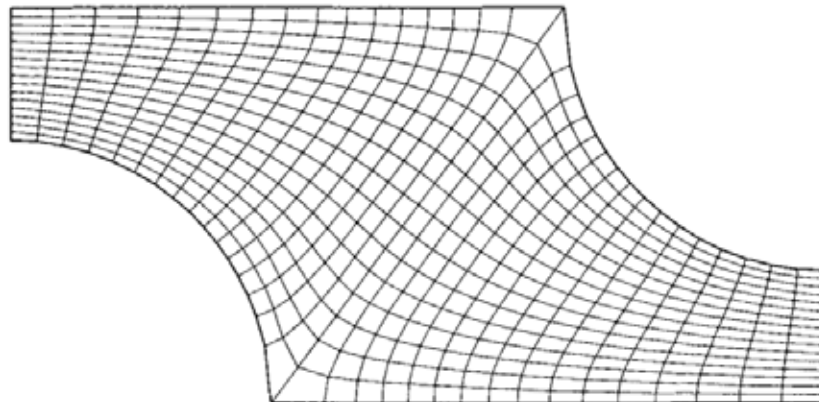
Consta por celdas planas con cuatro lados (2D) o celdas volumétricas con seis caras (3D). Aunque la forma rectangular de las celdas podría estar distorsionada, cada celda se enumera de acuerdo con los índices (i, j, k) que no necesariamente corresponden a las coordenadas “x”, “y” y “z”.

A continuación, en la figura 14 se muestra un ejemplo de malla estructurada bidimensional con nueve nodos y ocho intervalos en el lado superior e inferior, y cinco nodos y cuatro intervalos en los lados derecho e izquierdo. Se muestran los índices i y j. La celda sombreada está en (i=4, j=3)

El mallado estructurado o regular está constituido por familias de cuadrículas lineales con la propiedad de que miembros de una familia no cruzan con otras y cada miembro cruza con otra familia sólo una vez. Esto permite que las líneas de una selección en particular sean enumeradas consecutivamente. La posición de cualquier punto de la cuadrícula (o el volumen de control) dentro del dominio es excepcionalmente identificado para la selección de dos o tres dimensiones. Esta es la estructura de cuadrícula más simple, ya que es de manera lógica equivalente a una cuadrícula cartesiana. Cada punto tiene cuatro vecinos cercanos en dos dimensiones y seis en tres dimensiones; uno de los índices de cada vecino del punto p (i, j, k) es diferente por  $\pm 1$  del índice correspondiente de p. Un ejemplo de una cuadrícula de 2D estructurada es indicado la figura 14.



**Figura 14: Malla estructurada**  
 Fuente: ANSYS CFX-SolverTheory Guide (2017)

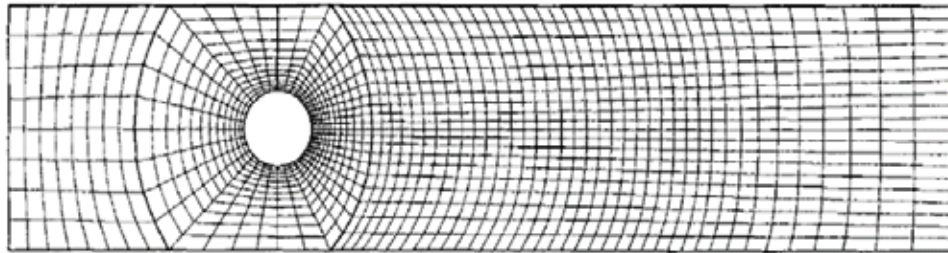


**Figura 15: Cuadrícula estructurada en 2D**  
 Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

Efectivamente, hay muchos solvers eficientes aplicables solamente a cuadrículas estructuradas. La desventaja de cuadrículas estructuradas es que pueden ser usadas solamente para dominios de solución geométrica simple. Otra desventaja es que podría ser difícil controlar la distribución de los puntos de la cuadrícula: la concentración de puntos en una región para razones de exactitud produce pequeños espacios innecesarios en otras partes del dominio solución y un desperdicio de recursos. Este problema es exagerado en los casos de 3D. Las celdas largas también podrían afectar la convergencia adversamente.

### **Mallas estructuradas en bloque**

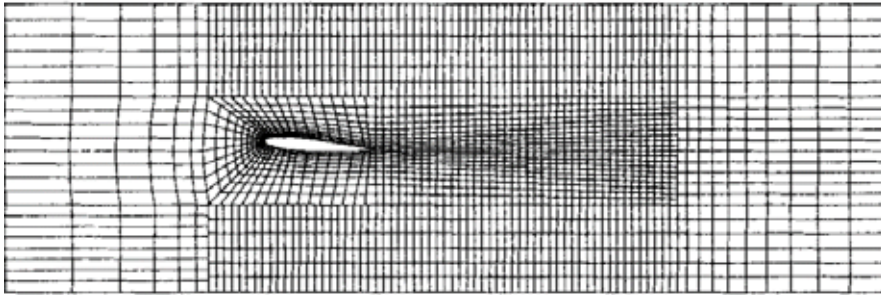
En las cuadrículas estructuradas en un bloque, hay dos (o más) niveles de subdivisión del dominio solución. Sobre el nivel rugoso, hay bloques en el que son relativamente grandes los segmentos del dominio; su estructura podría ser irregular y pueden o no ser superpuestos. Sobre el nivel (dentro de cada bloque) es definida una cuadrícula estructurada. El trato especial es necesario en las interfaces. En la Figura 16 un mallado estructurado de bloque con combinación en las interfaces, es designado para el cálculo de la circulación del flujo en 2D alrededor de un canal cilíndrico y contiene tres bloques.



**Figura 16: Mallado estructurado con interfaz ajustada**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

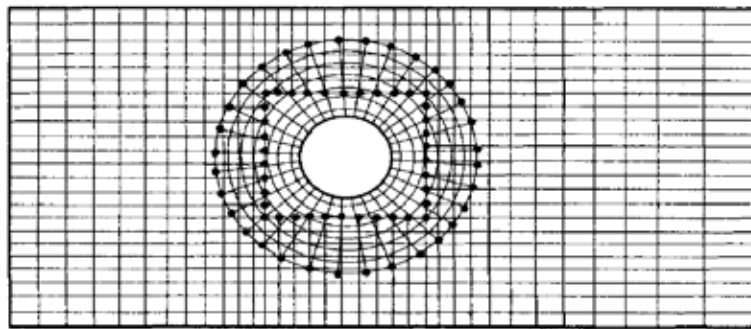
En la Figura 17 se presenta un mallado estructurado en bloque sin ajuste en la interface; usado para calcular la circulación alrededor de un hidrodenslizador sumergido (hydrofoil). Consta de cinco bloques de cuadrículas de diferentes tamaños. Esta clase de cuadrícula es más flexible que los previos, cuando admite el uso de cuadrículas más finas en las regiones donde es requerida una gran resolución. El no ajuste en las interfaces puede ser tratado de una manera completamente conservadora. La programación es más difícil que para tipos de cuadrícula descritos antes. El Solver para mallas estructuradas puede ser aplicable como bloque, y los dominios de flujo complicados pueden ser tratados con estas cuadrículas. Es posible la refinación local del modo bloque (la cuadrícula puede ser refinada en algunos bloques).



**Figura 17: Mallado estructurado en bloque 2D sin interfaces ajustadas**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

Las cuadrículas estructuradas con bloques con superposición se muestran en la Figura 18. En la región de superposición, las condiciones de bordes para un bloque son obtenidas interpolando la solución del otro bloque (en superposición). La desventaja de estas cuadrículas es que las leyes de conservación no se hacen cumplir fácilmente en los límites del bloque. La ventaja de este enfoque es que los dominios complicados son arreglados con más facilidad y puede ser usado en los siguientes cuerpos móviles: un bloque es fijado al cuerpo y se mueve con él, mientras que una cuadrícula inactiva cubre los entornos. Este tipo de cuadrícula no es usada a menudo, aunque tiene sus partidarios.



**Figura 18: Mallado compuesto en 2D**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

### **Cuadrículas (mallado) poco estructuradas**

Consta de celdas de varias formas, comúnmente se emplean triángulos o cuadriláteros (2D) o tetraedros o hexaedros (3D). Se generan dos mallas no estructuradas para el mismo dominio que el de la Figura 14, con la misma distribución de intervalo en los lados. A diferencia de la malla estructurada, en la no

estructurada, no puede identificarse a las celdas de manera única mediante los índices  $i$  y  $j$ , en cambio, las celdas se numeran internamente de alguna otra manera por el paquete de la CFD.

Para configuraciones geométricas complejas, por lo general, es más fácil para el usuario del paquete de generación de malla crear una no estructurada. Por ejemplo, algunos paquetes de CFD (usualmente antiguos) están escritos de manera específicas para mallas estructuradas, estos convergen con mayor rapidez y con mayor exactitud, por utilizar la identificación celdas por índices como se hace en caso de mallas estructuradas; los modernos paquetes de CFD de aplicación general ya no presentan este problema ya que pueden manejar mallas estructuradas y no estructuradas. Por lo que se generan menos celdas con una malla estructuradas que con una no estructurada.

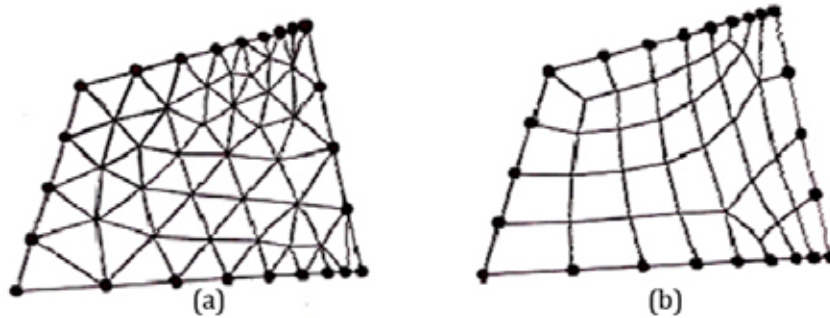
A continuación, se presenta un ejemplo de malla no estructurada bidimensional con 9 nodos y 8 intervalos en los lados superior e inferior, y 5 nodos y 4 intervalos en los lados izquierdo y derecho. También la misma distribución de nodos que en la Figura 19 (a) malla triangular no estructurada y en la Figura 19 (b) malla cuadrilátera no estructurada. La celda sombreada en (a) es levemente sesgada.

Útil para configuraciones muy complicadas, es el tipo de cuadrícula más flexible que puede ajustarse al límite de un dominio de solución arbitraria. En principio, tales cuadrículas podían ser usadas con cualquier plan de discretización, pero se adaptan mejor al volumen finito y aproximaciones a elemento finito. Los elementos o los volúmenes de control podrían tener cualquier forma; no hay una restricción sobre el número de elementos vecinos o nodos. En la práctica, las cuadrículas hechas de triángulos o cuadriláteros en 2D, y tetraedros o hexaedros en 3D son usados a menudo. Tales cuadrículas pueden ser generadas automáticamente por los algoritmos existentes. Si se desea, la cuadrícula puede ser hecha de forma ortogonal, el radio de aspecto es fácilmente controlado, y la cuadrícula puede ser refinada fácilmente a nivel local. La ventaja de la flexibilidad es compensada por la desventaja de la irregularidad de la estructura de los datos. Las ubicaciones de los

nodos y las conexiones vecinas necesitan ser especificadas explícitamente. Los “Solvers” para los sistemas de ecuaciones algebraicas son generalmente más lentos que para cuadrículas regulares.

Malla triangular no estructurada

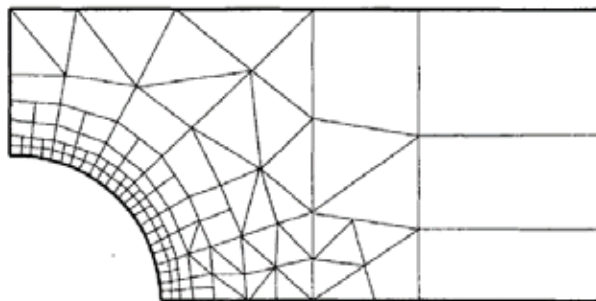
Malla cuadrilátera no estructurada



**Figura 19: Malla no estructurada**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

Las mallas poco estructuradas son usadas con métodos de elemento finitos, y cada vez más, con los métodos de volumen finitos. Los códigos de computación para cuadrículas poco estructuradas son más flexibles. No necesitan ser cambiados cuando la cuadrícula es refinada a nivel local, o cuando son usados los elementos o volúmenes de control de formas diferentes. Sin embargo, la generación del mallado y el preprocesamiento son generalmente más difíciles. Un ejemplo de una cuadrícula poco estructurada, se muestra en la Figura 20.



**Figura 20: Ejemplo de mallado no estructurado en 2D**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

En las capas límite, donde las variables de flujo cambian con rapidez en la dirección normal de la pared y requieren de mallas de alta resolución en la cercanía de ésta, las mallas estructuradas permiten una resolución mucho más fina que las no

estructuradas para el mismo número de celdas. Las celdas de mallas estructuradas son más delgadas y están muy compactadas cerca del lado derecho a diferencia que las celdas de mallas no estructuradas (ver Figura 16)

Se debe enfatizar que sin importar el tipo de malla que se vaya a utilizar (estructurada o no estructurada, cuadrilátera o triangular, etc.), es la calidad de la malla lo que es más imprescindible para soluciones confiables de CFD. En particular, debe tenerse cuidado que cada una de las celdas no esté muy sesgada porque esto puede crear dificultades e inexactitudes en convergencia en la solución numérica. La celda de la figura 19 (a) es una celda con sesgo moderadamente alto, es la desviación respecto de la simetría. Existen varias clases de sesgo, tanto para celdas de dos como de tres dimensiones, el tipo de sesgo apropiado para celdas bidimensionales es el sesgo equilátero, definido en la ecuación:

$$\theta_{EAS} = M\acute{A}X\left(\frac{\theta_{max} - \theta_{igual}}{180^\circ - \theta_{igual}}, \frac{\theta_{igual} - \theta_{min}}{\theta_{igual}}\right) \quad (\text{Ec. 46})$$

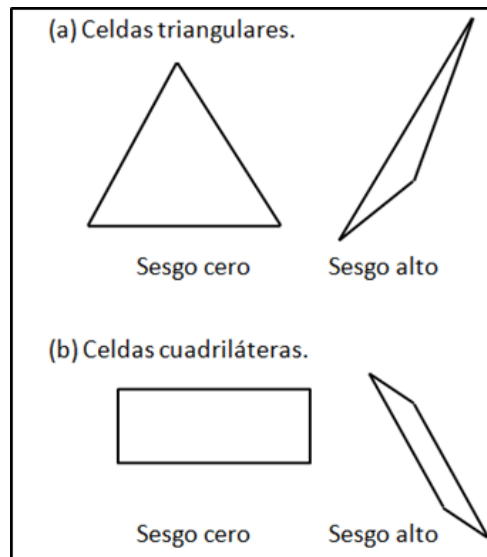
Dónde:  $\theta_{min}$  y  $\theta_{max}$  son los ángulos mínimo y máximo (en grados) entre dos lados cualesquiera de la celda.  $\theta_{igual}$  es el ángulo entre dos lados de una celda equilátera ideal con el mismo número de lados.

Uno de los factores que afectan la calidad de la malla pueden ser los cambios abruptos en el tamaño de celda, esto conduce al programa de CFD a dificultades numéricas o de convergencia. También, las celdas con una razón de sus dimensiones muy grande a veces pueden causar problemas. Aunque es posible reducir la cantidad de celdas al usar una malla estructurada en vez de una no estructurada, depende de la forma del dominio computacional.

### **Mallas híbridas**

A. Pérez y C. Garre (2011). Definen las mallas híbridas como una combinación mediante regiones, los mismos lo enuncia de la siguiente manera:

Una malla híbrida es la que combina regiones o bloques de mallas estructuradas y no estructuradas. Por ejemplo, se puede juntar una malla estructurada cercana a una pared con un bloque de malla no estructurada fuera de la región de influencia de la capa límite. Con frecuencia se emplea una malla híbrida para permitir alta resolución cerca de una pared sin necesitar alta resolución lejos de la pared. Cuando se genera cualquier tipo de malla estructurada, no estructurada e híbrida, debe tenerse cuidado siempre de que cada una de las celdas no esté muy sesgada. (A. Pérez y C. Garre, 2011)



**Figura 21: Sesgo en celdas**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

### 2.2.18. Procedimiento para la solución en CFD

Para resolver de manera numérica las ecuaciones de gobierno del problema a estudiar en este trabajo se tienen los siguientes pasos:

1. Elegir un dominio computacional y se genera una malla (conocida también como red de nodos); este dominio se divide en muchos elementos pequeños llamados celdas. Para dominios de dos dimensiones (2D), las celdas son áreas, mientras que para dominios tridimensionales (3D) las celdas son volúmenes. Un dominio computacional es la región en el espacio en la cual las ecuaciones de movimiento se resuelven mediante la CFD. Una celda es un subconjunto pequeño del dominio

computacional. Los límites de un dominio bidimensional se denominan lados, y los límites de un dominio tridimensional se llaman caras.

2. Especificar las condiciones de frontera en cada lado del dominio computacional (flujos 2D) o en cada cara del dominio (flujos 3D).
3. Seleccionar el tipo de fluido (agua, aceite, gasolina, entre otros), junto con las propiedades del fluido (temperatura, densidad, viscosidad, etc). La mayoría de los paquetes de CFD tienen integrada bases de datos de propiedades de algunos fluidos.

Los valores de la primera aproximación para las variables del campo de flujo se especifican para cada celda. Estas son condiciones iniciales, que podrían ser correctas o no, pero son necesarias como punto de partida, para que la iteración pueda seguir. Al comenzar con los valores de la primera aproximación, las formas discretizadas de las ecuaciones de gobierno se resuelven por iteración, en el centro de cada celda. Si se trasladan todos los términos de la ecuación 2.39 a un lado para obtener cero del otro lado de la ecuación, la solución numérica sería “exacta” cuando al sumar todos estos términos, el residuo, se volviera cero para cada celda del dominio en una solución de CFD, esta suma nunca es cero, pero suele disminuir al hacer las iteraciones. Un residuo se considera como una medida de la desviación de una solución numérica para determinada ecuación de conservación o transporte respecto a la solución exacta, se debe monitorear el residuo promedio relacionado con cada ecuación de conservación o transporte para ayudar a determinar cuándo converge la solución. A veces se necesitan cientos, o hasta miles, de iteraciones para que converja la solución a una solución final. Cuando converge la solución, las variables del campo de flujo como la velocidad y la presión se trazan y analizan gráficamente, Los usuarios pueden definir a y analizar otras funciones particulares que se forman mediante combinaciones algebraicas de variables de campo de flujo. La mayoría de los paquetes de CFD tienen integrados post- procesadores, diseñados para analizar el campo de flujo de manera gráfica y rápida, también hay paquetes post-procesadores autónomo. Las propiedades globales del campo de flujo, como la caída de presión, las

propiedades integrales, como las fuerzas (de sustentación y de arrastre), los torques que actúan sobre un cuerpo, se calculan a partir de la solución que se obtiene por convergencia. Con la mayoría de los paquetes de CFD esto puede hacerse “sobre la marcha” a medida que proceden las iteraciones, en numerosos casos, de hecho, es aconsejable monitorear estas cantidades junto con los residuos durante el proceso de iteración; cuando converge una solución, las propiedades globales e integrales deben establecerse en valores constantes también. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

### **2.2.19. Verificación de la geometría**

Para determinar si la convergencia de la solución numérica es fiable, existen algunos criterios computacionales basados en la calidad del mallado que permiten corroborar la veracidad de los resultados.

#### **Verificación de ejes “silver edge checking”**

Realiza una búsqueda de los ejes más pequeños en la geometría, los cuales pueden producir una malla de baja calidad en regiones cercanas a estos; usando como criterio el valor de tolerancia de longitud mínima de un eje,  $1,60 \times 10^{-1}$  [mm].

#### **Verificación de caras “silver face checking”**

Es un factor de verificación de geometría que relaciona el perímetro con el área para cada cara. Caras con un factor de “SliverFace” pueden resultar en mallas con una pobre calidad superficial. El Sliver Factor es calculado mediante la siguiente ecuación:

$$\text{Sliver factor} = \frac{(\text{perimetro})^2}{4\pi\text{Area}} \quad (\text{Ec. 47})$$

El máximo valor posible para es de 25

#### **Verificación de la distorsión “parametrization fase checking”**

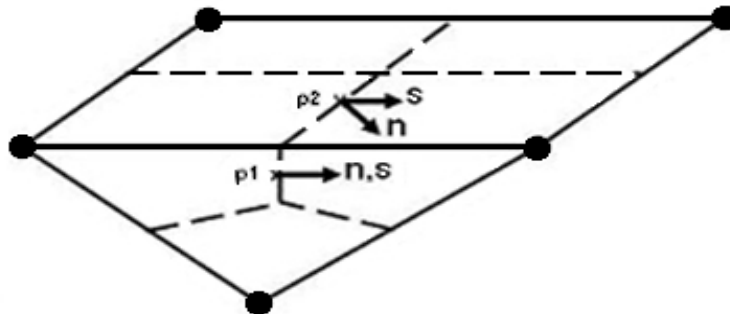
Es un parámetro que mide la distorsión de las caras, la máxima distorsión aceptada normalmente es 10. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

### 2.2.20. Calidad de malla

Usar una malla con adecuada calidad es una parte importante para controlar los errores de discretización. La calidad de la malla puede ser medida mediante el cálculo de tres valores principalmente como lo son:

#### **Ortogonalidad de mallado “mesh orthogonality”**

El concepto de malla ortogonal se refiere al ángulo entre caras de elementos adyacentes o el ángulo entre ejes de elementos adyacentes, estén cerca de su ángulo óptimo (por ejemplo,  $90^\circ$  para cuadrilátero y los  $60^\circ$  para elementos de caras triangulares). La medida más relevante de la ortogonalidad de la malla, se ilustra a continuación en la figura 22. Se trata del ángulo entre el vector que une a dos (volumen de control) nodos (s) y el vector normal en cada punto de integración de superficie (n) asociados con el borde. El mínimo ángulo de ortogonalidad aceptable es de  $20^\circ$ . (A. Pérez y C. Garre, 2011)

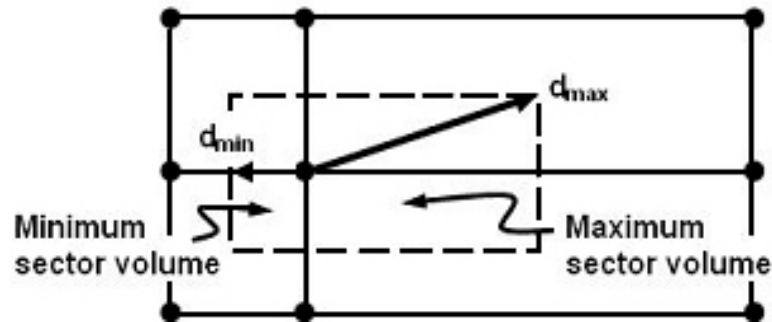


**Figura 22: Ortogonalidad del mallado**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

#### **Factor de expansión de la malla “mesh expansion factor”**

Este factor se refiere a la mayor tasa de cambio de volumen entre volúmenes de control adyacentes y se calcula de manera aproximada relacionando el radio máximo con el radio mínimo de volúmenes de control adyacentes. El “Mesh expansión factor” recomendado para las aplicaciones es de 22. Un esquema de este factor se puede observar en la figura 23.

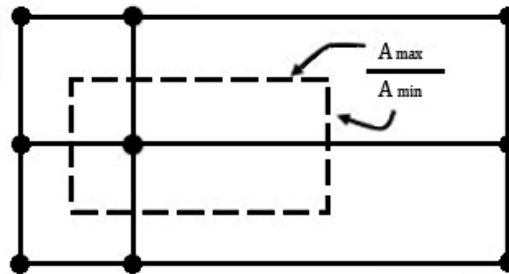


**Figura 23: Factor de expansión de la malla**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

### Aspecto de radio de la malla “mesh aspect ratio”

El concepto de “MeshAspect Ratio” estudia los elementos de la malla a medida que estos se van estrechando en mayor medida y envuelve la relación entre la máxima distancia y la mínima área adyacentes a cada nodo a través de todo el dominio. Como se ilustra en la Figura 24, un rango aceptable de “MeshAspect Ratio” sería  $<100$ .



