



UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ

**SIMULACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO EN  
UNA TOBERA CONVERGENTE –  
DIVERGENTE MEDIANTE UNA  
HERRAMIENTA COMPUTACIONAL DE CFD**

**Autor:**

Carlos Esteban Prieto Arvelo

C.I.: 24.553.407

Urb. Yuma II, Calle N° 3, Municipio San Diego  
Teléfono: (0241) 8714240 (Master) - Fax: (0241) 871239

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

**SIMULACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO EN UNA TOBERA  
CONVERGENTE – DIVERGENTE MEDIANTE UNA HERRAMIENTA  
COMPUTACIONAL DE CFD**

Proyecto del trabajo de grado para optar al título de  
**INGENIERO MECÁNICO**

**Autor:** Carlos Esteban Prieto Arvelo

C.I.: 24.553.407

**Tutor:** Ing. Gruber A. Caraballo V.

San Diego, Agosto 2018



Universidad José Antonio Páez  
Facultad de Ingeniería

FI-M-003-2018-1

Valencia, 30 de Mayo de 2018.

Ciudadano:

**Prieto Carlos**

**C.I: 24.553.407**

Presente.-

Cumplo con informarle que la Comisión de Trabajo de Grado y Pasantías de la Facultad de Ingeniería en su reunión N° 1-2018 de fecha 30/05/2018 aprobó el proyecto de trabajo de grado titulado **“SIMULACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO EN UNA TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE MEDIANTE UNA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL DE CFD”** presentado por usted como requisito para optar al título de Ingeniero Mecánico.

Se ratifica la designación del Ing. Gruber Caraballo, C.I. 12.014.408 y la Ing. Alicia Yanez de Pizzella, C.I. 4.598.880 como Tutores Académicos que lo asesorarán en el desarrollo de este proyecto.

Atentamente,

**Prof. Zulay Salcedo**  
**Decana de la Facultad de Ingeniería**



c. c. Coordinación de Pasantías y Trabajo de Grado (1).

ZS/fr



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

### **ACEPTACIÓN DEL TUTOR**

Quien suscribe, Ingeniero Gruber A. Caraballo V. portador de la cédula de identidad N° 12.014.408, en mi carácter de tutor del trabajo de grado presentado por el ciudadano Carlos Esteban Prieto Arvelo, cédula de identidad N° 24.553.407, titulado **“SIMULACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO EN UNA TOBERA CONVERGENTE – DIVERGENTE MEDIANTE UNA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL DE CFD”** presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Mecánico, considero que dicho trabajo reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

En San Diego, a los quince días del mes de agosto del año dos mil dieciocho.

---

Firma

Ing. Gruber A. Caraballo V.

C.I.: 12.014.408

Tutor Académico

## ÍNDICE GENERAL

<b>CONTENIDO</b>	<b>PP</b>
<b>ÍNDICE DE CUADROS</b>	x
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	x
<b>RESUMEN INFORMATIVO</b>	xiii
<b>NOMENCLATURA</b>	xiv
<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>CÁPITULO</b>	
<b>I EL PROBLEMA</b>	3
1.1 Planteamiento del problema.....	3
1.2 Formulación del problema .....	4
1.3 Objetivos de la investigación .....	4
1.3.1 Objetivo general .....	4
1.3.2 Objetivos específicos.....	4
1.4 Justificación.....	4
1.5 Limitaciones.....	5
1.6 Alcance.....	6
<b>II MARCO TEÓRICO</b>	6
2.1 Antecedentes de la investigación .....	6
2.2 Bases teóricas .....	8
2.2.1 Expresiones para un gas ideal .....	8
2.2.2 Expresiones para la entropía.....	10
2.2.3 Velocidad del Sonido y Número de Mach .....	12
2.2.4 Flujo Isentrópico .....	16
2.2.4.1 Flujo isentrópico con variación de área.....	16
2.2.4.2 Propiedades de estancamiento.....	19
2.2.4.3 Ecuaciones para condiciones críticas .....	22
2.2.5 Flujo isentrópico en toberas .....	23
2.2.5.1 Toberas Convergentes .....	24

2.2.5.2 Toberas Convergentes - Divergentes.....	26
2.2.6 Flujo de Fanno.....	27
2.2.7 Flujo de Rayleigh .....	31
2.2.8 Onda de Choque normal.....	33
2.2.9 Separación de la capa límite.....	36
2.2.10 Modelación matemática .....	39
2.2.11 Modelo de turbulencia eddy viscosity.....	45
2.2.12 Modelo de turbulencia kappa- epsilon (k –	