**Figura 24: Aspecto del radio de la malla "MeshAspect Ratio"**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

### 2.2.21. Criterio de convergencia (RMS)

El Residuo llamado “Raíz Cuadrada Media”, RMS por sus siglas en inglés “Root Mean Squar”, consiste en sumar todos los residuos del dominio, determinar la media de los residuos y por último calcular la raíz cuadrada de la media obtenida. Una medida de cuán bien converge la solución puede ser obtenida por el trazado de los residuos para cada ecuación al final de cada intervalo de tiempo de la simulación (iteración) o “TimeStep”. Para la determinación del valor de RMS razonable para evaluar la convergencia pueden tenerse en cuenta los siguientes lineamientos:

Valores por encima de  $1 \times 10^{-4}$  puedan ser suficientes para obtener una evaluación cualitativa del campo de flujo

$1 \times 10^{-4}$  es una convergencia relativamente precisa, pero puede ser suficiente para muchas aplicaciones de ingeniería

$1 \times 10^{-5}$  representa una buena convergencia y usualmente suficiente para la mayoría de aplicaciones de ingeniería.

$1 \times 10^{-6}$  ó menor representa una convergencia bastante alta y es ocasionalmente requerida para problemas sensibles a la geometría. En muchos casos no es posible obtener este nivel convergencia, particularmente utilizando un programa de solución de ecuaciones de precisión simple.

(ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

### 2.3. Definición de términos básicos

**Caudal:** cantidad de fluido que pasa por segundo por un área determinada.

**Cantidad de movimiento:** es la cantidad de movimiento por unidad de volumen integrada sobre el volumen, donde la cantidad de movimiento por unidad de volumen es la densidad de la partícula material multiplicada por su velocidad.

**Condición de estancamiento:** estado termodinámico en el cual la sustancia alcanza el reposo de forma adiabática y toda su energía se encuentra en forma de entalpía.

**Entalpía:** es la cantidad de energía que un sistema puede intercambiar con su entorno.

**Entropía:** puede definirse esquemáticamente como el "progreso para la destrucción" o "desorden inherente a un sistema".

**Ecuación de continuidad:** se usa para relacionar la densidad del fluido, el área del fluido y la velocidad de éste en dos secciones del sistema donde existe flujo estable. Es válido para todos los fluidos, ya sean gases o líquidos.

**Estabilidad:** una medida de la capacidad de un sistema de resistir la perturbación. La capacidad de recuperar la posición original tras el cambio.

**Flujo:** el flujo de una cantidad por una superficie. Por ejemplo, el flujo de la energía siempre va desde algún lugar a otro lugar, es decir que la naturaleza del vector es importante.

**Fluido:** se define como una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo de corte, por tanto, en ausencia de este, no habrá deformación. Los fluidos pueden clasificarse de manera general de acuerdo con la relación entre el esfuerzo de corte aplicado y la relación de deformación.

**Flujo compresible:** es aquel en los cuales los cambios de densidad de un punto a otro no son despreciables.

**Flujo ideal:** es aquel flujo incompresible y carente de fricción. La hipótesis de un flujo ideal es de gran utilidad al analizar problemas que tengan grandes gastos de fluido, como en el movimiento de un aeroplano o de un submarino. Un fluido que no presente fricción resulta no viscoso y los procesos en que se tenga en cuenta su escurrimiento son reversibles.

**Flujo permanente:** llamado también flujo estacionario. Este tipo de flujo se caracteriza porque las condiciones de velocidad de escurrimiento en cualquier punto no cambian con el tiempo, o sea que permanecen constantes con el tiempo o bien, si las variaciones en ellas son tan pequeñas con respecto a los valores medios.

**Flujo unidimensional:** es un flujo en el que el vector de velocidad sólo depende de una variable espacial, es decir que se desprecian los cambios de velocidad transversales a la dirección principal del escurrimiento. Dichos flujos se dan en tuberías largas y rectas o entre placas paralelas.

**Flujo uniforme:** este tipo de flujos son poco comunes y ocurren cuando el vector velocidad en todos los puntos del escurrimiento es idéntico tanto en magnitud como en dirección para un instante dado o expresado matemáticamente.

**Número de Mach:** es la razón entre la velocidad del objeto y la velocidad del sonido en el medio donde viaja.

## **CAPÍTULO III**

### **MARCO METODOLÓGICO**

En este apartado se encuentran especificados todos los procedimientos lógicos, técnicos, junto con las etapas investigativas; con el tipo de investigación, técnicas de recolección de datos, población, muestra y todo lo necesario para vincular la información y luego ponerla en manifiesto para así analizar los supuestos de estudio, que involucra el ensayo del campo de flujo compresible en la descarga de una tobera convergente-divergente utilizando técnicas de aproximación numérica.

#### **3.1. Tipo de investigación**

Los trabajos de investigación pueden ser de varios tipos y se clasifican de distintas maneras, la más común es su clasificación en función de su nivel, los cuales serían: Investigación exploratoria o formulatorio, de tipo descriptivo, de tipo explicativo, estudios correlacionales, experimentales y no experimentales.

Esta investigación fue de tipo exploratoria, ya que según Behar D. (2008) “El primer nivel de conocimiento científico sobre un problema de investigación se logra a través de estudios de tipo exploratorio; tienen por objetivo, la formulación de un problema para posibilitar una investigación más precisa o el desarrollo de una hipótesis.” (p.16). considerando que se caracteriza por explorar el comportamiento del campo de flujo compresible en la zona exterior a la descarga de una tobera convergente – divergente, mediante el manejo de las variables que afectan e inciden en el comportamiento del mismo, a través de aproximaciones numéricas, utilizando los adelantos de la Dinámica de Fluidos Computacional o CFD, y comparándolo con resultados de trabajos anteriores.

#### **3.2. Diseño de la investigación**

En este estudio, la investigación cuenta con un diseño documental, ya que el proceso se encuentra basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e

interpretación de datos secundarios, es decir, los obtenidos y registrados por otros investigadores en fuentes documentales: impresas o electrónicas. Al respecto Sabino Behar D. (2008), sostiene que:

Este tipo de investigación es la que se realiza, como su nombre lo indica, apoyándose en fuentes de carácter documental, esto es, en documentos de cualquier especie. Como subtipos de esta investigación encontramos la investigación bibliográfica, la hemerográfica y la archivística; la primera se basa en la consulta de libros, la segunda en artículos o ensayos de revistas y periódicos y la tercera en documentos que se encuentran en los archivos, como cartas, oficios, circulares, expedientes, etcétera. (p.20)

Se dice que la presente investigación es de tipo documental, debido a que para realizar el estudio se recurre con frecuencia a fuentes impresas con información ya registrada, o de otro tipo como referencias web, entre otros y de esta manera fundamentar las conclusiones del estudio en técnicas y herramientas teóricas ya conocidas.

### **3.3. Nivel de la investigación**

Esta investigación es de nivel descriptiva, pues se fundamenta en hechos reales, enfocándose en la restricción, registro, análisis e interpretación de las conclusiones, permitiendo poner en manifiesto los conocimientos teóricos y metodológicos para darle solución al problema planteado en esta investigación.

Behar D. (2008). Mediante este tipo de investigación, que utiliza el método de análisis, se logra caracterizar un objeto de estudio o una situación concreta, señalar sus características y propiedades... Su objetivo es describir la estructura de los fenómenos y su dinámica, identificar aspectos relevantes de la realidad. (p.21)

En el mismo orden de ideas, la investigación se basa en describir el comportamiento del campo de flujo en la zona exterior a la descarga de una tobera tipo C-D, mediante la aplicación de la Dinámica de Fluidos Computacional o CFD, en una situación rigurosamente controlada y de esta manera fijar los parámetros por los cuales se regirá la investigación.

### **3.4. Población y muestra**

Una población según Arias (2006), “Es el conjunto de elementos con características comunes que son objeto de análisis y para los cuales serán válidas las conclusiones de la investigación”. (p. 35)

Hurtado y Toro (2001), la definen como, “Es la composición de todos los elementos a ser estudiados y a quienes podrán ser generalizados los resultados de la investigación, una vez concluida ésta, para lo que es necesario que la muestra con la cual se trabaje sea representativa de la población”. Con base en las definiciones de los autores, la población es la totalidad de los integrantes objetos del estudio, por lo que, para los efectos de esta investigación las poblaciones corresponden a las diferentes curvas características y gráficas experimentales que muestran los fabricantes.

Para autores como Balestrini (2003), la muestra “Es obtenida con el fin de investigar, a partir del conocimiento de sus características particulares, las propiedades de una población” (p. 138). Sin embargo, la muestra a seleccionar en esta investigación es del tipo no probabilística. Véliz y Arredondo determinan en su trabajo de grado titulado, Aspectos Teóricos Sobre Tipos de Muestreo, que este tipo de muestra es: “aquel tipo de muestra para el cual no puede no puede calcularse la probabilidad de extracción de una determinada muestra” (p. 30). Por lo tanto, la muestra seleccionada fue: los diferentes puntos o nodos que se generen por la discretización del dominio fluidizado y en los cuales se evaluarán las características del fluido.

### **3.5. Técnicas de recolección de información**

Los datos según Sabino C (1992) son “Cada uno de los elementos de información que se recoge durante el desarrollo de una investigación y sobre la base de los cuales, convenientemente sintetizados, podrán extraerse conclusiones con relevancia en relación al problema inicial planteado”. (p. 28).

Con el propósito de recolectar datos se dispondrá de técnicas, tanto cuantitativas como cualitativas. La Torre M. (2007) define las técnicas y métodos de recolección de datos como:

Herramientas que se manipulan para obtener información y para llevar a cabo las observaciones de una investigación o estudio determinado. Conforme a lo que se desea investigar o estudiar, la característica a observar, sus propiedades y factores relacionados con aspectos naturales, económicos, políticos, sociales, etc., cuando se selecciona uno de estos instrumentos. En otras palabras, estos son los que permiten efectuar observaciones, de uno u otro fenómeno en una forma más despejada y precisa de la descripción de los hechos a estudiar.

En esta investigación se hizo uso de las siguientes herramientas de recolección de datos: localización y consolidación de los datos, revisión documental la cual es definida por Candelo (2006)

Esta técnica se realizará con el fin de profundizar la información recopilada con todas las aplicadas anteriormente, esta comprende la búsqueda de la información de documentos empresariales, que contribuyan al conocimiento del comportamiento de sucesos realizados que sirvan de apoyo para el desarrollo de teorías pertinentes para la resolución de problemas.

Y, por último, en el presente trabajo se contó con la utilidad de computadoras para conseguir los resultados obtenidos por la simulación que describen el comportamiento del campo de flujo, con los cuales se procede a comparar con valores experimentales realizados anteriormente y/o formular hipótesis en base a los principios de conservación para lograr la validación de los mismos.

### **3.6. Fases metodológicas**

Se describirán de manera individual, las respectivas acciones, procedimientos, técnicas y actividades que se realizaron, para dar cumplimiento a cada uno de los objetivos específicos planteados.

**Fase I: Investigación las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo externo en la descarga de una tobera convergente – divergente (C – D).**

A través de los diferentes antecedentes seleccionados y apoyados por material bibliográfico técnico sobre dinámica de gases y flujo compresible, se identificaron las variables que permiten la explicación del campo de flujo compresible en la zona

exterior de la descarga de una tobera convergente – divergente, involucrando todas las condiciones de flujo que puedan presentarse.

**Fase II: Modelado mediante una herramienta CAD una tobera C – D.**

Luego de realizar una búsqueda y documentación en base a varios artículos científicos y estudios sobre el campo de flujo compresible en la zona externa de la descarga de una tobera convergente – divergente, se seleccionó una que fue el modelo a validar. Se determinaron los parámetros dimensionales y condiciones de flujo para la aplicación de la investigación y los estudios, a fin de manejarlos como datos necesarios para completar los objetivos del proyecto de investigación. Luego se modeló mediante una herramienta de diseño asistido por computadora (CAD).

**Fase III: Elección del modelo matemático adecuado para el estudio del dominio fluidizado exterior de la tobera C – D.**

Habiendo culminado la revisión bibliográfica y obtenidos los datos requeridos, se determinaron los modelos matemáticos más apropiados para la realización de las simulaciones numéricas basándose en la interpretación de la investigación bibliográfica y la comparación de los resultados obtenidos en la simulación de modelos similares al seleccionado en esta investigación.

**Fase IV: Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD.**

La simulación del campo de flujo se realizó a través de la configuración del software ANSYS® Workbench Fluent®, es decir, una herramienta que aplica CFD (computational fluid dynamics) para ejecutar algoritmos computacionales seleccionados para la solución de los modelos matemáticos, estableciendo también los criterios de convergencia que se tomaron en cuenta a la hora de realizar los cálculos, donde se especifica el número máximo de iteraciones o pasos a realizar para el cálculo, así como el valor objetivo del criterio de convergencia ya sea residual o máximo

**Fase V: Evaluación de los resultados en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su caracterización.**

El cálculo se detuvo al cumplirse cualquiera de las dos condiciones mencionadas con anterioridad, generando resultados en forma de datos, gráficos y/o diagramas que permitieron la descripción de los fenómenos irreversibles y las variables que intervienen en la aparición de estas irreversibilidades.



## **CAPÍTULO IV**

### **RESULTADOS**

El presente capítulo explica de manera clara y concisa el desarrollo de la investigación para llevar a cabo el cumplimiento de los objetivos planteados, abarcando de manera individual cada uno de ellos. Otorgándole las propiedades necesarias al caso estudio para generar los fenómenos irreversibles que ocurren en el campo externo de flujo compresible en la descarga de una tobera CD y evaluar los resultados.

#### **4.1. Investigación acerca de las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo externo en la descarga de una tobera convergente – divergente (C – D).**

Aun existiendo gran diversidad de investigaciones que versan sobre toberas convergentes y toberas convergentes-divergentes, son pocos los que abarcan el estudio del campo de flujo externo en la descarga de una tobera de Laval y los distintos fenómenos que ocurren en la estela de flujo procedente de la misma. No obstante, a través de la investigación previa realizada en el marco teórico del presente trabajo de grado, siendo esenciales los antecedentes presentados se logró obtener suficiente información para de manera concreta definir estas variables como:

Presión en la entrada de la tobera [ $P_e$ ]

Contra presión [ $P_b$ ]

Flujo másico:  $m_{Máx}$  siendo  $M_G=1$


Régimen de flujo: Número de Mach [ $M_{ach}$ ]

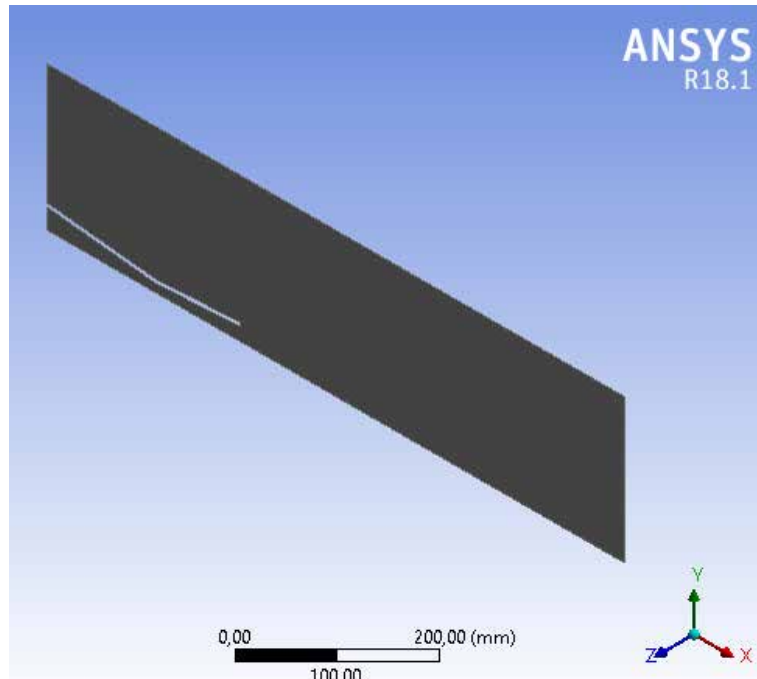
Densidad variable: Campo de flujo compresible

#### **4.2. Modelado mediante una herramienta CAD una tobera C – D.**

Se selecciona una tobera convergente-divergente o de Laval, de un modelo real o a escala de las toberas usadas en aplicaciones específicas de propulsión para la

aviación militar y comercial, cuyos planos fueron obtenidos a través de la investigación realizada por Prieto Carlos en 2018, ya que, en el estudio realizado por mencionado autor, las condiciones del flujo son adiabáticas y sin fricción para expansiones con un número de Mach superior a la unidad, esto se debe a las altas velocidades del volumen de control que atraviesa el dispositivo, permitiendo así observar las características del campo de flujo, los fenómenos que ocurren en la zona de descarga de la tobera y el comportamiento de la estela de flujo que abandona la misma.

El diseño de la geometría de la tobera de Laval fue realizado mediante la ayuda de un software CAD, el cual viene incluido en el Software ANSYS® Workbench, conocido como . Consta de una tobera de Laval incrustada en un dominio fluidizado (D.F.) para el estudio del campo de flujo compresible en la descarga de la misma (ver figura 25). Realizado en dos dimensiones para facilitación del estudio y solución de los modelos matemáticos de manera más precisa en virtud de un mallado con mayor detalle. Esta particularidad no afecta la obtención de los resultados, debido a la simetría que presenta el fenómeno en cuestión. para más detalle de las dimensiones seleccionadas para la tobera y el D.F. consultar Apéndice A.



**Figura 25: Modelo de la tobera de Laval incrustada en el D.F. del caso estudio**

Fuente: Granados (2018)

#### **4.3. Elección del modelo matemático adecuado para el estudio del dominio fluidizado exterior de la tobera C – D**

Fundamentándose en la investigación previa realizada, de las diferentes fuentes bibliográficas y guías de ANSYS® Workbench, se concluyó que las ecuaciones y modelos matemáticos más adecuados para la realización del estudio son las ecuaciones RANS (Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds), las relaciones de Rankine-Hugoniot y el modelo de turbulencia kappa-omega basado en el enunciado de SST. buscando siempre las condiciones apropiadas para la aparición de fenómenos irreversibles como las ondas de choque y ondas de Prandtl-Meyer, en el campo de flujo compresible estudiado por medio del D.F. previamente definido.

#### **4.4. Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional CFD.**

El proceso de simulación por medio de la herramienta de CFD ANSYS® Fluent consta de una serie de pasos indicados por el mismo software para su correcto

funcionamiento, como se parecía en la figura 26, cada uno de estos pasos depende de su predecesor.



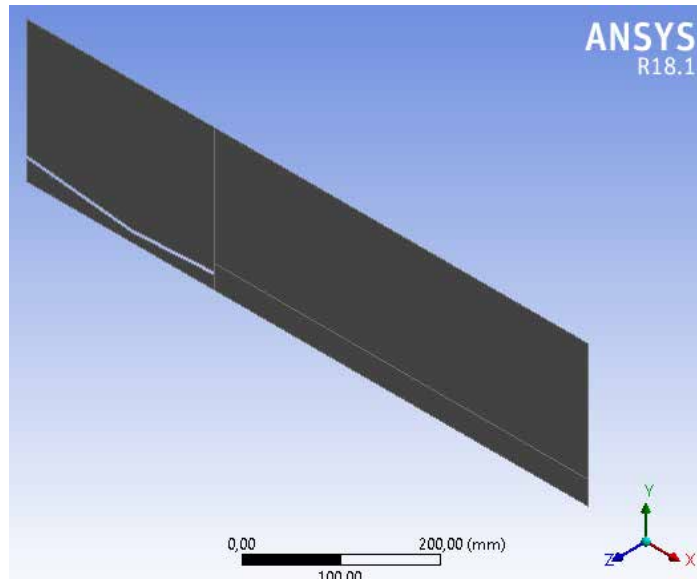
**Figura 26: Proceso de simulación para ANSYS® Fluent**

Fuente: Granados (2018)

#### 4.4.1. Modelado de la geometría

El modelado de la tobera y el D.F. se realizó en base a un sketch o boceto (para mayor detalle consultar Apéndice A) en el cual se dimensiona por completo el área de estudio por medio de la herramienta CAD incluida en ANSYS® Workbench

. Como se explicó anteriormente, en virtud de que la tobera en cuestión es completamente simétrica, se realizó un estudio en dos dimensiones, esta característica de análisis bidimensional se definió en las propiedades del modelador, puesto que el software predetermina su configuración para este tipo de estudio. Partiendo del boceto generado, se realizó la superficie a simular. Por último, se procedió a fragmentar la cara de esta superficie para poder discretizar el dominio de una manera más adecuada en el paso posterior, separando la cara principal para obtener finalmente cuatro áreas, las cuales se pueden observar en la figura 27.

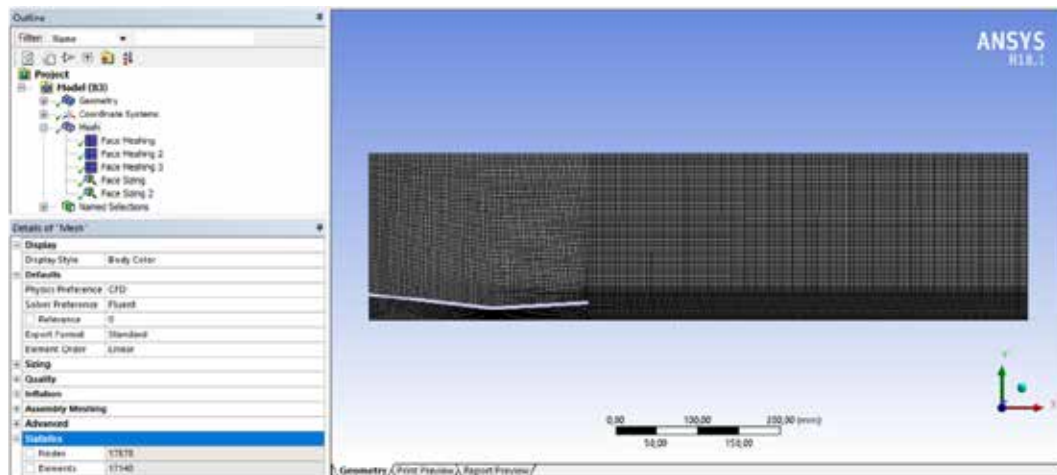


**Figura 27: superficie de estudio con caras fragmentadas del Design Modeler**  
Fuente: Granados (2018)

#### **4.4.2. Discretización del dominio**

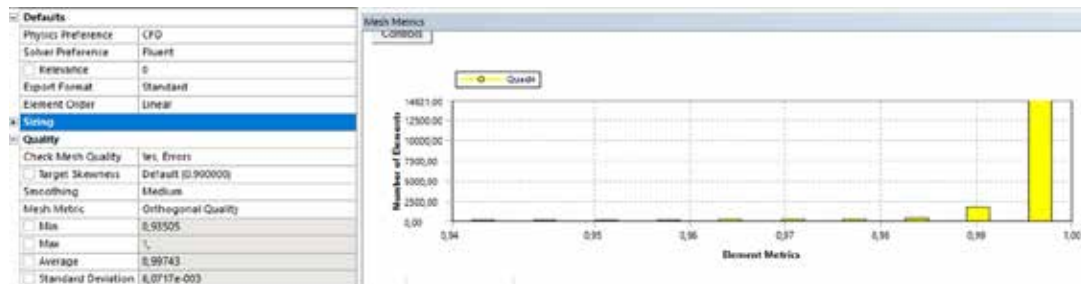
El punto de partida para el cálculo de las variables son las celdas de todo el dominio computacional, estas se generaron en el módulo Mesh del software. La discretización numérica seleccionada para el caso estudio, fue un mallado rectangular estructurado, donde el tamaño máximo de cada elemento de la malla fue de 3mm en términos generales, sin embargo, se dimensionó de manera más adecuada el área de la tobera y la zona del D.F. donde se apreciará la estela de flujo con un tamaño máximo para la cara de cada elemento de 2 y 1,5 mm respectivamente. En la figura 28 se observa los aspectos generales del mallado, así como características cuantitativas como lo son el número de nodos de 17.578 y 17.140 elementos. En cuanto a la calidad del mallado, se observó que los elementos presentan una calidad mínima de 0,93505 y máxima de 1, con un promedio de 0,99743. Referido en porcentaje, se obtiene que la calidad de la ortogonalidad de los elementos para el caso estudio es en promedio de 99,74%, lo que traduce en una excelente calidad para proceder con la simulación del campo de flujo compresible en la descarga de una tobera de Laval.

Por otra parte, se definieron los vértices para las condiciones del dominio, configurándose como se aprecia en la figura 29, donde en el extremo izquierdo existe un  , al cual se le condicionara las características del flujo que entra a la tobera, un  , para las condiciones de salida del flujo, las paredes del dominio fluidizado y un eje de simetría.



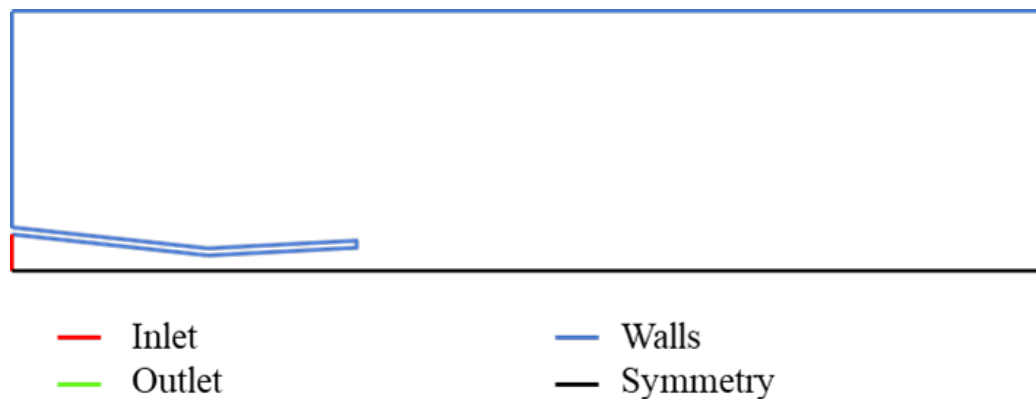
**Figura 28: Aspectos generales del mallado**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 29: Ortogonalidad de la discretización del dominio**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 30: Condiciones de contorno**

Fuente: Granados (2018)

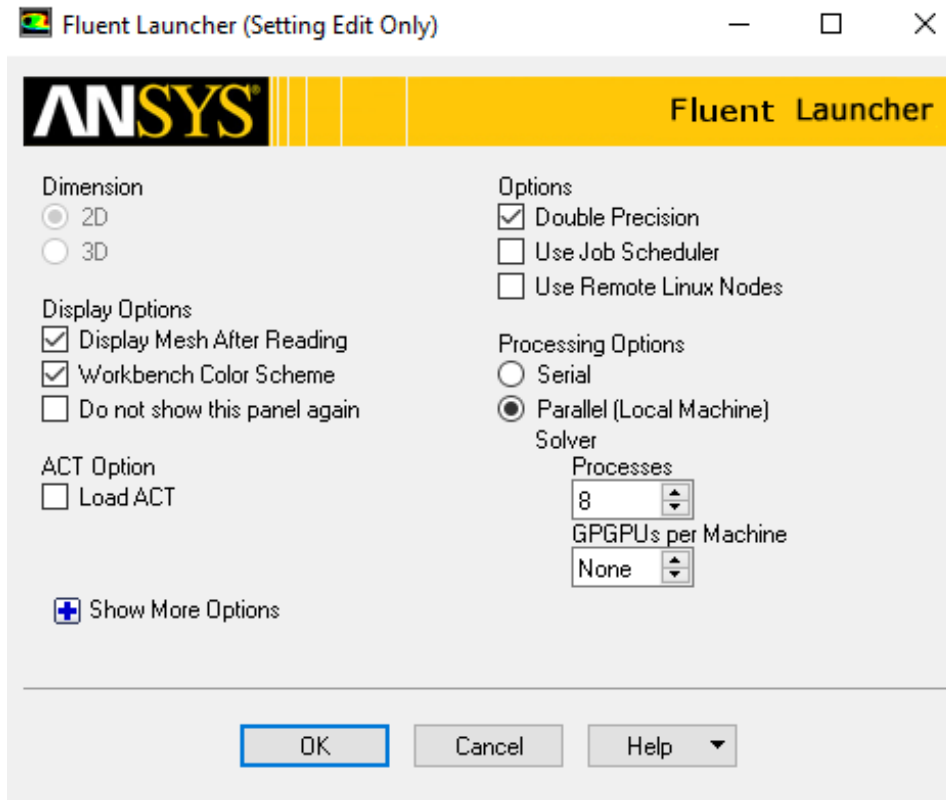
#### 4.4.3. Configuración de la herramienta de CFD

##### 4.4.3.1. Configuración del dominio

En este paso se definen las constantes conocidas: presión y temperatura, tanto a la entrada como a la salida, para la resolución de las ecuaciones necesarias para lograr una correcta simulación y obtención de resultados a través del módulo de (ver figura 26). Como primer paso el software de resolución de ecuaciones, se define el tipo de estudio a realizar y el hardware del que se dispone (ver figura 31), una vez iniciado el SetUp el mismo incluye una herramienta para evaluar el mallado realizado en el paso precedente.

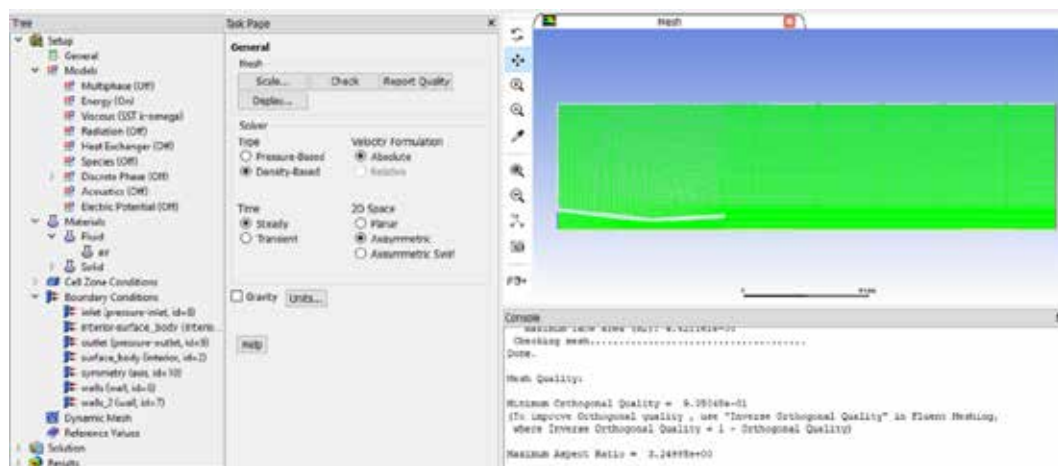
De igual manera como se aprecia en la figura 32 se definen algunos parámetros para la solución de las ecuaciones, así como un estudio basado en la densidad y para velocidad absoluta, en un tiempo estacionario y o, lo que podría traducirse como, simétrico a un eje lo cual le indico al software que el caso estudio es completamente simétrico.

Los modelos matemáticos se especificaron, tomándose en consideración la ecuación de energía y para la viscosidad el modelo de turbulencia k-SST. El fluido en cuestión es aire, con propiedades de gas ideal y basándose en la viscosidad de Sutherland (ver figura 33).



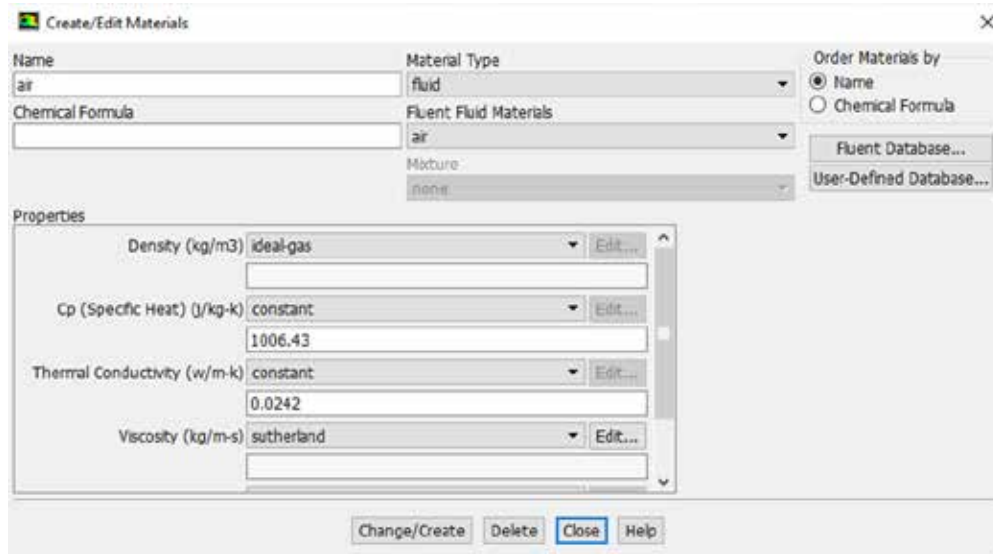
**Figura 31: Configuración del**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 32: Preconfiguración del solver**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 33: Tipo de fluido del estudio y sus propiedades**

Fuente: Granados (2018)

No menos importante se configuran las condiciones de borde para la realización de las simulaciones. En el caso estudio se asumió una presión de entrada de 800 kPa a 500 K, variándose las propiedades de la atmosfera a la salida, tomándose altitudes de 7.000; 8.000; 9.000; 10.000 y 12.000 m para realizar el estudio de la estela de flujo generada por la tobera sometido a este orden de presiones, tomando como valores de presión y temperatura las propiedades del aire a grandes altitudes (véase anexo B).

Los vértices referidos a las paredes se configuran bajo una condición de no deslizamiento, con la finalidad de condicionar al fluido a que tenga una velocidad nula relativa a la frontera de la pared, así como que esta sea lisa y adiabática, que son condiciones fundamentales en la obtención de las ecuaciones de las ondas de choque en la estela de flujo compresible de la tobera según el modelo de Rankine–Hugoniot.

Análogamente se define el eje de simetría para realizar el estudio, el mismo es el vértice especificado como en la figura 29, dando así por definidas todas las condiciones de borde.

#### **4.4.3.2. Configuración de la herramienta de cálculo**

En este paso se establecen todos los criterios correspondientes a la convergencia de la simulación, y los que tendrá en cuenta el programa a la hora de

realizar los cálculos. Se define con punto inicial para los cálculos las propiedades en la entrada de la tobera o . También se define el número máximo de interacciones, así como el valor residual o RMS. La simulación entonces convergerá al cumplirse cualquiera de las dos condiciones.

Para cada simulación se realizaron 5.000 interacciones, y los criterios de valor residual en el orden de los  $1 \times 10^{-4}$  como criterio de convergencia, el cual es un valor que proporciona una alta precisión en los resultados de una simulación y es extremadamente conservador para las recomendaciones del fabricante del software de CFD.



**Figura 34: Parámetros de la herramienta de calculo**

Fuente: Granados (2018)

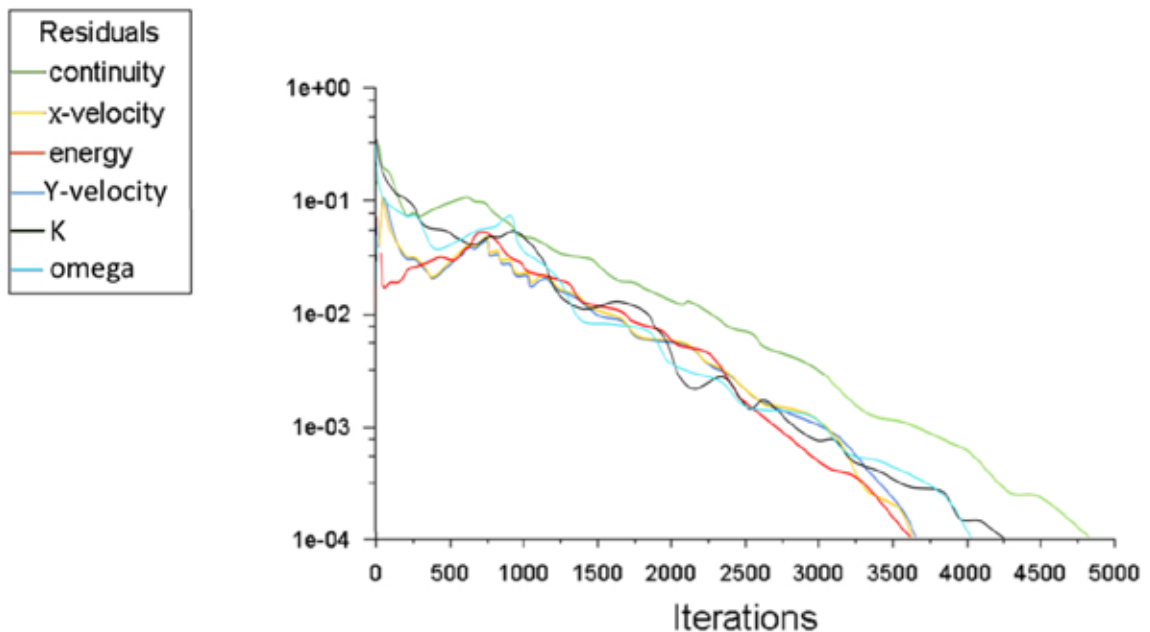
#### 4.4.3.3. Convergencia de las simulaciones

El objetivo del módulo de la herramienta CFD, es resolver las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento, energía, etc. El mismo genera unas curvas de conservación, es esencial asegurarnos de que la solución generada conserva estas cantidades. Estas curvas de conservación deben ser analizadas para asegurar una correcta simulación evitando así, violar los principios de conservación postulados por las leyes termodinámicas.

En las gráficas se evidencia el comportamiento de las curvas de convergencia tanto para las leyes de conservación de masa y momento, así como las ecuaciones de turbulencia y los debidos modelos seleccionados para el estudio de campo de flujo exterior en la descarga de una tobera convergente divergente. Se presentaron

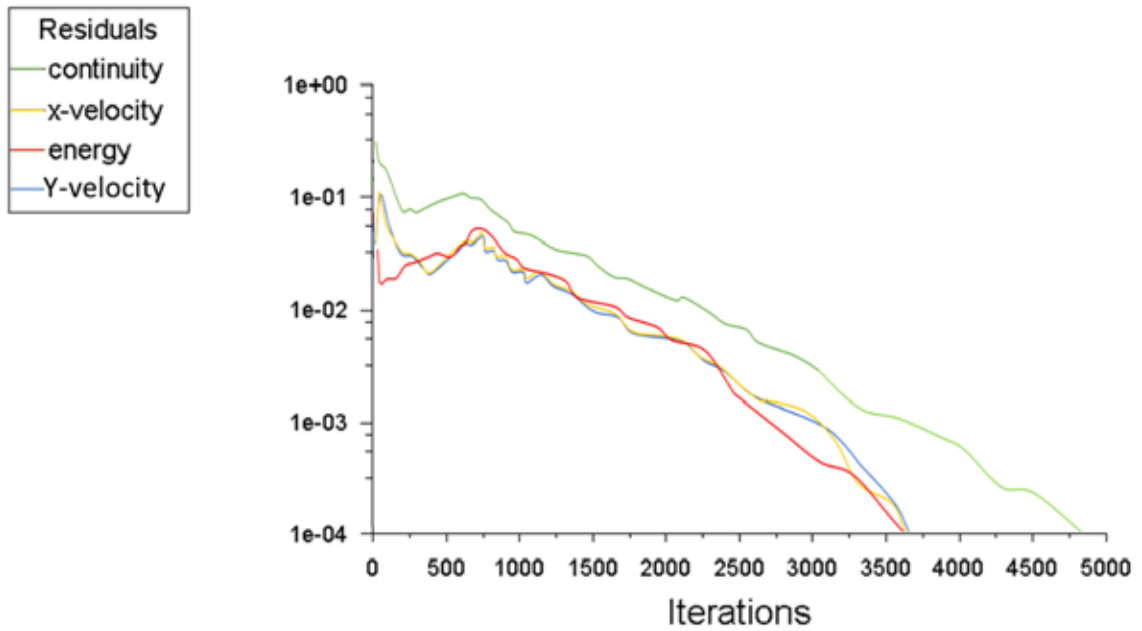
resultados de convergencia para cada uno de los casos estudiados, las cuales demostraron un comportamiento similar entre ellas, tanto para las leyes de conservación de energía, momento y continuidad, así como para los modelos de turbulencia como lo son k-omega.

En la figura 35, se puede apreciar la convergencia de las seis curvas, lográndose todas antes de las 5.000 interacciones. Las curvas de continuidad, momento (x-velocity e y-velocity), y energía, se aprecian de manera más precisa en la figura 36, en las cuales podemos observar que la convergencia de las ecuaciones de momento y energía ocurrió entre la interacción 3.500 y la 3.750, y más de 1.000 interacciones después convergió la ecuación de continuidad. De especial interés la curva de conservación de momento que fue separada en ambas componentes, se puede notar como tienen un comportamiento bastante similar. Por otra parte, en la figura 37 se evidencia la convergencia de las ecuaciones de los modelos de turbulencia, convergiendo estas entre las 4.000 y las 4.500 interacciones.



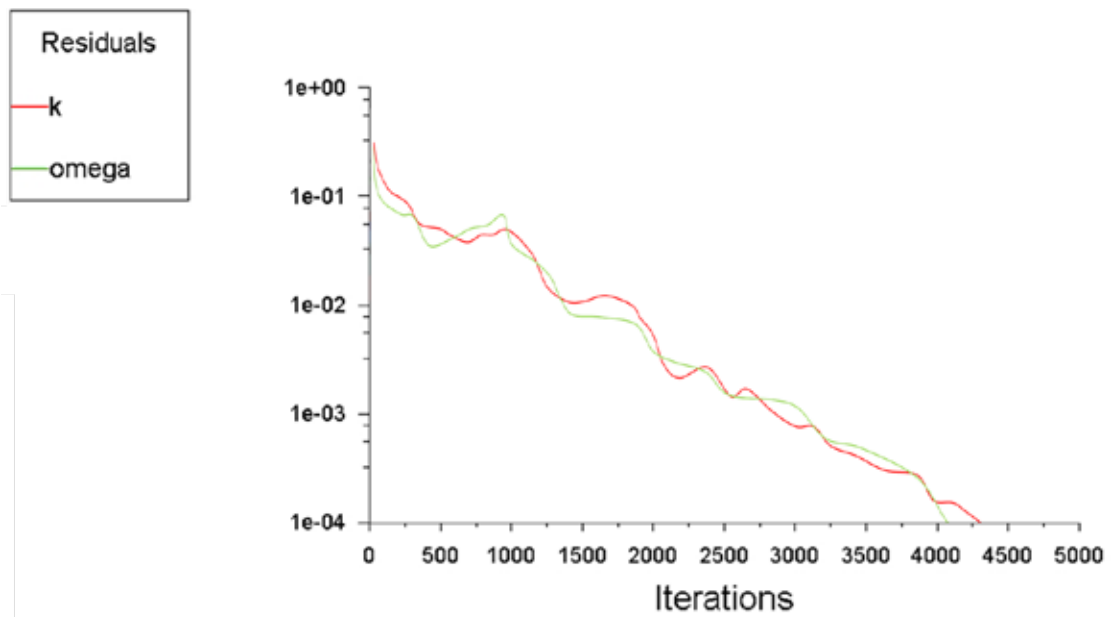
**Figura 35: Convergencia de las ecuaciones para una altitud de 7.000 m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 36: Convergencia de las ecuaciones de continuidad, momento y energía para una altitud de 7.000 m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 37: Convergencia de las ecuaciones del modelo de turbulencia k-omega para 7.000m**

Fuente: Granados (2018)

#### **4.4.4. Obtención de los resultados**

Los datos obtenidos son presentados en la herramienta de resultados del software. Donde estos se agrupan en forma de gráficos, los cuales representan el comportamiento del flujo, ya sea en gráficos bidimensionales de contornos o curvas de posición, donde se ven definidas las propiedades del fluido a lo largo del dominio fluidizado, permitiendo así evaluar los resultados obtenidos contra los conocimientos teóricos apoyado en los siguientes gráficos para cada caso:

Diagramas de contorno de la presión del fluido en la dirección del flujo

Curvas de la presión versus la posición a lo largo del flujo

Diagramas de contorno de velocidad del fluido en la dirección del flujo

Curvas de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo

Diagramas de contorno de número de Mach del fluido en la dirección del flujo

Curvas del número de Mach versus la posición a lo largo del flujo

#### **4.5. Evaluación los resultados en forma de datos, representaciones gráficas y/o videos para su caracterización**

Como se mencionó con anterioridad, se realizaron cinco estudios cuyas propiedades fueron seleccionadas para la aparición de flujo super sónico en la zona exterior de la descarga de una tobera convergente-divergente. De manera previa se procedió a realizar la simulación de los casos estudiados por Carlos Prieto en 2018 en su trabajo de grado para optar al título de ingeniero mecánico titulado, las cuales tenían el objetivo de generar una onda de choque normal dentro de la tobera, para estudiar el comportamiento del flujo al generarse esta irreversibilidad, se comprobó el enunciado teórico que indica que de aparecer una onda de choque normal dentro de la tobera el fluido se desacelera abruptamente, descargando en un régimen como máximo sónico, el cual fue el resultado del estudio cuya presión a la salida de la

tobera es de 72,5 kPa; razón por la cual era necesario reducir aún más esta presión de salida, para logra obtener regímenes super sónicos.

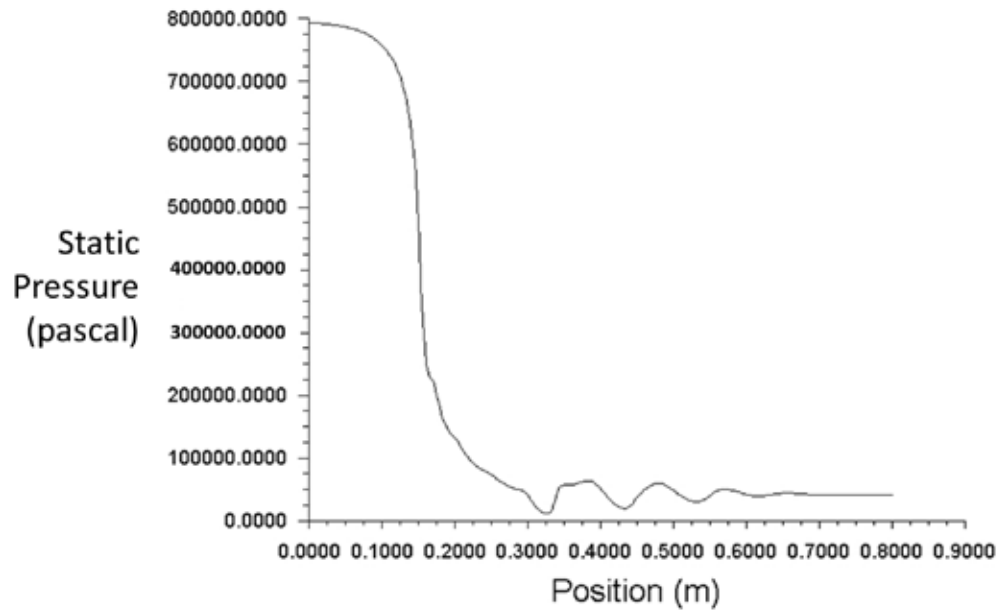
Para evaluar los resultados de las simulaciones realizadas sin hacer tediosa ni repetitiva la explicación de los fenómenos y puntos de interés de los mismos, se irán abarcando de manera progresiva con cada uno de los estudios realizados.

#### **4.5.1. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 7.000 m**

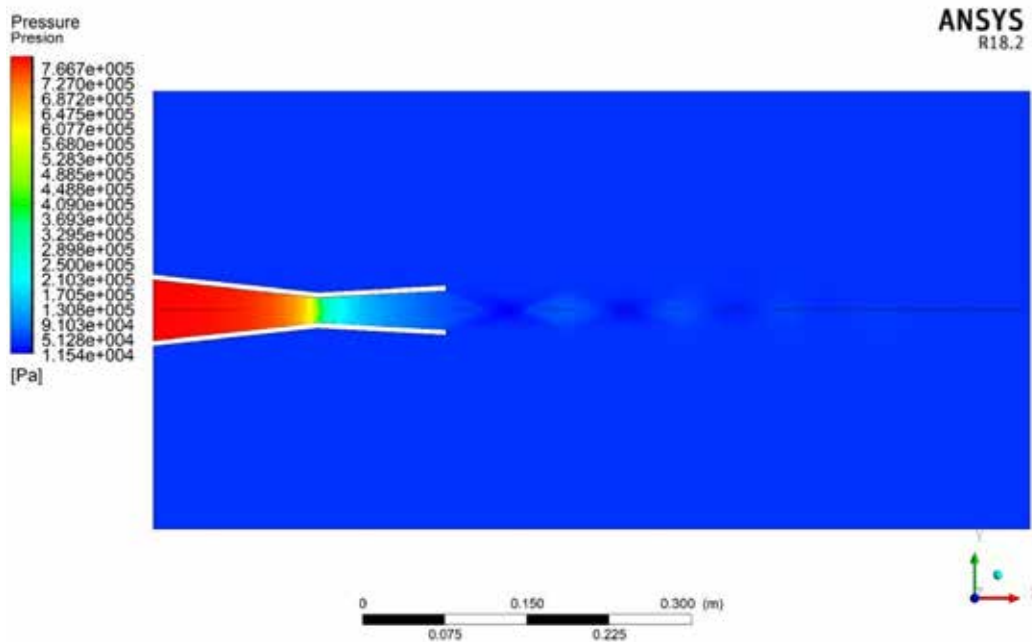
Para conocer las propiedades del fluido en cuestión a 7.000 m de altura, se procedió a revisar el anexo B, el cual indica que para 7.000 m la temperatura es de -30,5 °C y la presión es de 41,11 kPa, siendo estos los datos requeridos para una correcta resolución de las ecuaciones.

En la figura 38 se visualiza como la presión en la entrada es de 800 kPa y la misma sufre un importante decrecimiento en los primeros 0,267 m o 267mm los cuales corresponden a la longitud total de la tobera convergente divergente seleccionada para el estudio (ver Apéndice A), rondando la presión a la salida del dispositivo los 50kPa, en la curva al no tener un salto abrupto de un incremento en la presión, se puede predecir que no se generaron ondas de choque normales que desaceleren el flujo, siendo esta diferencia de presiones suficiente para genera un flujo supersónico en la zona exterior de la descarga de mencionado dispositivo.

Por otra parte, se observa en el gráfico de contorno de la figura 39, una especie de diamantes a lo largo de la estela, en estas zonas es notoria una diferencia de presión respecto al resto del D.F. existiendo en la mismas una subida de presión. Fenómeno que será explicado más adelante.

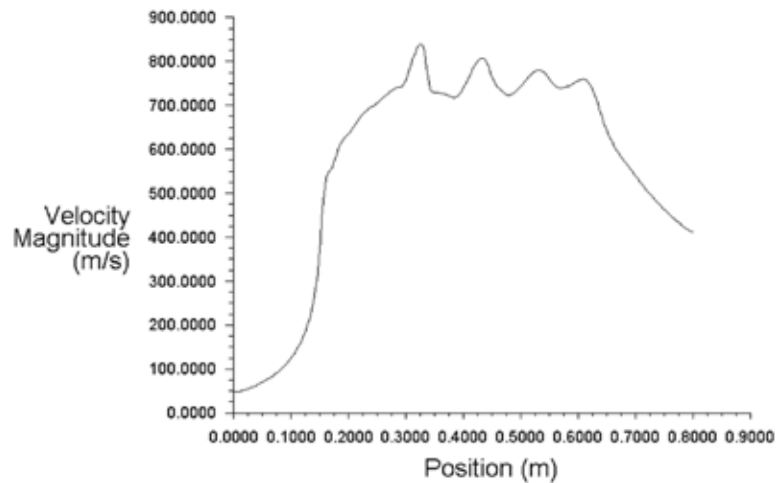


**Figura 38: Curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 7.000m**  
 Fuente: Granados (2018)



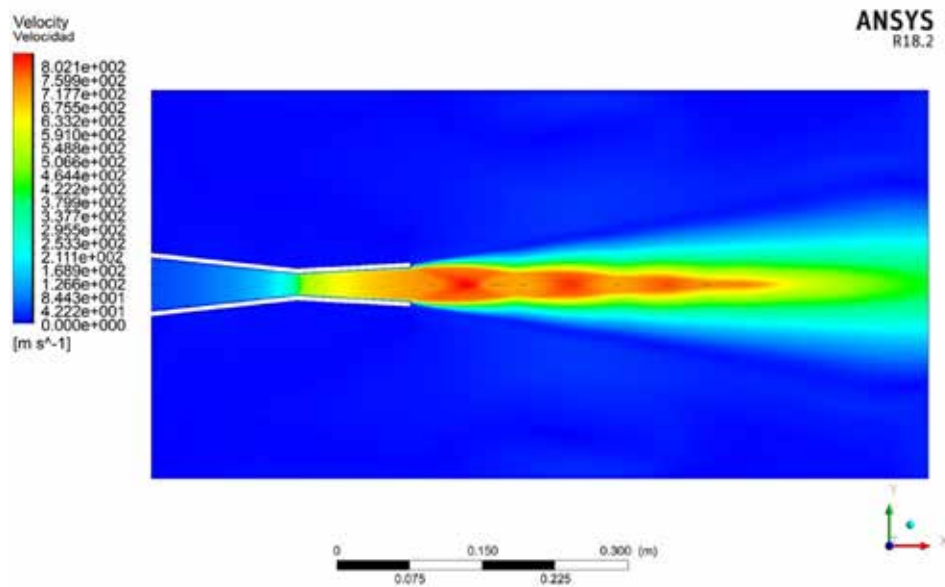
**Figura 39: Diagrama de contorno de la presión para 7.000m**  
 Fuente: Granados (2018)

En lo que a la velocidad del flujo respecta, se puede notar claramente en la figura 38, que a la salida de la tobera de Laval se manejan velocidades alrededor de los 750 m/s, siendo evidente la aceleración a la que fue sometido el fluido. También de interés los picos que se presentan a lo largo de la estela de flujo (véase figura 41) tomando velocidades superiores a los 800 m/s.



**Figura 40: Curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 7.000m**

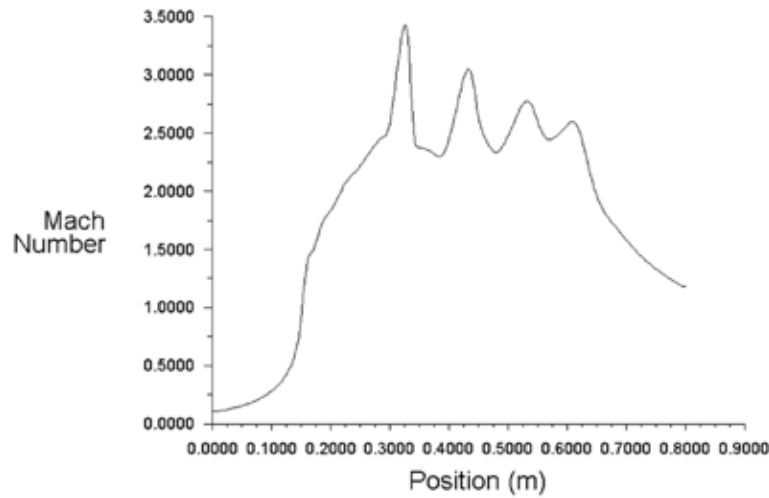
Fuente: Granados (2018)



**Figura 41: Diagrama de contorno de la velocidad para 7.000m**

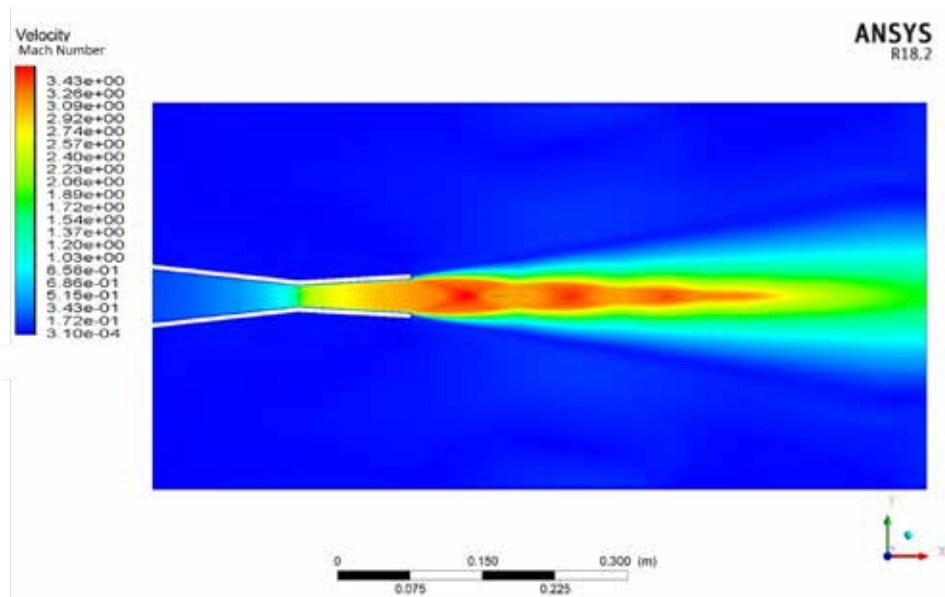
Fuente: Granados (2018)

Bien sabido es que, el número de Mach es la relación de la velocidad del sonido y la velocidad del objeto estudio, viene siendo lógica la similitud entre el comportamiento de las curvas de velocidad y el número de Mach de la figura 42, teniendo picos de la misma manera que la velocidad, con un valor máximo muy próximo a 3,5.



**Figura 42: Curva del número de Mach versus la posición a lo largo del flujo para 7.000m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 43: Diagrama de contorno del número de Mach para 7.000m**

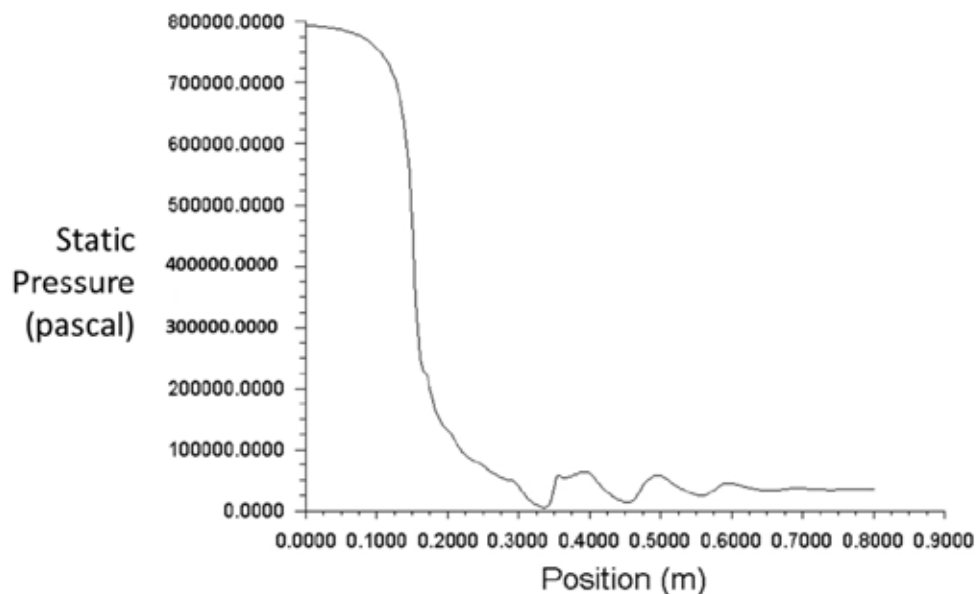
Fuente: Granados (2018)

En el gráfico de contorno de la figura 43, se visualiza la aparición de unos rombos o diamantes en la parte central del flujo, teniendo los mismos un menor número de mach que sus alrededores.

#### 4.5.2. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 8.000 m

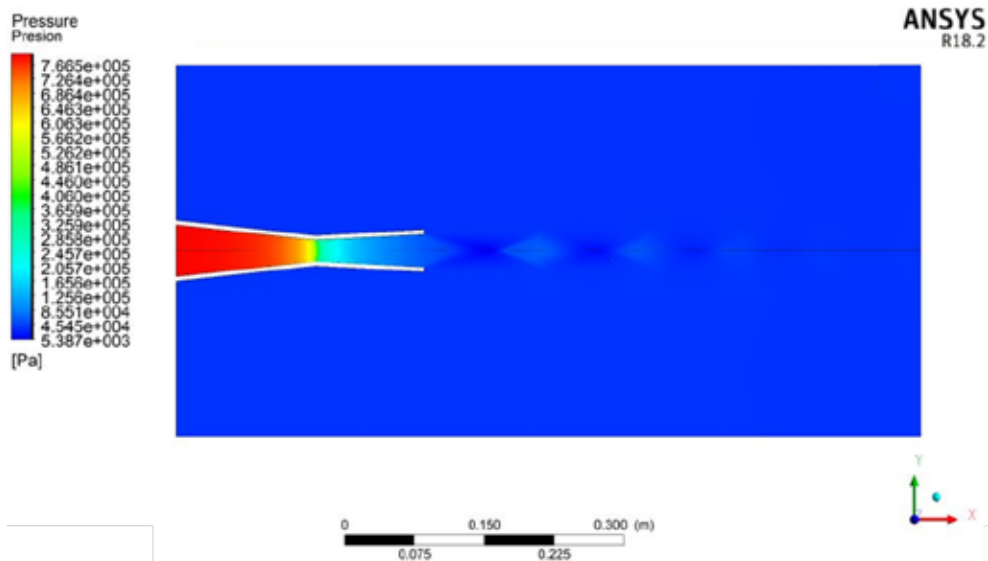
Al igual que para la altura de estudio precedente, para conocer las propiedades del aire a 8.000 m se recurrió a la tabla del anexo B, siendo estas 35,65 kPa para la presión y -36,9 °C para la temperatura. Datos fundamentales para la aproximación numérica de esta oportunidad.

Es importante destacar que el comportamiento de la presión a distintas alturas es bastante similar para el caso predecesor, el presente y los siguientes, sin embargo, en esta oportunidad las caídas de presión que ocurren entre un rombo y otro (ver figura 44 y 44), en esta oportunidad son más significativas. Esto se debe a las velocidades que experimenta el flujo, y el confinamiento al que se encuentra sometido, por las distintas ondas de choque que existen en la estela.



**Figura 44: Curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 8.000m**

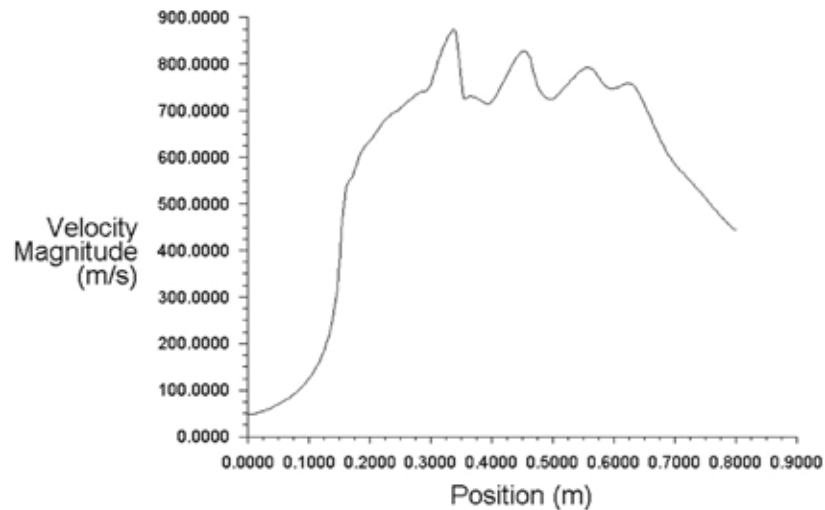
Fuente: Granados (2018)



**Figura 45: Diagrama de contorno de la presión para 8.000m**

Fuente: Granados (2018)

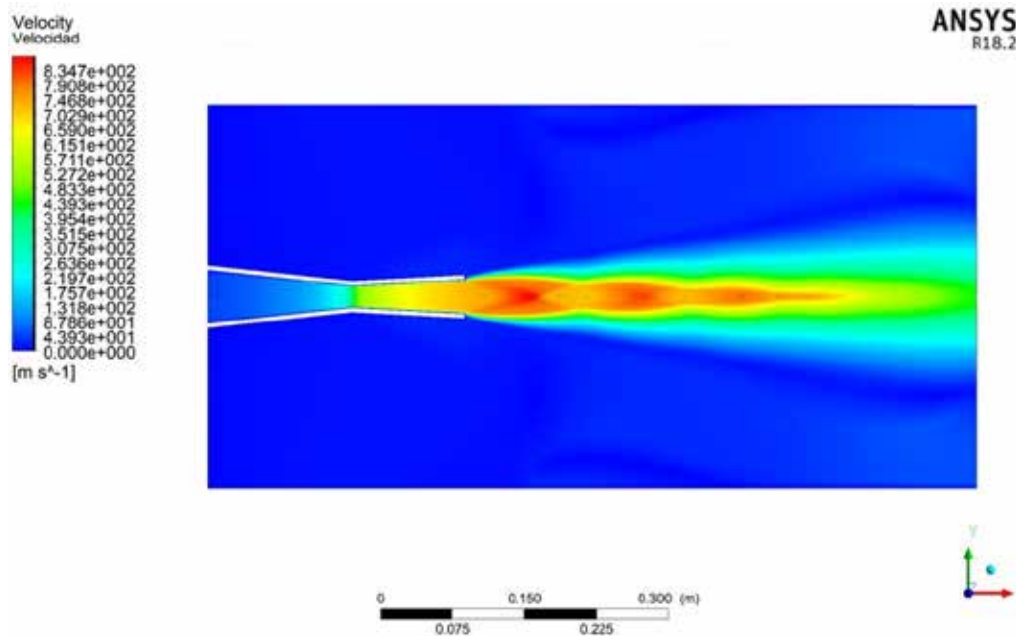
Al ser mayor la diferencia de presiones entre la entrada y la salida de la tobera es correcto suponer, que la velocidad a la salida de la misma también incrementara de manera significativa, en esta oportunidad se observa en la curva de la figura 46, que la velocidad del aire a la salida de la tobera está en el orden de los casi 800 m/s, y dando picos de máxima velocidad alrededor de los 900 m/s.



**Figura 46: Curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 8.000m**

Fuente: Granados (2018)

Tanto en la gráfica de contorno de la figura 47 como en la curva de la figura anterior, podemos detallar que a medida que la estela se aleja de la salida de la tobera de Laval, el fluido va cediendo energía al ambiente perdiendo así velocidad, hasta el punto en el cual no es apreciable la estela, es decir, el mismo se desacelera hasta que el aire retoma las propiedades del ambiente.



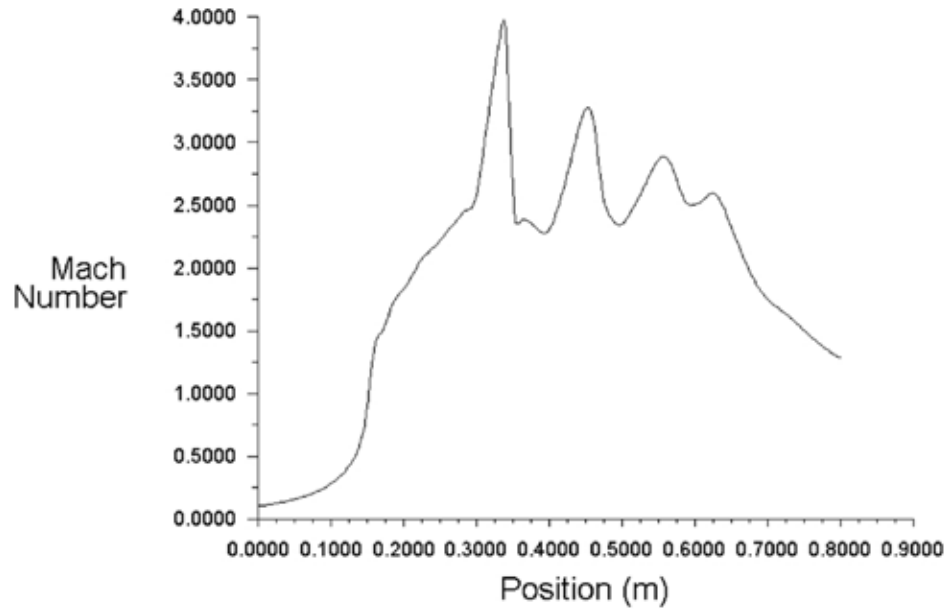
**Figura 47: Diagrama de contorno de la velocidad para 8.000m**

Fuente: Granados (2018)

En el gráfico generado en la figura 48, se evidencia la gran aceleración a la que está sometido el flujo, al alcanzar un número de mach máximo poco menor de 4, en tan solo una disminución de presión de 5,46 kPa del caso estudio anterior y a su vez experimentando picos más pronunciados con diferencias entre las zonas de menor y mayor velocidad. Esto debido a la superposición de las ondas de choque oblicuas que están interactuando de manera permanente dentro de la estela.

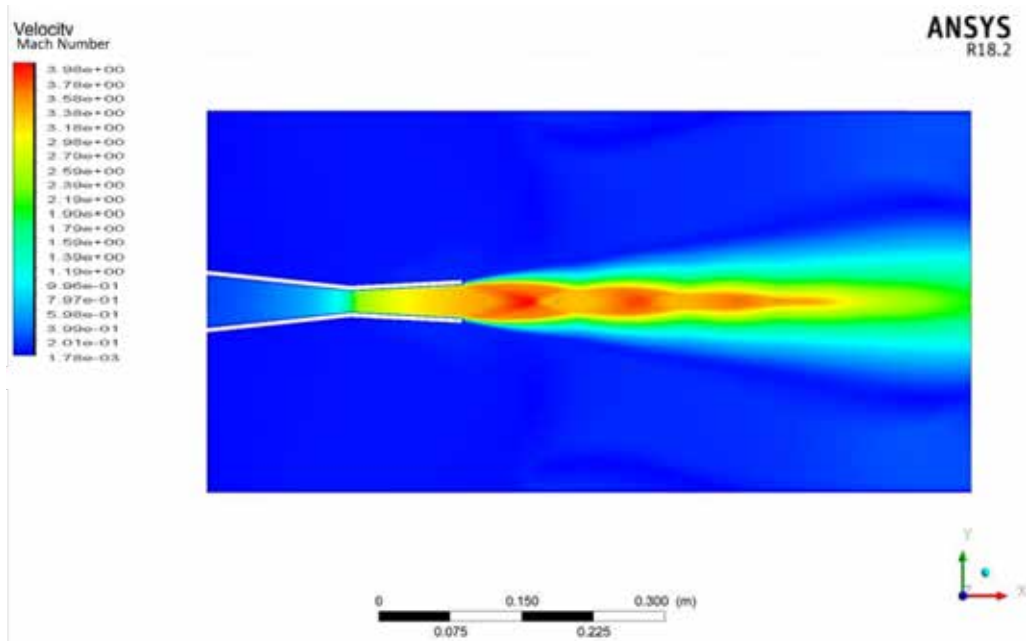
Esto se ve con mayor detalle en el gráfico de contorno de la figura 49, donde se visualizan unos rombos o diamantes, en los que el número de mach decrece alrededor de los 2 a 2,25, para posteriormente volver a acelerarse y desacelerarse de manera continua, este fenómeno de la superposición de ondas de choque fue estudiado a

detalle por Ekanayake en 2013, en Melbourne Australia y se encuentra explicado con mayor precisión en el posterior desarrollo del presente trabajo.



**Figura 48: Curva del número de Mach versus la posición a lo largo del flujo para 8.000m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 49: Diagrama de contorno del número de Mach para 8.000m**

Fuente: Granados (2018)

### 4.5.3. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 9.000 m

Según valores sustraídos de la tabla de propiedades de la atmosfera a gran altitud. Podemos afirmar que a 9.000 m de altura la presión a la que se encuentra el aire es de 30,80 kPa y a una temperatura de -43,4 °C.

En este caso la caída de la presión es mayor, siendo así más marcadas las zonas de menor presión en la estela de flujo, experimentando un valor mínimo aproximado de 2,5 kPa como se evidencia en el diagrama de contorno de la figura 51, con intervalos más pronunciados entre los puntos de mayor presión de la estela de aproximadamente 100 kPa, lo cual sustenta que el fluido se desacelera en estas zonas al sacrificar velocidad para ganar presión.

En el caso de la velocidad, en la curva de la figura 50 encontramos picos alrededor de los 950 m/s. No obstante, un fenómeno que no ha sido mencionado hasta el momento, es el muy notorio abanico de expansión de Prandl – Meyer, que se visualiza con bastante detalle en el gráfico de contorno de la figura 53, el mismo es generado por la separación angular de las ondas de choque oblicuas que se generan en la salida de la tobera, las cuales a medidas que se alejan de la salida del dispositivo se separan cada vez más las unas de las otras.

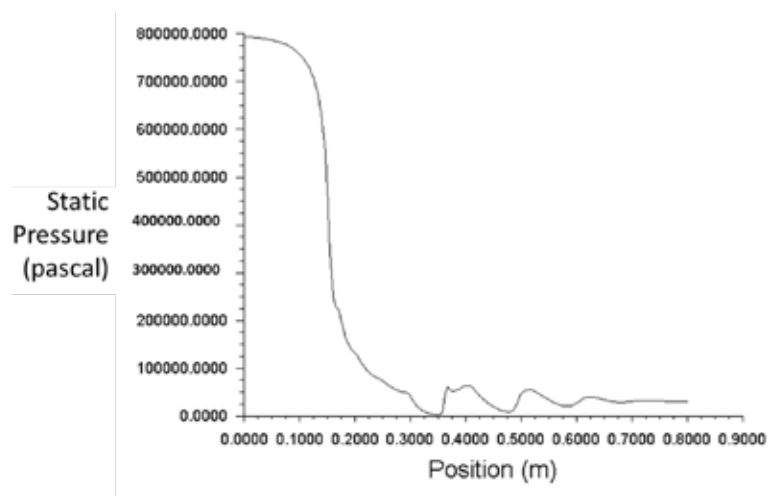
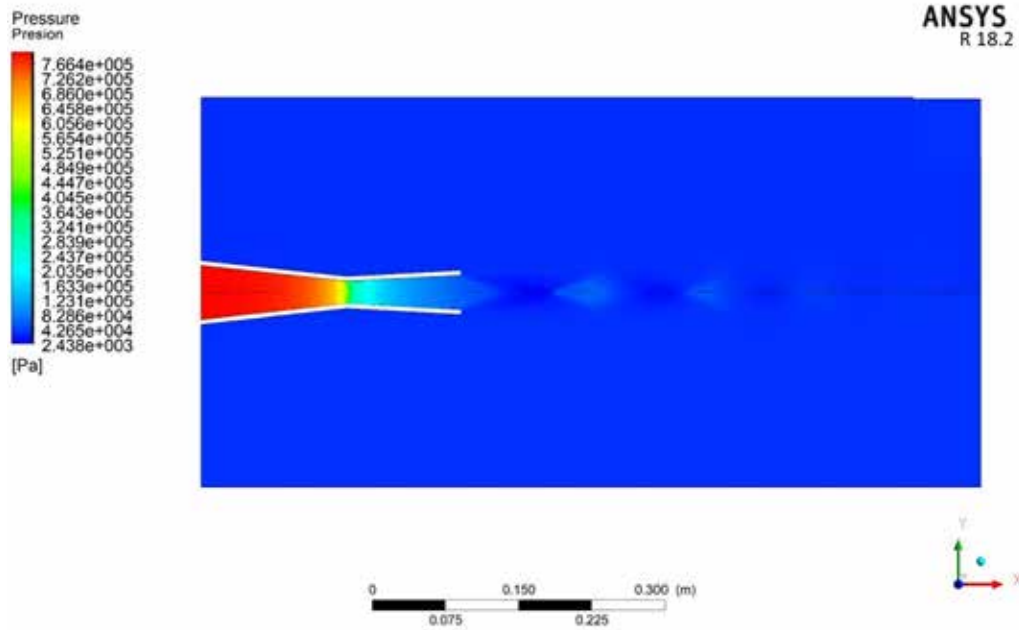


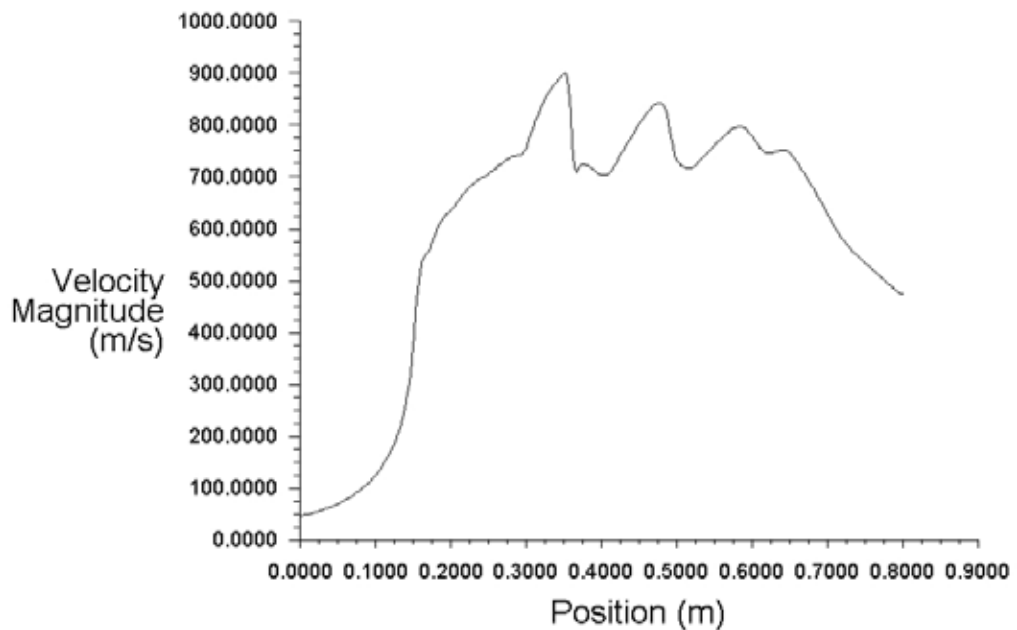
Figura 50: Curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 9.000m

Fuente: Granados (2018)



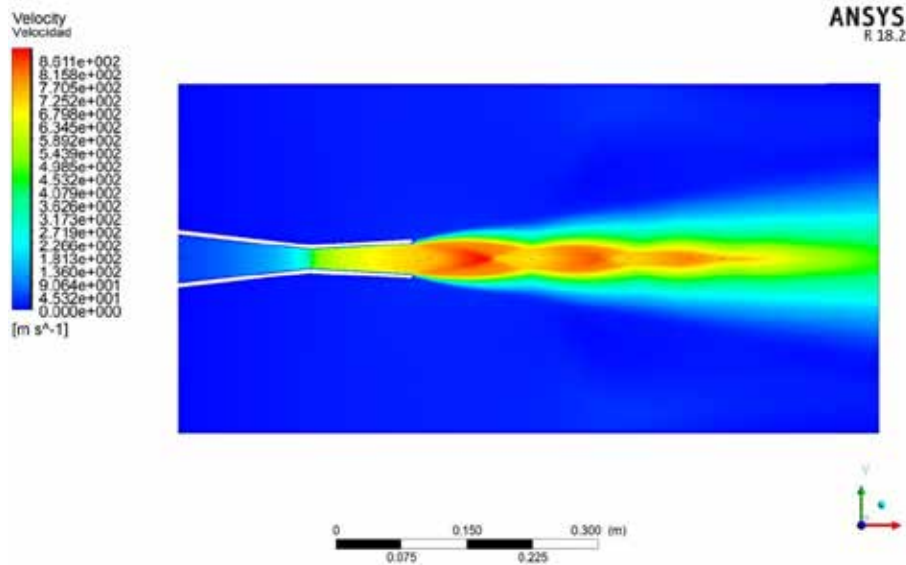
**Figura 51: Diagrama de contorno de la presión para 9.000m**

Fuente: Granados (2018)



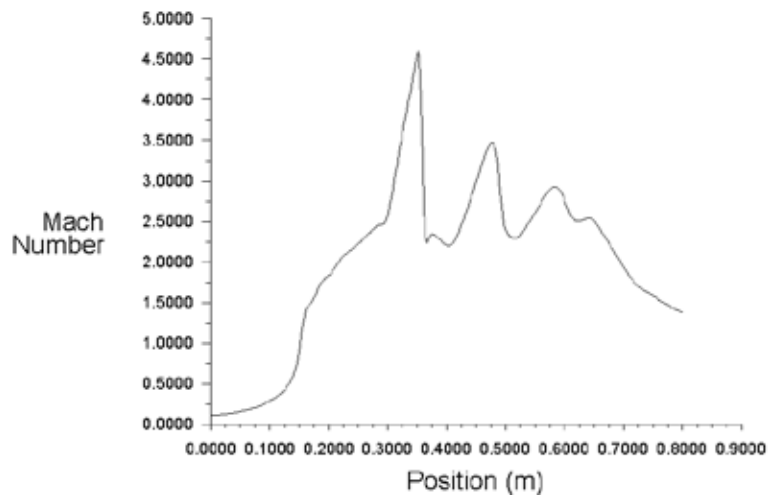
**Figura 52: Curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 9.000m**

Fuente: Granados (2018)

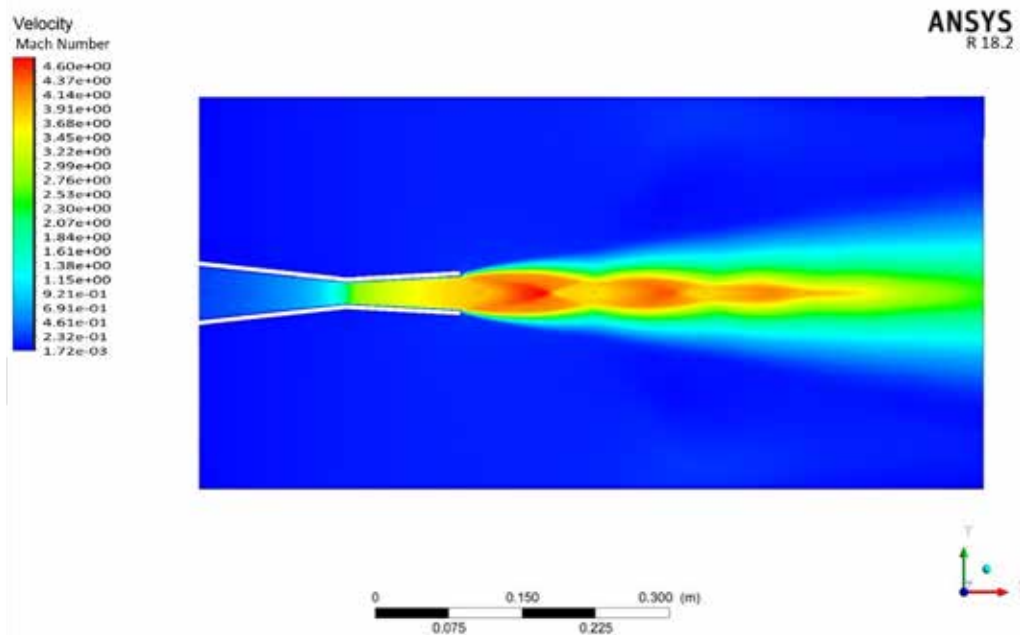


**Figura 53: Diagrama de contorno de la velocidad para 9.000m**  
 Fuente: Granados (2018)

A medida que incrementa el diferencial de presiones entre la entrada y la salida de la tobera, se observa cómo se acentúan los picos tornando más notorios los cambios de velocidad en el flujo, como bien se puede observar en la figura 54, cuya curva sufre incrementos y decrementos drásticos, estando inicialmente en un número de mach de 2,5 aproximadamente, llegando a un tope de unos 4,75, para volver a caer hasta valores inferiores de 2,25.



**Figura 54: Curva del número de Mach versus la posición a lo largo del flujo para 9.000m**  
 Fuente: Granados (2018)



**Figura 55: Diagrama de contorno del número de Mach para 9.000m**

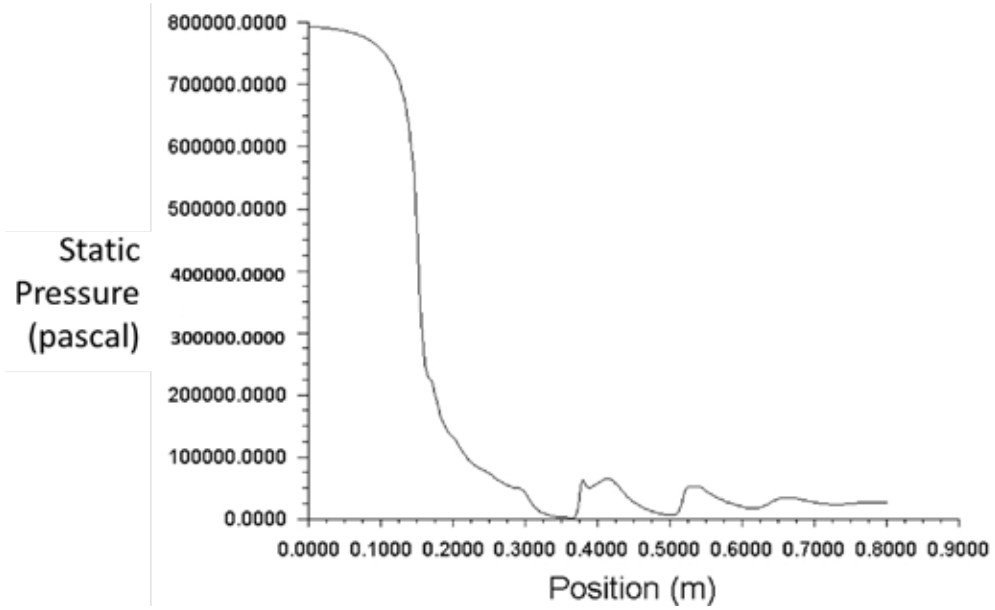
Fuente: Granados (2018)

#### **4.5.4. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 10.000 m**

Para una altura tan elevada es lógico que las presiones atmosféricas disminuyan de manera considerable, el cual es el caso de los 10.000m en los que el aire se encuentra a una presión de 26,5 kPa y a una temperatura de -49,9 °C.

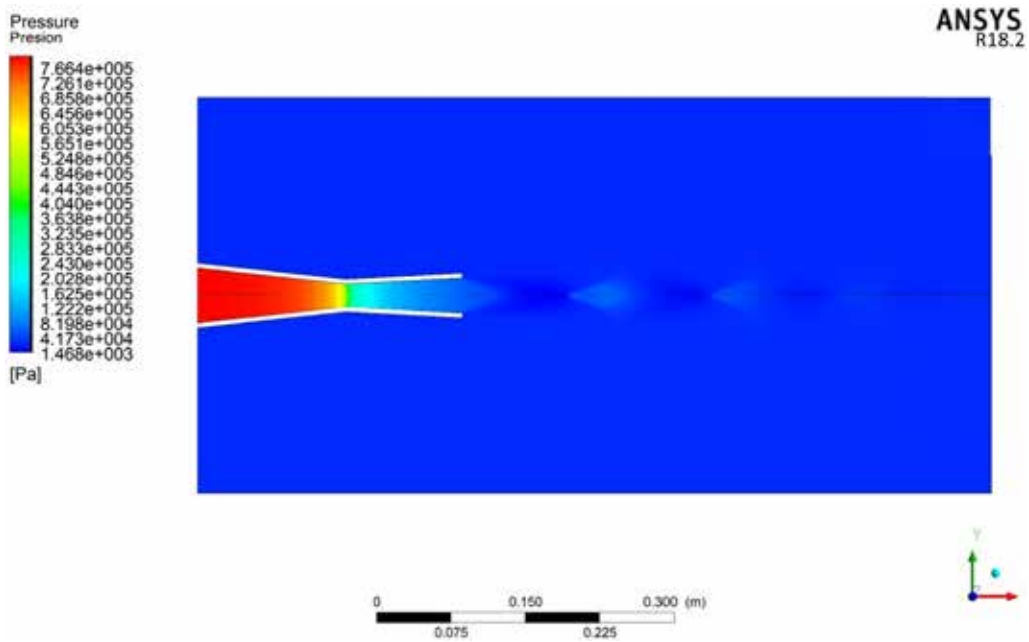
En la curva de presión de la figura 56, se detalla como a la salida del dispositivo el valor de la presión se encuentra por debajo de los 50 kPa, y en la misma existen picos muy pronunciados con presiones mínimas aproximadas de 1 kPa (véase figura 57).

Para una diferencia de presiones tan significativa de más de 750 kPa, es de esperarse que el flujo adquiera grandes aceleraciones y así obtener velocidades máximas de casi 1km/s como se observa en la curva de la figura 58, este incremento en la velocidad se debe a los ya mencionados choques super puestos, al igual que las caídas en las mismas.



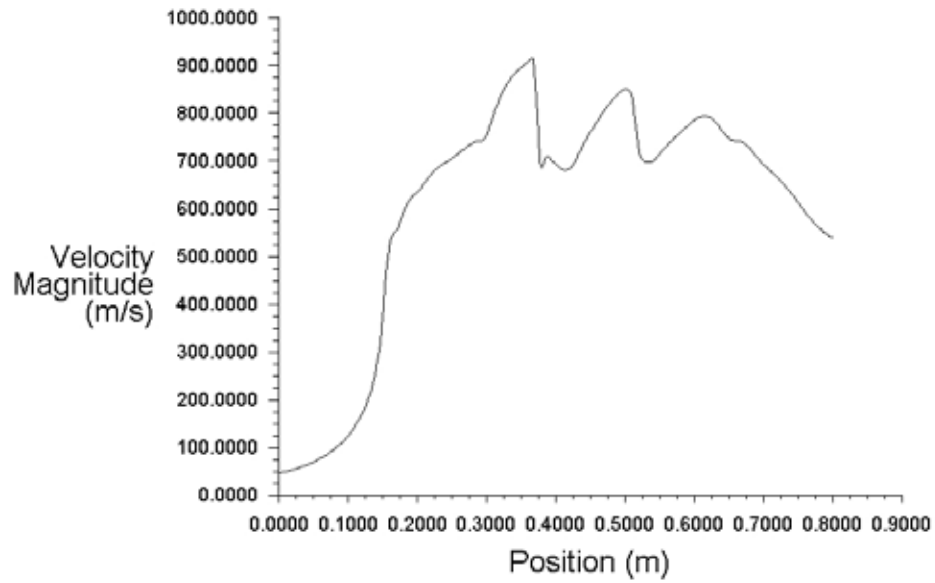
**Figura 56: Curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 10.000m**

Fuente: Granados (2018)



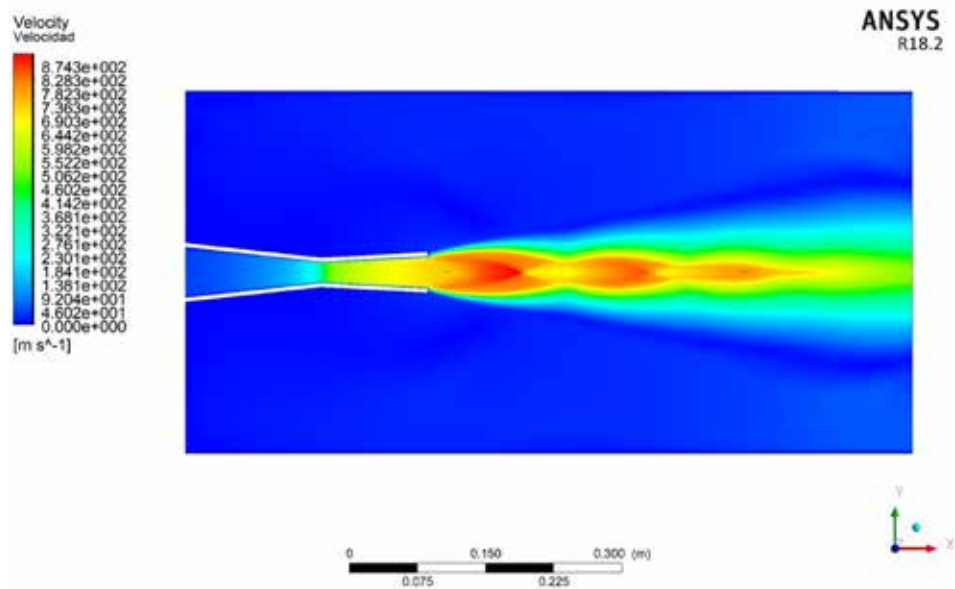
**Figura 57: Diagrama de contorno de la presión para 10.000m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 58: Curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 10.000m**

Fuente: Granados (2018)

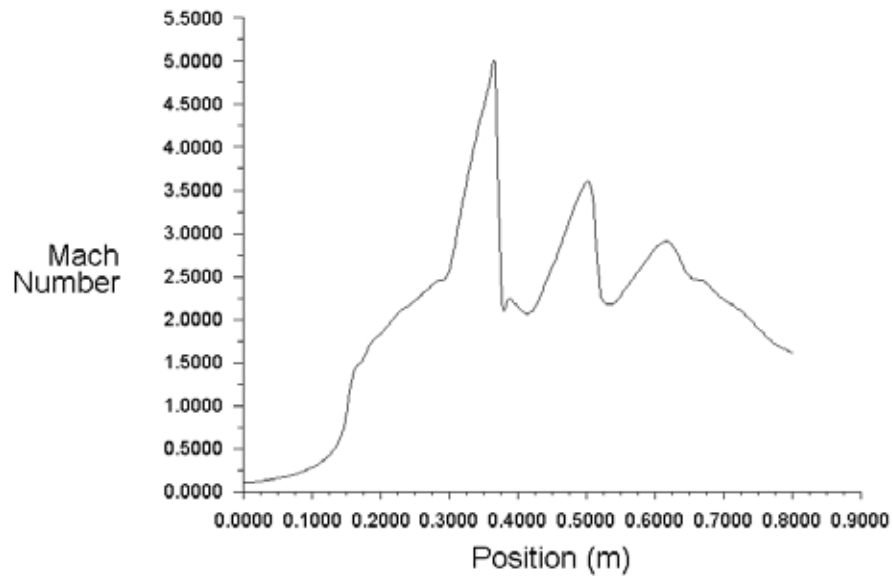


**Figura 59: Diagrama de contorno de la velocidad para 10.000m**

Fuente: Granados (2018)

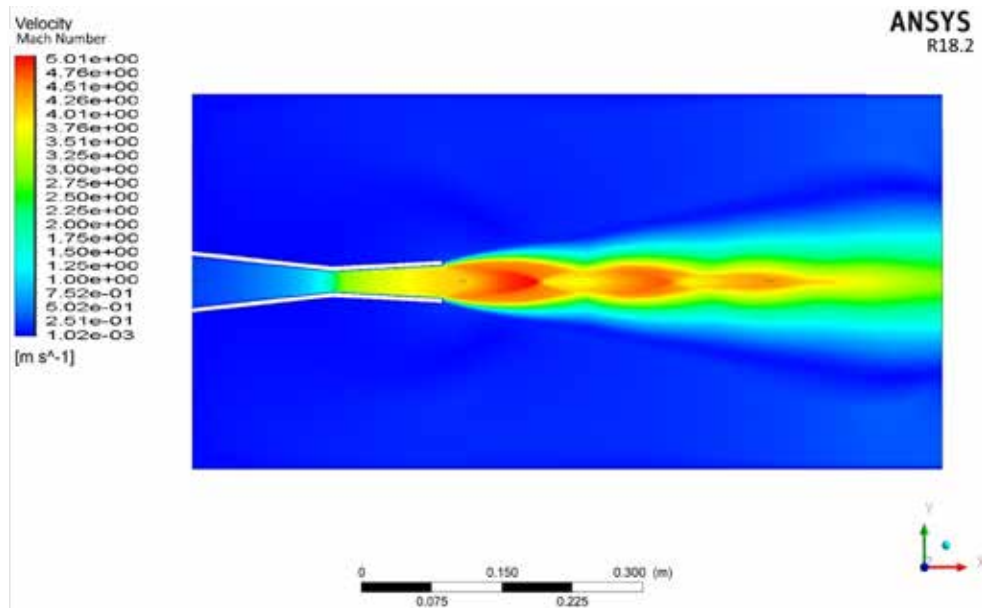
No menos importante en este caso (como en los anteriores), se evidencia con bastante claridad el efecto Coandâ del comportamiento del fluido, en el diagrama de contorno de la figura 59. En lo que al número de mach respecta, en la medida que la

diferencia de presiones aumenta, los picos también lo hacen teniendo caídas más abruptas (ver figura 60), alcanzando valores máximos de 5 aproximadamente y experimentando un decrecimiento hasta 1,5.



**Figura 60: Curva del número de Mach versus la posición a lo largo del flujo para 10.000m**

Fuente: Granados (2018)



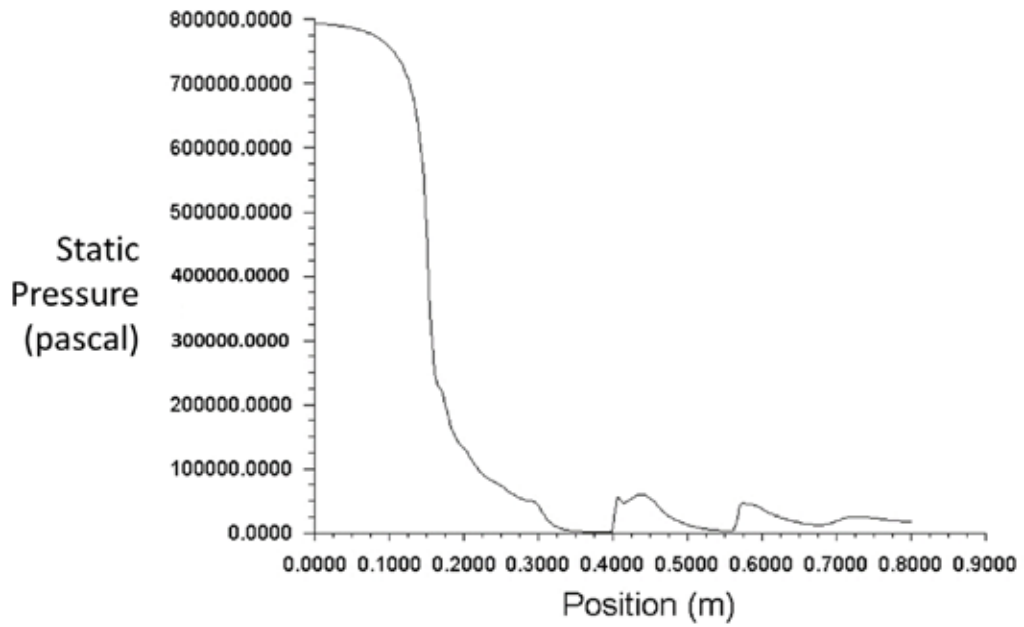
**Figura 61: Diagrama de contorno del número de Mach para 10.000m**

Fuente: Granados (2018)

#### **4.5.5. Caracterización del campo de flujo externo de la descarga de la tobera para una altitud de 12.000 m**

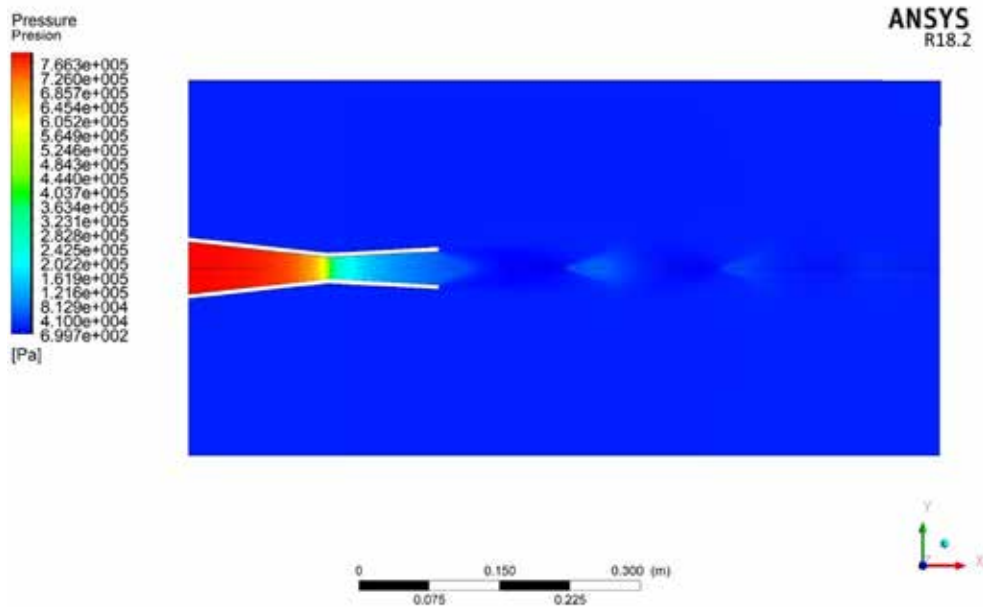
Como último caso las propiedades de la atmosfera a 12.000 m se caracterizan por presentar una presión de 19,40 kPa y una temperatura de -56,5 °C. Como se puede notar en los casos anteriores, a medida que la diferencia de presiones aumenta entre la entrada y la salida, en la estela de flujo, las zonas de superposición de ondas de choque se hacen más notorias, otorgándole al flujo una forma con características más pronunciadas como se evidencia en el diagrama de contorno de la figura 65.

La curva de presión (ver figura 62) demuestra una vez más unos saltos en las zonas donde se aprecian estos diamantes (ver figura 63) anteriormente mencionados, y un decrecimiento en la presión bastante significativo, que al comparar ambas gráficas (figuras 61 y 62), la presión mínima alcanzada es de aproximadamente 600 Pa, es decir, menos del 0,1% de la presión de entrada. Lo cual indica que las condiciones del flujo turbulento que experimenta la estela de flujo, tienen áreas fuertemente contenidas por otras líneas de flujo, las cuales se podría decir separan en dos la estela.



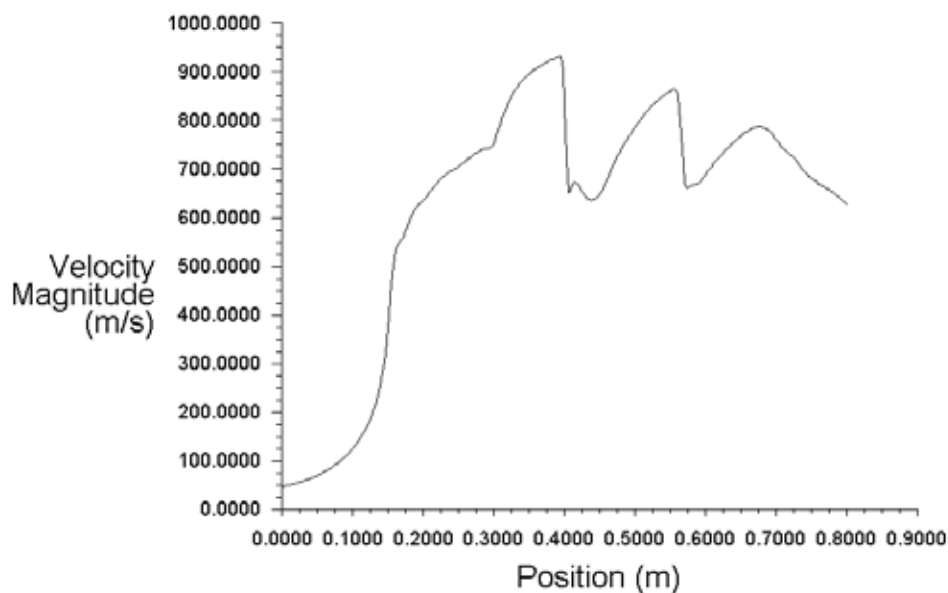
**Figura 62: Curva de la presión versus la posición a lo largo del flujo para 12.000m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 63: Diagrama de contorno de la presión para 12.000m**

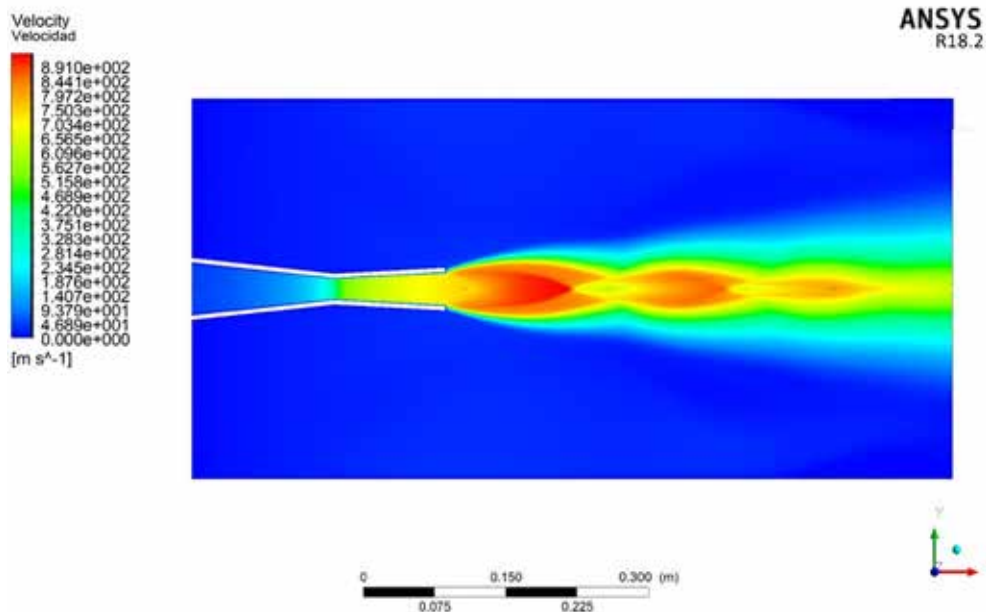
Fuente: Granados (2018)



**Figura 64: Curva de la velocidad versus la posición a lo largo del flujo para 12.000m**

Fuente: Granados (2018)

Al ser tan grande la diferencia de presiones entre la entrada y la salida de la tobera, es de esperarse que el flujo alcance velocidades mayores, no obstante, la diferencia de presiones atmosféricas entre los 10.000 m y los 12.000 m, es de 7,1 kPa, por lo cual, la diferencia entre las velocidades máximas entre ellas no variara de manera realmente significativa. De igual manera comparando ambos gráficos de velocidad (Figuras 64 y 65) se observa que la velocidad máxima en este caso, también es muy próxima al kilómetro por segundo.

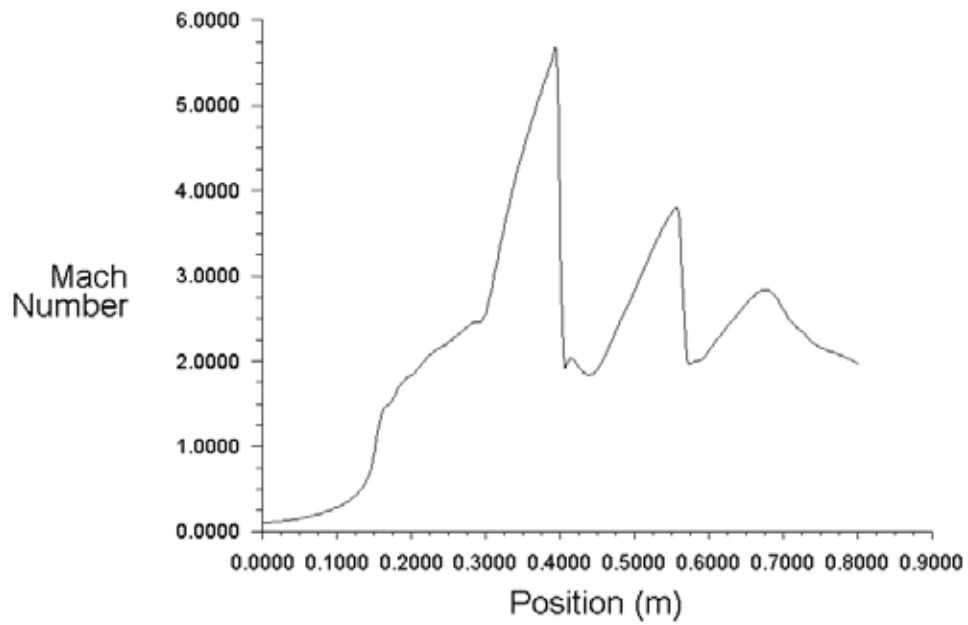


**Figura 65: Diagrama de contorno de la velocidad para 12.000m**

Fuente: Granados (2018)

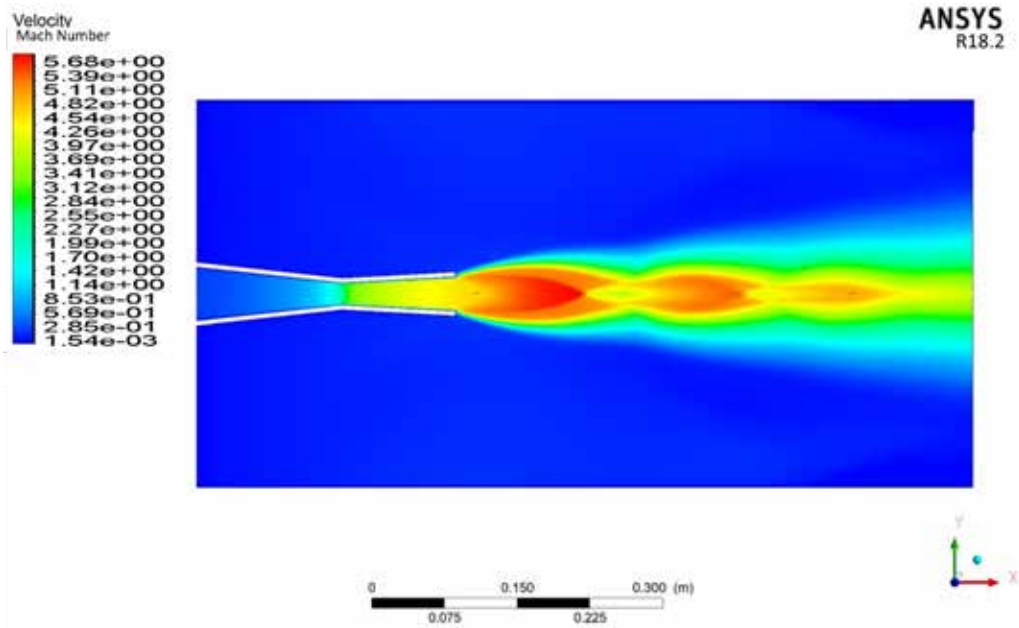
En esta oportunidad el número de Mach alcanza valores que rondan entre 5,5 y 6, lo cual define al flujo como hipersónico, y vuelven a aparecer estos picos de caída del número de mach de un valor hipersónico de aproximadamente 5,75 a un valor super sónico de aproximado de 1,75.

Al comparar las gráficas del número de Mach 65 y 66, se puede visualizar que las caídas repentinas del número de Mach ocurren en la zona de diamante o donde se superponen las líneas de flujo de los choques oblicuos, para nuevamente volver a acelerarse en virtud del mismo fenómeno, una y otra vez, esta refracción es lo que da esta forma característica de un singular vaivén en la estela de flujo procedente de la tobera.



**Figura 66: Curva del número de Mach versus la posición a lo largo del flujo para 12.000m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 67: Diagrama de contorno del número de Mach para 12.000m**

Fuente: Granados (2018)

#### **4.5.6. Evaluación de los resultados**

Previamente fueron mencionados de manera superficial los fenómenos irreversibles que se encuentran en el campo de flujo compresible en la descarga de la tobera de Laval anteriormente definida, la misma fue sometida a cinco estudios a alturas distintas, de baja temperatura y presión atmosférica reducida.

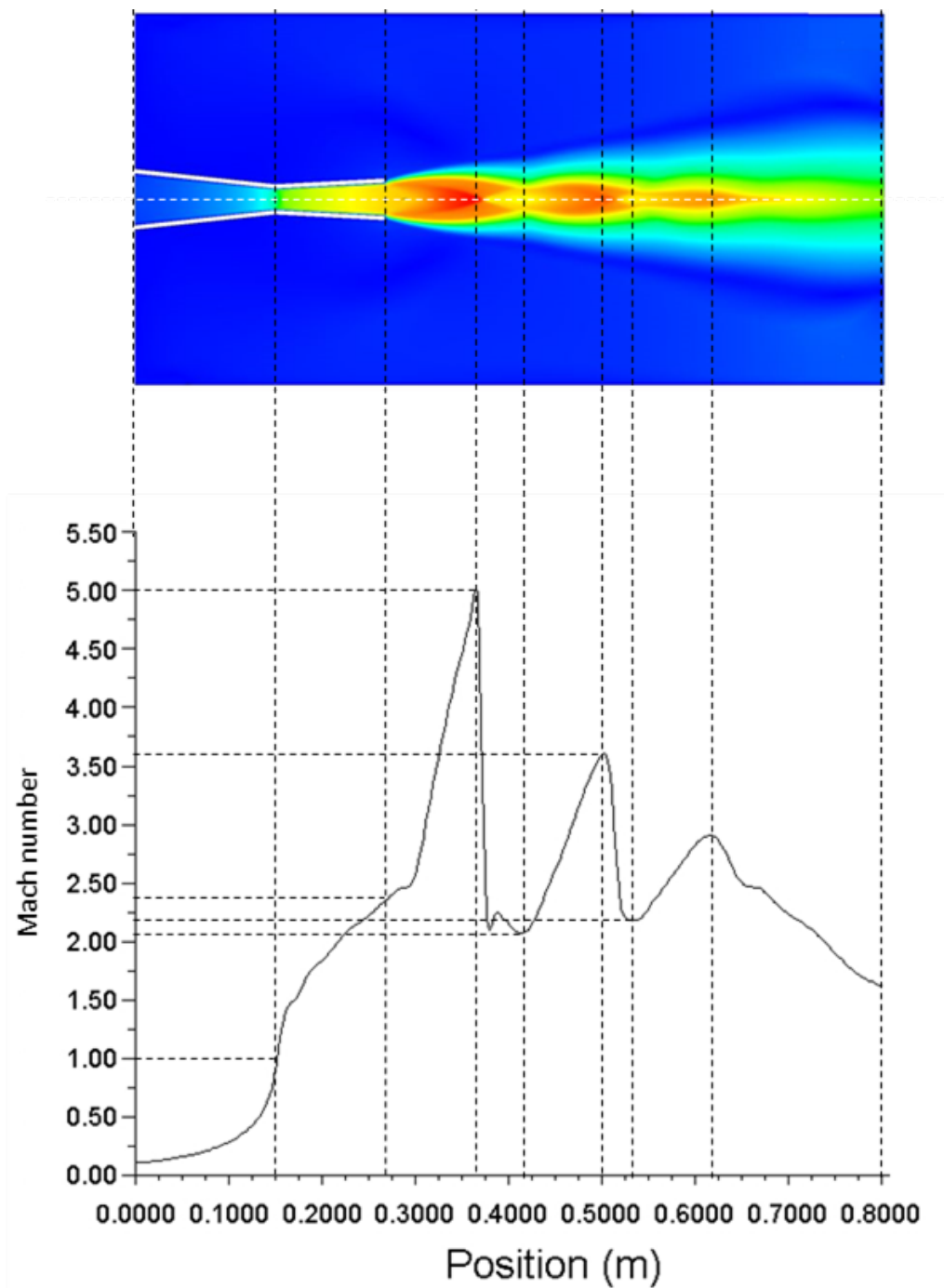
En los cinco casos, hubo presencia de todos los fenómenos mencionados y un comportamiento bastante similar entre ellos, siendo la única variable el diferencial de presiones entre la entrada y la salida de la tobera, a mayor diferencial de presiones, más notorios serán los fenómenos que aparecen en los regímenes y más drásticos los cambios de velocidad y número de Mach.

#### **4.5.7. Evaluación y caracterización de las irreversibilidades**

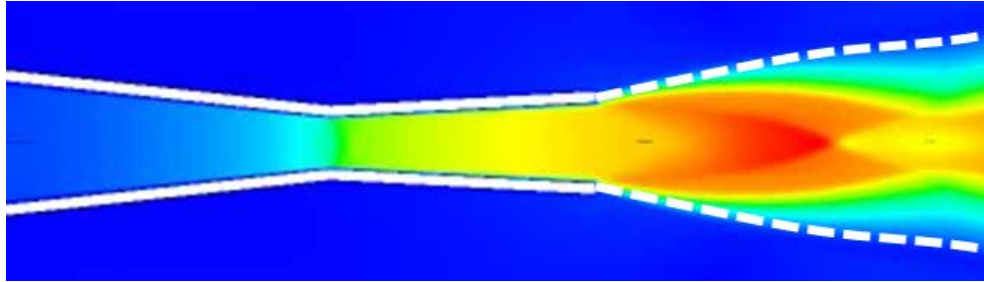
En la figura 68 se muestra el contorno del número de Mach yuxtapuesto con la curva del mismo versus la posición a lo largo del flujo, se puede observar como inicialmente la entrada es sub sónica, aparece mach igual a la unidad en la garganta, condición exclusiva para que la zona de divergencia actúe como una tobera y no como un difusor, es decir, esta condición es indispensable para que el fluido continúe acelerándose a un orden super sónico en la salida, en este caso se tiene un valor supersónico de aproximadamente 2,375.

Esta velocidad en la salida resulta suficiente para que una vez que ya no exista la generatriz de la tobera, ocurra el fenómeno de expansión, debido a que no existe una superficie sólida que lo contenga, es allí donde comienza el flujo exterior o externo, y debido a que la presión ejercida en ese punto es menor a la que ejercen las paredes de la tobera, el flujo comienza a expandirse.

No obstante, estas expansiones ocurren bajo la presencia de dos fenómenos: el efecto Coandâ y el flujo expansivo de Prandtl Meyer. El primero sugiere que un fluido va a tratar de seguir en la dirección en la que el sólido lo impulsa (ver figura 69) y el segundo consiste en ondas de choque oblicuas las cuales se van separando de la superficie con mayor velocidad.

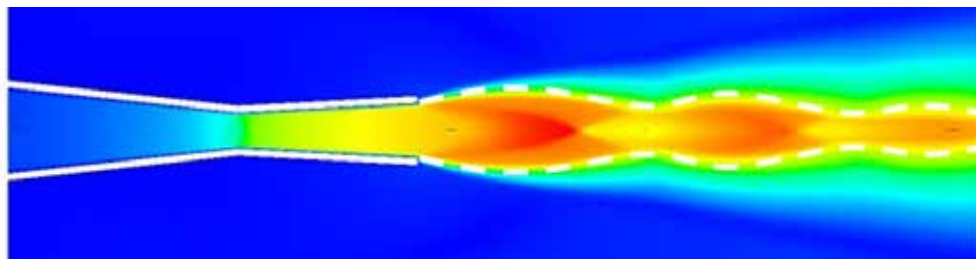


**Figura 68: Diagrama de contorno y curva del número de Mach para 10.000m**  
 Fuente: Granados (2018)



**Figura 69: Efecto Coandă para una altura de 10.000m**

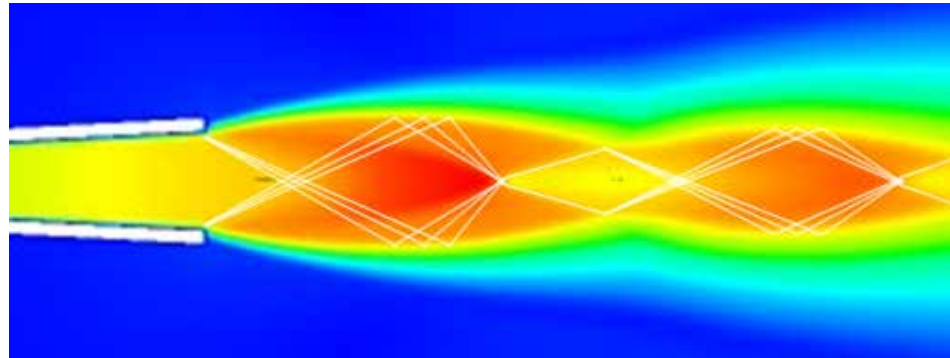
Fuente: Granados 2018



**Figura 70: flujo expansivo de Prandtl Meyer para una altura de 10.000m**

Fuente: Granados 2018

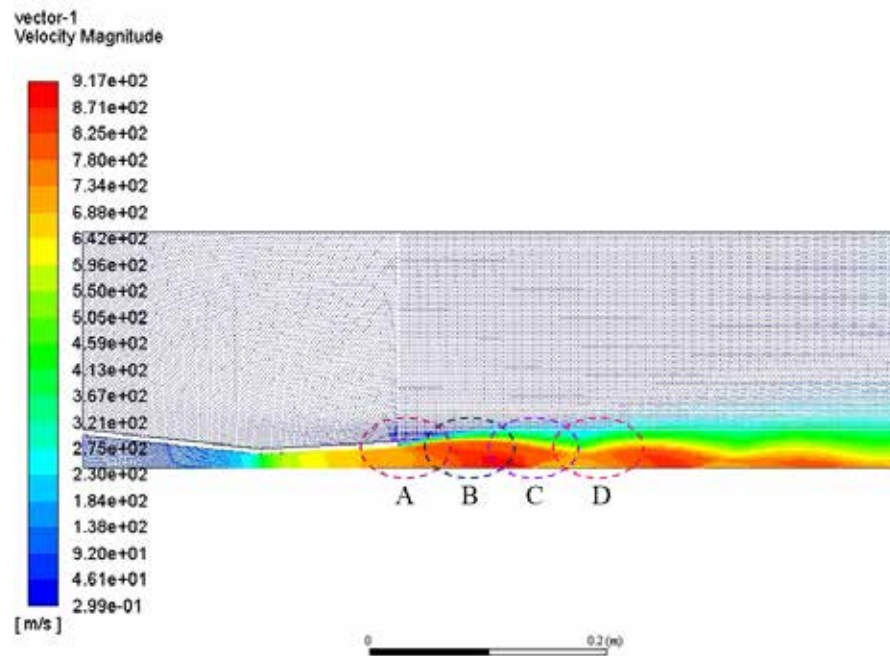
En este punto a pesar de que no existe una tobera sólida, hay una zona bien marcada de mayor velocidad (ver figura 70), lo que ocasiona que el abanico de ondas oblicuas que se generan en la salida de la tobera rebotan contra estas zonas de mayor velocidad, generándose un contorno de líneas de corriente, que van a mayor velocidad que las otras, las cuales pasan a ser, las paredes que confinan el flujo, el cual debido a que no logra escapar rebota (ver figura 71) intentando regresar nuevamente al sitio donde antes estaba siendo ocupado, es lo que genera la particular geometría del flujo.



**Figura 71: Ondas de choque oblicuas internas en la estela de flujo compresible a 10.000m**

Fuente: Granados (2018)

Este fenómeno en el cual las líneas de flujo rebotan en estas áreas de mayor velocidad y posterior intentan retornar al punto en el que antes estaba siendo ocupado, se puede apreciar en el estudio del campo vectorial (figura 72).

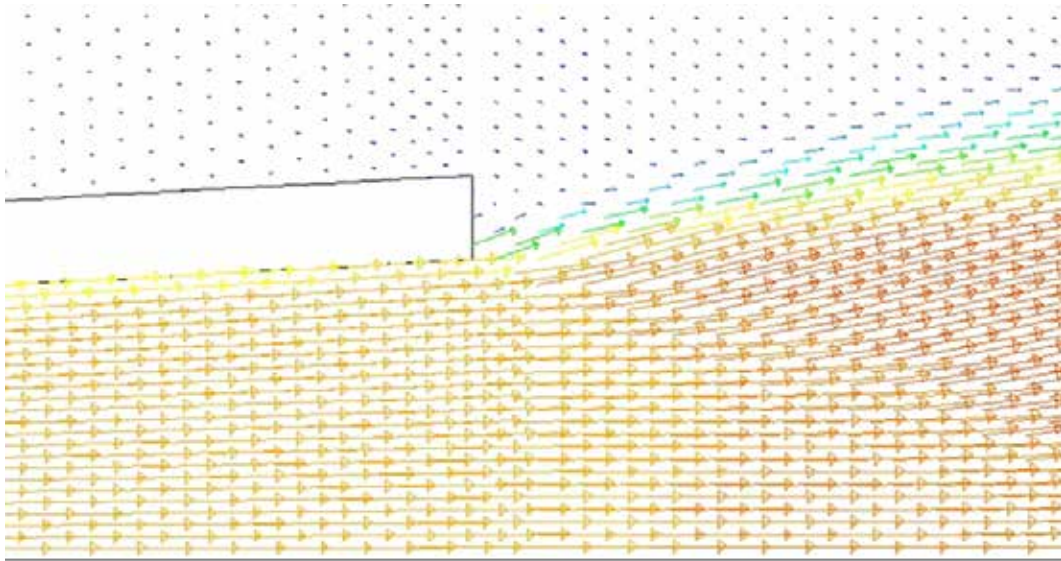


**Figura 72: Estudio del campo vectorial y sus subdivisiones a 10.000 m**

Fuente: Granados (2018)

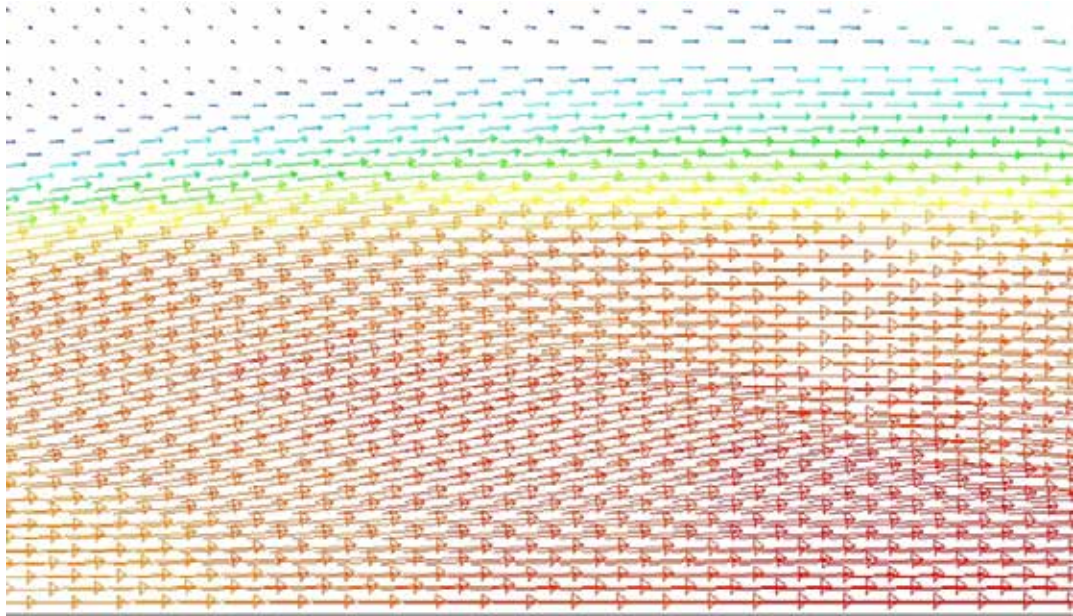
Para la correcta apreciación del campo vectorial, se dividió el mismo en cuatro partes: A, B, C y D. cabe destacar que en estos gráficos también se evidencia la separación de la capa limite, que separa el flujo laminar del turbulento.

En la subdivisión A (figura 73) se aprecia la dirección de los vectores que representan la estela, los cuales tienen una pendiente positiva en dirección a la zona de mayor velocidad (ver figura 70). Posterior en la sección B (figura 74), esta pendiente empieza a disminuir su valor aproximándose a cero, lo cual podría interpretarse como el rebote en la zona de mayor velocidad que limita la estela, para luego tomar valores negativos en la sección C (figura 75), donde una vez más la pendiente tiende a cero y los vectores disminuyen de tamaño, o en otras palabras, el fluido se desacelera, lo que respalda la teoría de que el flujo rebota en estas zonas de mayor velocidad y quiere retornar al sitio en el que anteriormente se encontraba, ocurriendo una superposición de las ondas de choque, para luego adquirir una vez más pendiente positiva en la subdivisión D (figura 76), volviéndose a acelerar el flujo, para posterior rebotar de nuevo y generar la geometría de la estela.

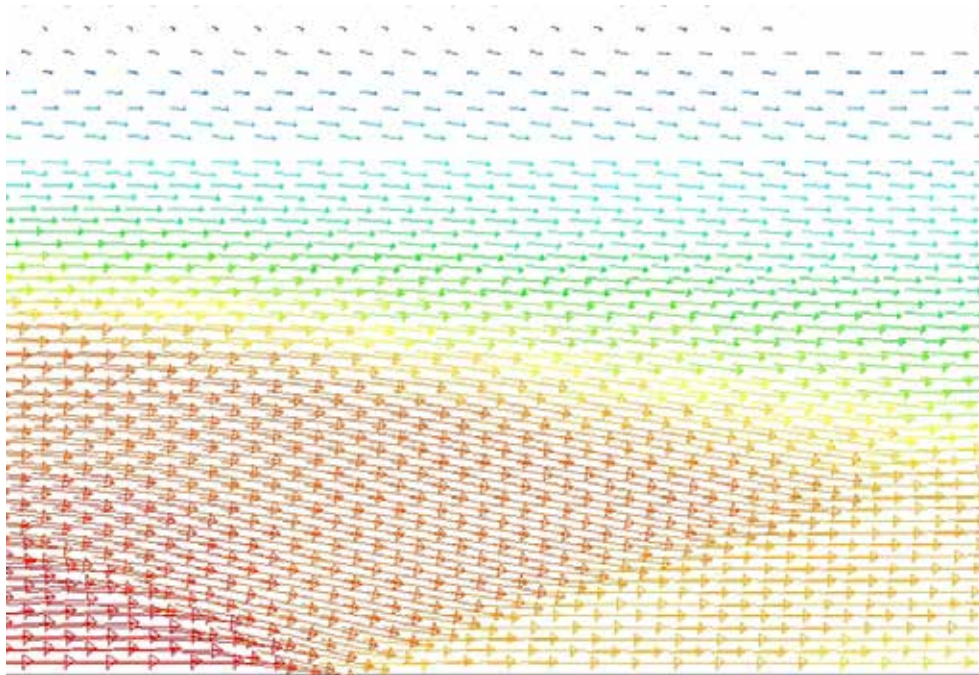


**Figura 73: Campo vectorial A**

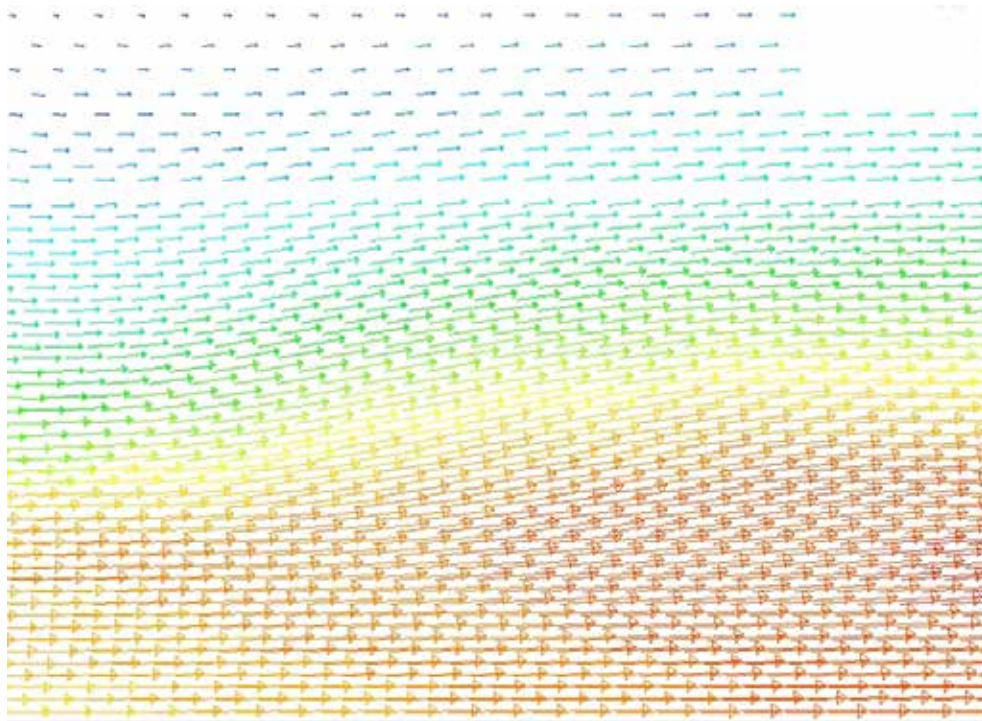
Fuente: Granados (2018)



**Figura 74: Campo vectorial B**  
Fuente: Granados (2018)



**Figura 75: Campo vectorial C**  
Fuente: Granados (2018)



**Figura 76: Campo vectorial D**

Fuente: Granados (2018)

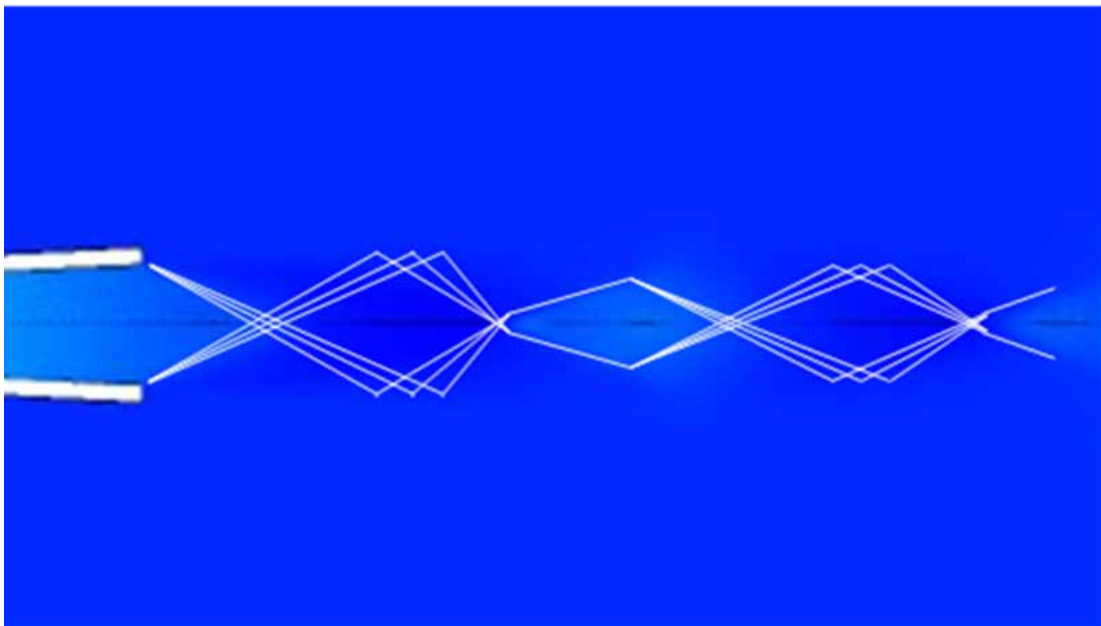
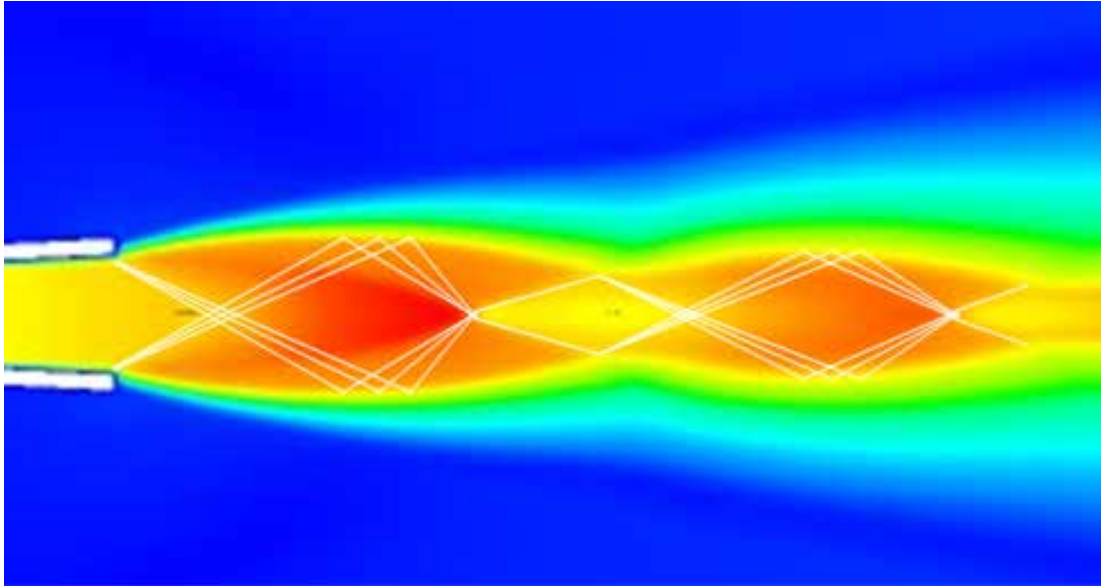
Por otra parte, en la figura 73, se visualiza claramente como por efectos de la viscosidad del aire, el mismo presenta un cizallamiento de la capa limite, el cual es notorio debido a la diferencia de tamaño en los vectores de velocidad de color turquesa respecto a los de color azul, de un tamaño mucho menor, lo mismo se observa en las subdivisiones B, C y D, de las figuras 74, 75 y 76 respectivamente. Esta separación de la capa limite es la que independiza al flujo laminar del turbulento, permitiéndole a ambos tener comportamientos completamente distintos. Este fenómeno es importante en grado no menor puesto que, gracias a él en términos coloquiales: el flujo laminar no tiene como saber lo que está ocurriendo en el flujo turbulento, dejando una notoria separación entre ambos, lo que delimita la estela de flujo super sónico.

Es importante mencionar que estas mismas líneas son las que producen el flujo de diamante que depende de las presiones de entrada y salida, y es allí donde ocurre la super posición de ondas, que se traduce en un incremento de la presión

disminuyendo la velocidad, que vuelven a acelerarse producto de la misma superposición. Lo que da origen a estos rombos o diamantes donde la presión y la velocidad van íntimamente relacionados (ver figura 77).

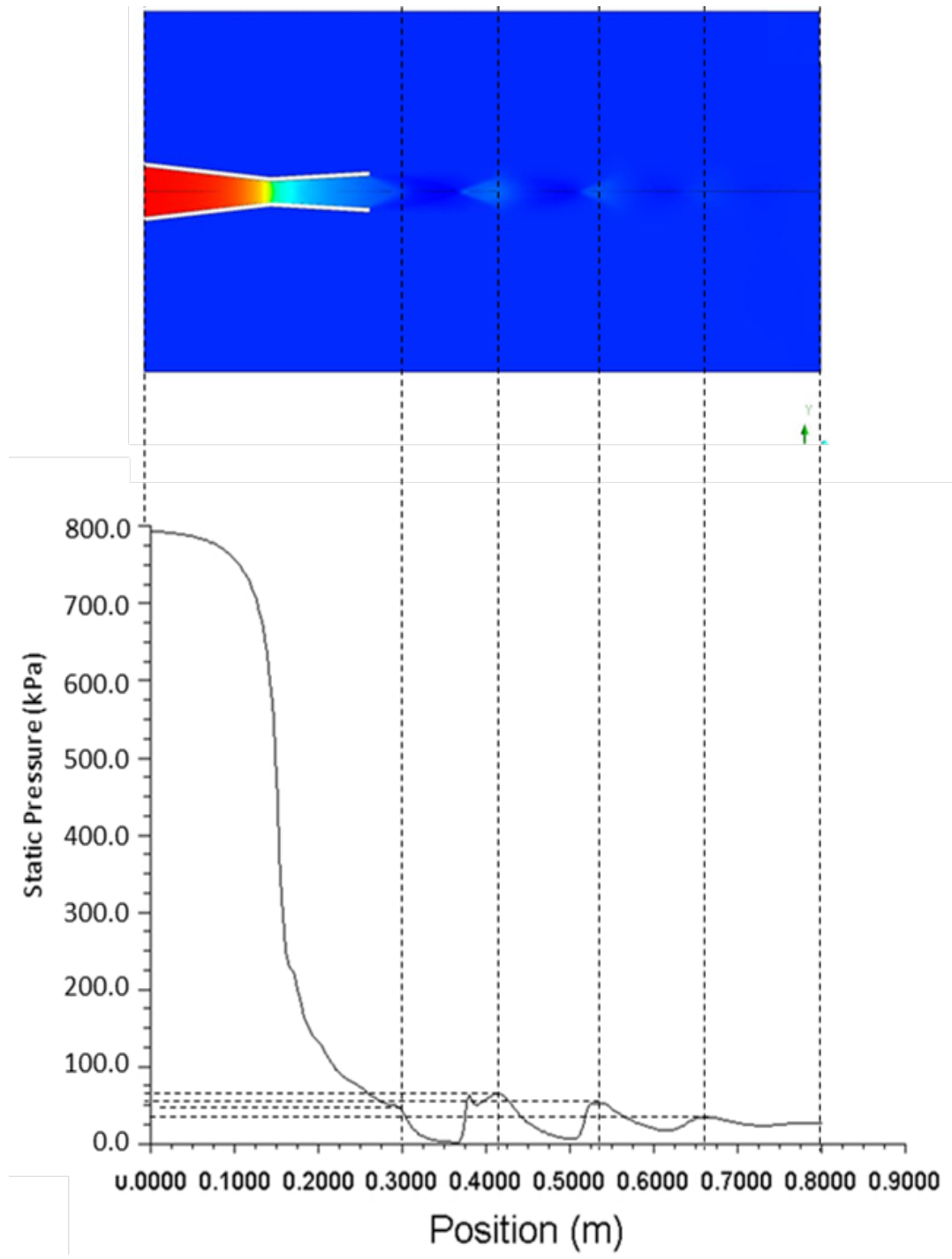
La diferencia de presiones se observa claramente identificada en la figura 78, donde se encuentra yuxtapuesto el contorno de presiones y la curva de la misma versus la posición a lo largo del flujo, coincidiendo como se demostró en la figura 77, con los diamantes o rombos que se generan en los contornos de velocidad.

Sin embargo, la presión no presenta un incremento únicamente en los rombos, también a lo largo de la estela la misma sufre aumentos y disminuciones. Para observar de manera más eficientes estas variaciones, se tomó el gráfico de contorno de la presión y se sometió a diferentes contrastes, brillos, nitidez y luminosidad la imagen, permitiendo la coloración del fenómeno hidrodinámico de manera más precisa en dos diferentes aspectos que se aprecian en la figura 79.



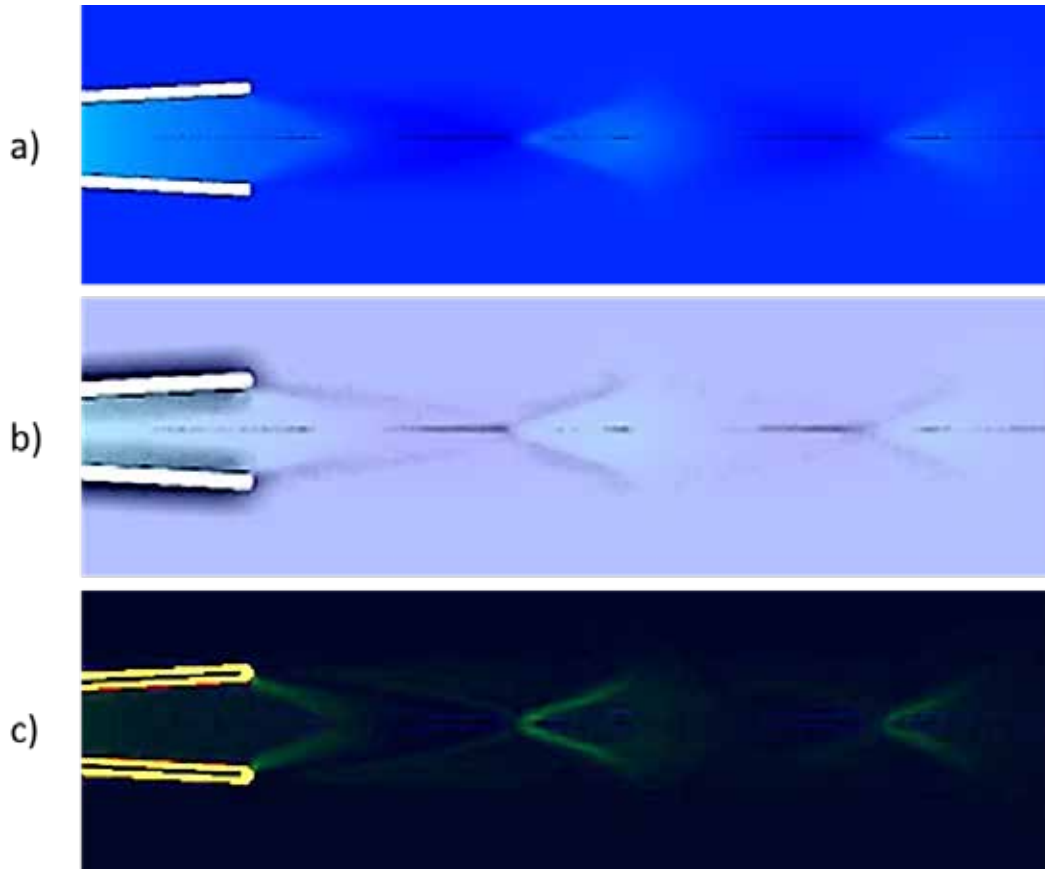
**Figura 77: Comparación de contornos de velocidad y presión para una altura de 10.000m**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 78: Diagrama de contorno y curva del número de Mach para una altura de 10.000m**

Fuente: Granados (2018)



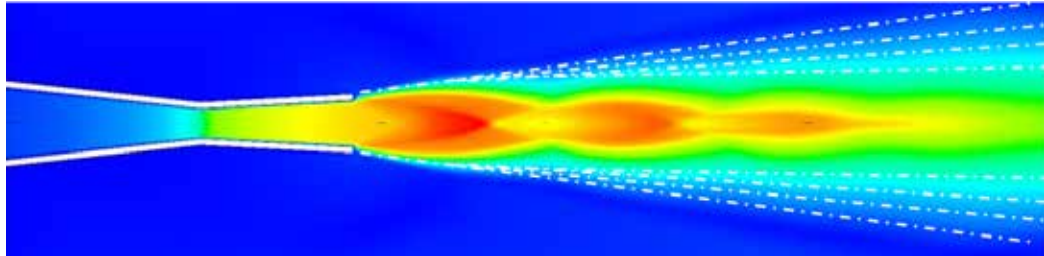
**Figura 79: Variaciones de la presión en la estela en diferentes exposiciones de luz para 10.000 m**

Fuente: Granados (2018)

Como se observa en la figura 79, la presión tiene un comportamiento bastante similar al de la velocidad, sabiendo que ambas son inversamente proporcionales, como se evidencio en la figura 78, se visualiza como la misma presenta una configuración geométrica bastante similar a la de la velocidad generando cambios a lo largo y ancho de la estela supersónica.

Por ultimo y no menos importante, existe otro fenómeno el cual no debe ser pasado por alto, el mismo es un abanico de ondas de expansión, que genera la estela de color turquesa que se visualiza en todos los contornos de velocidad y número de Mach. Este está constituido por ondas de choque oblicuas que se generan en los bordes de la salida de la tobera y debido a su separación angular a medida que se

alejando del dispositivo se separan más entre ellas generando esta configuración de abanico.



**Figura 80: Abanico de ondas de choque oblicuas para una altura de 10.000m**

Fuente: Granados (2018)

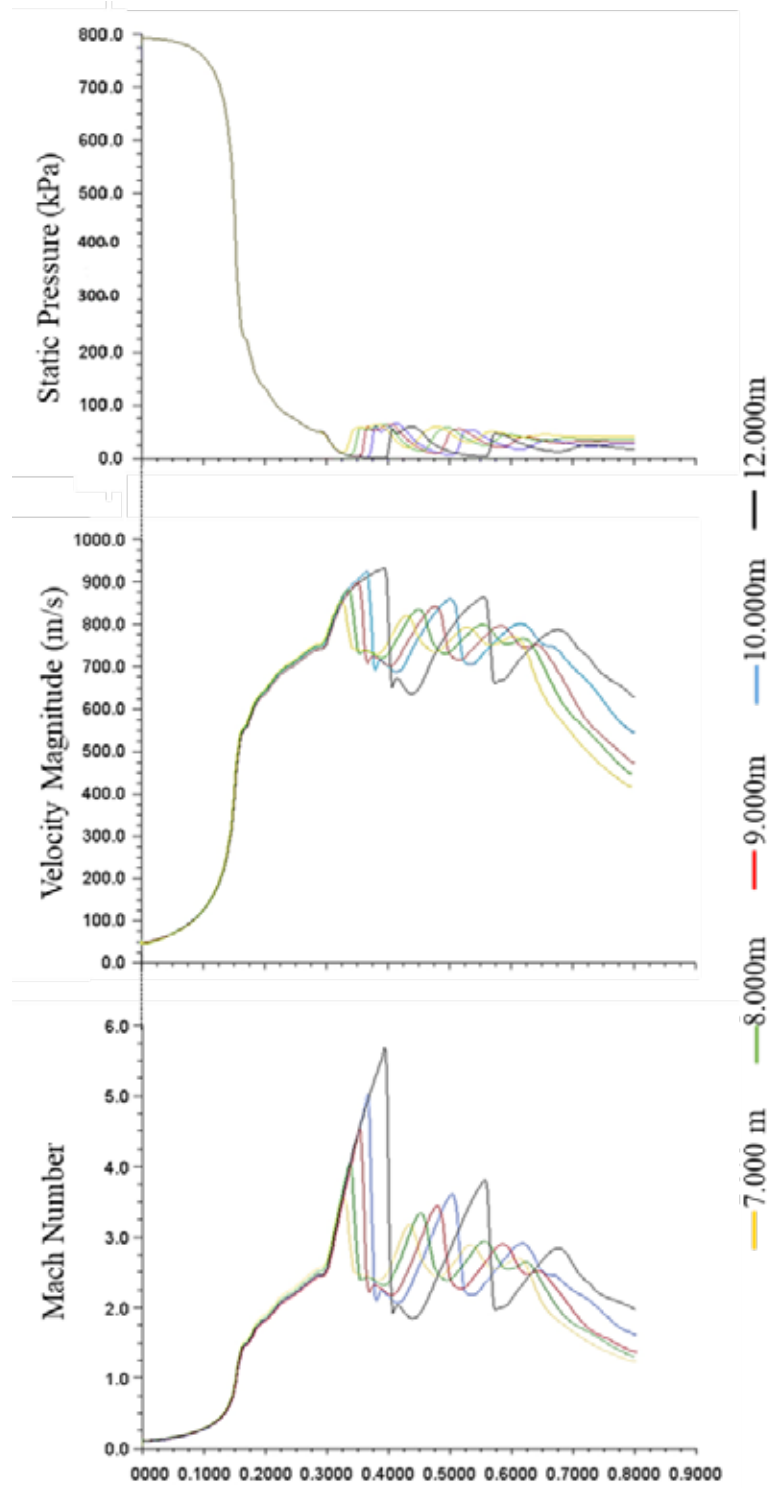
#### 4.5.8. Evaluación global de los resultados

Ya estudiados a detalle los fenómenos visualizados en el campo de flujo compresible en la descarga de una tobera convergente-divergente, se procedió a la comparación de las curvas de presión, velocidad y número de Mach, con cada una de las alturas estudiadas. En la figura 81, se puede notar la comparación de cada una de los tres tipos de variable versus la posición a lo largo del flujo.

Se evidencia en el gráfico de presiones que mientras mayor sea la diferencia de presiones entre la entrada y la salida de la tobera, los aumentos y decrementos en la presión estarán más alejados de la salida de la tobera, esto se debe al comportamiento de la velocidad del flujo, en el gráfico de velocidades se observa como a medida que aumenta mencionado diferencial de presiones la velocidad tendrá aumentos de mayor alcance, es decir, el flujo se moverá más rápido, teniendo un recorrido longitudinal mayor, lo cual agrega distancia al ocurrir el fenómeno de superposición de ondas de choque oblicuas, el cual es el principal fenómeno que explica el comportamiento de la estela tanto en velocidad como en presión.

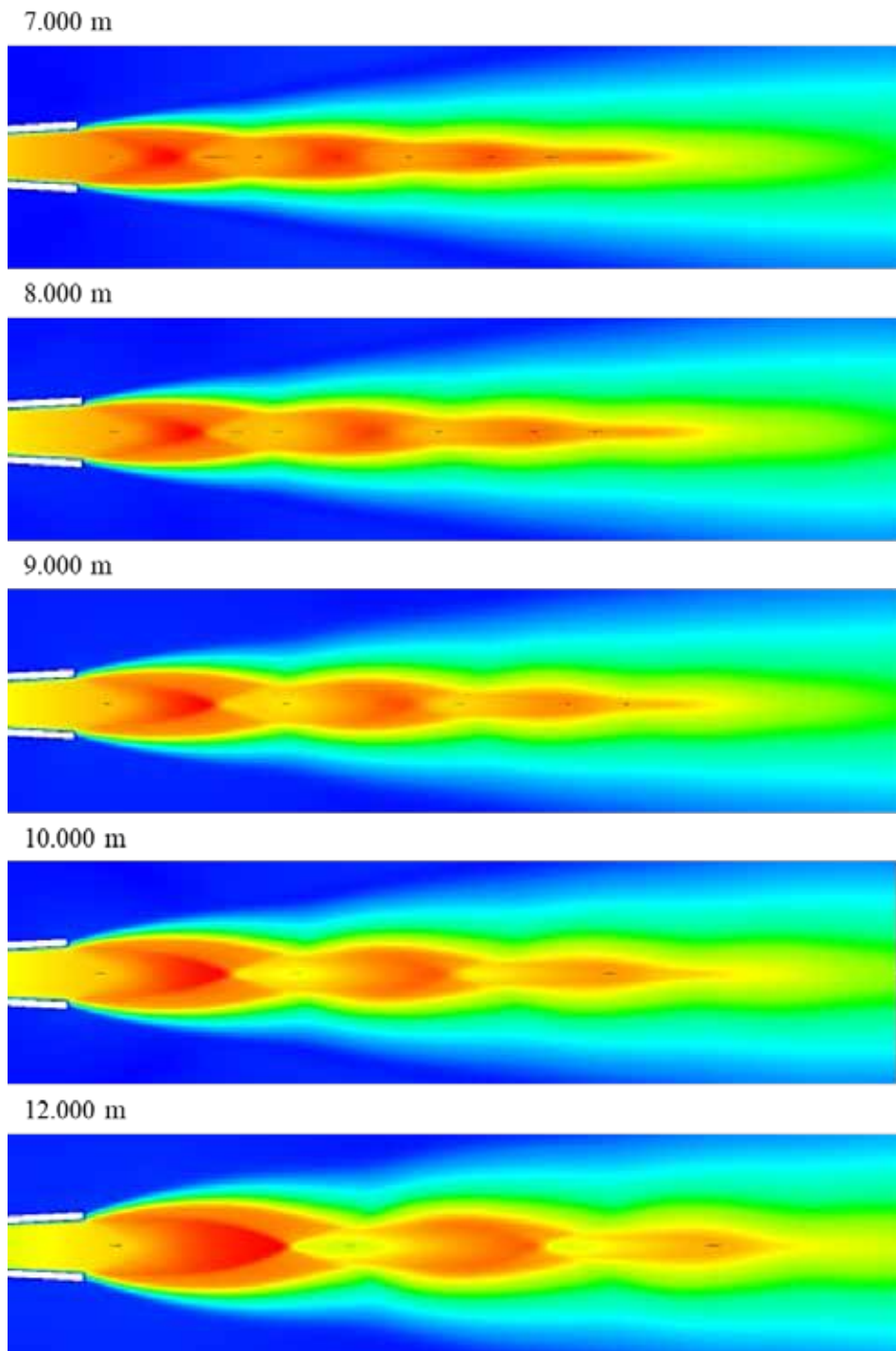
Es importante destacar también que, al aumentar la diferencia de presiones, el número de mach se somete a saltos cada vez más pronunciados, generando dentro de la estela, rombos más notorios. Como se puede observar en la 82, las irreversibilidades en el flujo serán de un carácter más fuerte en la medida que se

incremente el diferencial de presiones, siendo esta diferencia la que rige el comportamiento de la estela en su totalidad.



**Figura 81: Comparación de los gráficos a las distintas alturas de estudio**

Fuente: Granados (2018)



**Figura 82: Comparación de los contornos de velocidad a las diferentes alturas de trabajo**

Fuente: Granados (2018)

## CONCLUSIONES

Una vez realizado el estudio se puede afirmar que la variable que interviene de manera directa en el comportamiento de la estela de flujo generada por una tobera convergente – divergente, es el diferencial de presiones entre la entrada y la salida del dispositivo en cuestión. esto se debe a que el orden de presiones en la salida tiene que ser lo suficientemente bajo respecto a la entrada para que no haya presencia de ondas de choque normales en la sección de divergencia de la tobera, las cuales desaceleran el flujo de manera abrupta, llevándolo como mucho a un estado sónico.

La correcta convergencia de las simulaciones realizadas demuestra que las ecuaciones RANS (Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds) acopladas al modelo de turbulencia kappa-omega, basado en el modelo SST, son adecuadas para el estudio del campo de flujo compresible en la zona exterior de la descarga de una tobera de Laval. Lo cual es sustentado en el marco teórico donde se indica que el modelo de turbulencia es adecuado para estudios donde se requiera alta predicción de la cantidad de la separación de flujo al estar sometido a grandes diferencias de presión.

En lo que a la aplicación de una CFD respecta, queda en evidencia el extraordinario alcance de la herramienta ANSYS® Workbench. en específico el módulo de Fluent. En mencionado software se realizó de manera bastante practica el diseño de la tobera y el dominio fluidizado en su extensión CAD, “modeler design” y posterior discretización numérica de toda la superficie a estudiar. El condicionamiento de la herramienta de cálculo “fluent” a pesar de no contar con una interfaz bastante intuitiva se realizó de manera eficiente, permitiendo la selección de los modelos matemáticos que se debían emplear en el estudio, así mismo arrojando

los resultados en forma de gráficos de contornos y curvas, para su posterior evaluación y caracterización.

Una vez evaluado el comportamiento de la estela de flujo generada por la tobera de tipo CD estudiada, se puede afirmar que , y permítasele al autor insistir, la diferencia de presiones es de suma influencia en el comportamiento del flujo, y en el caso de estelas super sónicas y hasta hiper sónicas, se evidencio la aparición de fenómenos como lo son los abanicos de ondas de choque oblicuas, el efecto Coandâ, flujo de Prandtl Meyer y el comportamiento interno de las ondas de choque oblicuas generatrices de la particular geometría de la estela y los estudiados diamantes, los cuales son zonas de alguna manera aisladas por los fenómenos irreversibles que las circundan, permitiéndole al flujo adquirir propiedades disimiles respecto al resto de la estela.

## RECOMENDACIONES

Realizar el estudio del comportamiento de la tobera tomando en cuenta el flujo de Fanno y el intercambio de calor en la misma y la estela de flujo que genera el dispositivo aguas abajo.

Desarrollar el estudio de la selección de materiales para la fabricación de una tobera convergente-divergente empleada en la industria aeronáutica, incluyendo el estudio completo de las temperaturas y presiones que experimenta, tanto internas como externas.

La inclusión en el pensum académico de la escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad José Antonio Páez, de una materia electiva o tópico especial en cuyo contenido programático incluya la dinámica de fluidos computacional (CFD) así como la explicación y aplicación de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones de alta complejidad. También de una cátedra especializada en la dinámica de gases y los fenómenos que experimentan los mismos.

El desarrollo de modelos a escala en un banco experimental donde se pueda apreciar la estela de flujo a diferentes gradientes de presiones en las áreas de los laboratorios de la escuela de ingeniería mecánica de la universidad José Antonio Páez.

## REFERENCIAS

- Anderson John. “**Modern Compressible Flow**”. Segunda Edición. New York. McGraw Hill Education, 2002, 125-178, ISBN 0072424435.
- ANSYS-Workbench. Release 18 Theory Guide.** (2017).
- Behar D. (2008) **METODOLOGIA de la INVESTIGACION** (1ª ed.) México D.F. Ediciones Shalom
- Caraballo, G. (2008), “**Diapositivas de Dinámica de Gases**” Diapositivas para la materia de Ingeniería Mecánica. Universidad de Carabobo
- Cengel, Y. y Cimbala, J. (2006), **MECANICA DE FLUIDOS fundamentos y aplicaciones** (2ª ed.). México D.F: McGraw Hill Education
- Cengel, Y. y Boles, M. (2012), **Termodinámica** (7ª ed.). México D.F: McGraw Hill Education
- Dipen R. Dangi, Parth B. Thaker y Atal B. Harichandan (2017) **Flow analysis of rocket nozzle using method of characteristics**, 6ª conferencia internacional sobre las tendencias recientes en ingeniería, ciencias y gestion
- Durmitrache A., Frunzulica F. y Ionescu T.C. (2012) “**Mathematical Modelling and Numerical Investigations on the Coanda Effect**”
- Echezuría, R. (2017), “**Estudio del flujo compresible en una tobera convergente-divergente utilizando dinámica de fluidos computacional**” trabajo de grado de Ingeniería Mecánica. Universidad José Antonio Páez, San Diego.
- Ekanayake E. M. Sudharshani. “**Numerical Simulation of a Convergent Divergent Supersonic Nozzle Flow**” Tesis de Maestría. Instituto Real de Tecnología de Melbourne, Australia (2013)
- Hyun Ah Choi, Ho Dong Kam y Jeong Soo Kim (2014), “**Numerical investigation on the correlation between shock structure and thrust performance in an**

**overexpanded nozzle**”, 29<sup>a</sup> Congreso del Consejo Internacional de Ciencias Aeronáuticas.

Mataix, C. (1998) **Mecánica de Fluidos y Maquinas Hidráulicas**. (2<sup>a</sup> ed.). Madrid: Ediciones del Castillo, S.A.

Prieto, C. (2018), **Simulación del campo de flujo en una tobera convergente – divergente mediante una herramienta computacional de CFD**. trabajo de grado de Ingeniería Mecánica. Universidad José Antonio Páez, San Diego.

Sampieri R., Fernández C., Baptista P., (2006) **Metodología de la Investigación**. McGraw – Hill

Tamayo y Tamayo, Mario. **El Proceso de la Investigación científica**. Editorial Limusa S.A. México.1997.

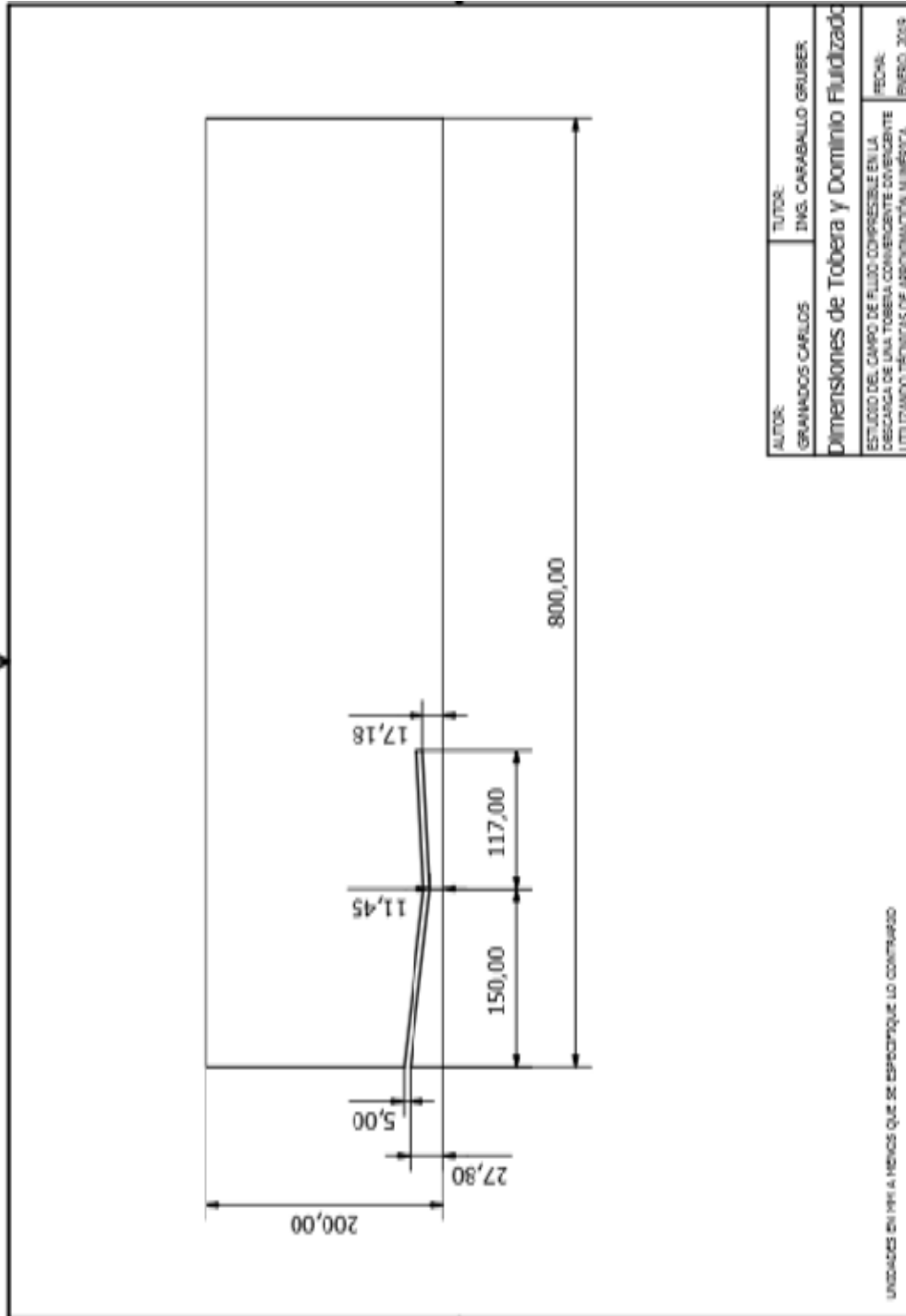
Universidad José Antonio Páez. (2007). **Normas para Elaboración y Presentación de los Anteproyectos, Proyectos y Trabajos de Grado**. San Diego, Carabobo, Venezuela

Vélez, S. Carlos M (2001) **Apuntes de metodología de la investigación**. Departamento de ciencias básicas Universidad EAFIT, Medellín – Antioquia. [En línea] Disponible en: <https://es.slideshare.net/saratogawild/apuntes-metodologia-investigacin>.



## **APÉNDICE A**

Plano de la tobera convergente-divergente seleccionada para el estudio



Fuente: Granados (2019)



## ANEXO A

### Tabla de propiedades de la atmósfera a gran altitud

933  
APÉNDICE 1

**TABLA A-16**

Propiedades de la atmósfera a gran altitud

Altitud, m	Temperatura, °C	Presión, kPa	Gravedad g, m/s <sup>2</sup>	Velocidad del sonido, m/s	Densidad, kg/m <sup>3</sup>	Viscosidad $\mu$ , kg/m · s	Conductivi- dad térmica, W/m · K
0	15.00	101.33	9.807	340.3	1.225	$1.789 \times 10^{-5}$	0.0253
200	13.70	98.95	9.806	339.5	1.202	$1.783 \times 10^{-5}$	0.0252
400	12.40	96.61	9.805	338.8	1.179	$1.777 \times 10^{-5}$	0.0252
600	11.10	94.32	9.805	338.0	1.156	$1.771 \times 10^{-5}$	0.0251
800	9.80	92.08	9.804	337.2	1.134	$1.764 \times 10^{-5}$	0.0250
1000	8.50	89.88	9.804	336.4	1.112	$1.758 \times 10^{-5}$	0.0249
1200	7.20	87.72	9.803	335.7	1.090	$1.752 \times 10^{-5}$	0.0248
1400	5.90	85.60	9.802	334.9	1.069	$1.745 \times 10^{-5}$	0.0247
1600	4.60	83.53	9.802	334.1	1.048	$1.739 \times 10^{-5}$	0.0245
1800	3.30	81.49	9.801	333.3	1.027	$1.732 \times 10^{-5}$	0.0244
2000	2.00	79.50	9.800	332.5	1.007	$1.726 \times 10^{-5}$	0.0243
2200	0.70	77.55	9.800	331.7	0.987	$1.720 \times 10^{-5}$	0.0242
2400	-0.59	75.63	9.799	331.0	0.967	$1.713 \times 10^{-5}$	0.0241
2600	-1.89	73.76	9.799	330.2	0.947	$1.707 \times 10^{-5}$	0.0240
2800	-3.19	71.92	9.798	329.4	0.928	$1.700 \times 10^{-5}$	0.0239
3000	-4.49	70.12	9.797	328.6	0.909	$1.694 \times 10^{-5}$	0.0238
3200	-5.79	68.36	9.797	327.8	0.891	$1.687 \times 10^{-5}$	0.0237
3400	-7.09	66.63	9.796	327.0	0.872	$1.681 \times 10^{-5}$	0.0236
3600	-8.39	64.94	9.796	326.2	0.854	$1.674 \times 10^{-5}$	0.0235
3800	-9.69	63.28	9.795	325.4	0.837	$1.668 \times 10^{-5}$	0.0234
4000	-10.98	61.66	9.794	324.6	0.819	$1.661 \times 10^{-5}$	0.0233
4200	-12.3	60.07	9.794	323.8	0.802	$1.655 \times 10^{-5}$	0.0232
4400	-13.6	58.52	9.793	323.0	0.785	$1.648 \times 10^{-5}$	0.0231
4600	-14.9	57.00	9.793	322.2	0.769	$1.642 \times 10^{-5}$	0.0230
4800	-16.2	55.51	9.792	321.4	0.752	$1.635 \times 10^{-5}$	0.0229
5000	-17.5	54.05	9.791	320.5	0.736	$1.628 \times 10^{-5}$	0.0228
5200	-18.8	52.62	9.791	319.7	0.721	$1.622 \times 10^{-5}$	0.0227
5400	-20.1	51.23	9.790	318.9	0.705	$1.615 \times 10^{-5}$	0.0226
5600	-21.4	49.86	9.789	318.1	0.690	$1.608 \times 10^{-5}$	0.0224
5800	-22.7	48.52	9.785	317.3	0.675	$1.602 \times 10^{-5}$	0.0223
6000	-24.0	47.22	9.788	316.5	0.660	$1.595 \times 10^{-5}$	0.0222
6200	-25.3	45.94	9.788	315.6	0.646	$1.588 \times 10^{-5}$	0.0221
6400	-26.6	44.69	9.787	314.8	0.631	$1.582 \times 10^{-5}$	0.0220
6600	-27.9	43.47	9.786	314.0	0.617	$1.575 \times 10^{-5}$	0.0219
6800	-29.2	42.27	9.785	313.1	0.604	$1.568 \times 10^{-5}$	0.0218
7000	-30.5	41.11	9.785	312.3	0.590	$1.561 \times 10^{-5}$	0.0217
8000	-36.9	35.65	9.782	308.1	0.526	$1.527 \times 10^{-5}$	0.0212
9000	-43.4	30.80	9.779	303.8	0.467	$1.493 \times 10^{-5}$	0.0206
10,000	-49.9	26.50	9.776	299.5	0.414	$1.458 \times 10^{-5}$	0.0201
12,000	-56.5	19.40	9.770	295.1	0.312	$1.422 \times 10^{-5}$	0.0195
14,000	-56.5	14.17	9.764	295.1	0.228	$1.422 \times 10^{-5}$	0.0195
16,000	-56.5	10.53	9.758	295.1	0.166	$1.422 \times 10^{-5}$	0.0195
18,000	-56.5	7.57	9.751	295.1	0.122	$1.422 \times 10^{-5}$	0.0195

Fuente: U.S. Standard Atmosphere Supplements. Oficina de Impresiones del Gobierno de Estados Unidos, 1956. Basadas en las condiciones medias anuales a una latitud de 45° y una variación de acuerdo con la época del año y con los patrones del clima. Las condiciones al nivel del mar ( $z = 0$ ) se consideran como  $P = 101.325$  kPa,  $T = 15^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1.2250$  kg/m<sup>3</sup>,  $g = 9.80665$  m/s<sup>2</sup>.

Fuente: Çengel y Boles. Termodinámica (2012) p.933