4.1 Búsqueda de información acerca de las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo a través de una tobera convergente – divergente.....	76
4.2 Selección de una tobera real e identificación de sus características geométricas con la finalidad de modelarla mediante una herramienta CAD. ....	76
4.3 Elección del modelo matemático adecuado para el estudio de ondas de choque normal en la sección divergente de la tobera .....	77
4.4 Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional y obtener los resultados en forma de datos para su posterior comparación con los valores proporcionados por el fabricante. ....	78
4.4.1 Establecimiento de la geometría y mallado.....	78
4.4.2 Configuración del dominio.....	81
4.4.3 Configuración de la herramienta de cálculo.....	82
4.4.4 Obtención de los resultados.....	84
4.4.5 Convergencia de las simulaciones.....	84
4.5 Validación de los resultados con antecedentes o formulación de las hipótesis en base a una interpretación fenomenológica sin violar las leyes físicas .....	86
4.5.1 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de = 715,40594 kPa .....	86
4.5.2 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de = 500 kPa .....	92
4.5.3 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de = 400 kPa .....	99
4.5.4 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de = 300 kPa ....	103
4.5.5 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de = 72,5 kPa ...	107
4.6 Comparación con los valores proporcionados por el fabricante. ....	111
Fuente: Prieto (2018).....	113
4.7 Análisis de Resultados .....	113
4.7.1 Convergencia de las simulaciones.....	113
4.7.2 Comportamiento de los diagramas de contorno y las líneas de corriente	114
<b>CONCLUSIONES</b>	117
<b>RECOMENDACIONES</b>	118
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	119

**ÍNDICE DE CUADROS**

<b>CUADRO</b>	<b>PP</b>
Cuadro 1: Tipo de flujo según el número de Mach.....	17
Cuadro 2: Patrones de Interacción para distintos rangos de número de Mach .....	37

**ÍNDICE DE FIGURAS**

<b>FIGURA</b>	<b>PP</b>
Figura 1: Propagación de una pequeña onda de presión a lo largo de un ducto .....	13
Figura 2: Volumen de control en la onda infinitesimal.....	14
Figura 3: Propiedades del flujo según el área de la sección transversal del ducto.....	20
Figura 4: Distribución de presión en una tobera convergente.....	24
Figura 5: Distribución de presión en una tobera convergente-divergente. ....	29
Figura 6: Diagrama para un flujo adiabático con fricción en un ducto de área constante.....	31
Figura 7: Diagrama para el flujo en un ducto de área constante con transferencia de calor y de fricción despreciable (flujo de Rayleigh). ....	33
Figura 8: Ondas de choque en la sección divergente de una tobera Laval .....	34
Figura 9: Representación de una onda de choque en un diagrama h-s .....	35
Figura 10: Esquematización de los parámetros involucrados en la separación de capa límite para flujos internos.....	38
Figura 11: Separación de flujo e inestabilidad de la capa de cizallamiento.....	39
Figura 12: Técnicas de aproximación numérica en MF.....	53
Figura 13: Malla estructurada .....	56
Figura 14: Cuadrícula estructurada en 2D .....	56
Figura 15: Mallado estructurado con interfaz ajustada .....	57
Figura 16: Mallado estructurado en bloque 2D sin interfaces ajustadas.....	58
Figura 17: Mallado compuesto en 2D.....	58
Figura 18: Malla no estructurada .....	60
Figura 19: Ejemplo de mallado no estructurado en 2D.....	61

Figura 20: Sesgo en celdas .....	63
Figura 21: Ortogonalidad del mallado .....	66
Figura 22: Factor de expansión de la malla .....	67
Figura 23: Aspecto del radio de la malla "MeshAspect Radio" .....	67
Figura 24: Dimensionamiento de la tobera convergente – divergente.....	77
Figura 25: Importación del diseño CAD al software CFD .....	78
Figura 26: Configuración del mallado .....	80
Figura 27: Corte longitudinal de la geometría .....	80
Figura 28: Configuración del dominio.....	81
Figura 29: Configuración del dominio.....	83
Figura 30: Árbol de trabajo del dominio de la tobera .....	83
Figura 31: Convergencia de las ecuaciones Masa y Momento para $p = 400$ kPa....	85
Figura 32: Convergencia de las ecuaciones del modelo de Turbulencia k – $\epsilon$ para $p = 400$ kPa .....	86
Figura 33: Convergencia de los Imbalances de las ecuaciones para $p = 400$ kPa ...	86
Figura 34: Distribución del Número de Mach para $p = 715.4058824$ kPa.....	87
Figura 35: Número de Mach vs Posición para $p = 715.4058824$ kPa.....	88
Figura 36: Distribución de la velocidad para $p = 715.4058824$ kPa.....	88
Figura 37: Velocidad vs Posición para $p = 715.4058824$ kPa .....	89
Figura 38: Distribución de la temperatura para $p = 715.4058824$ kPa .....	90
Figura 39: Temperatura vs Posición para $p = 715.4058824$ kPa .....	90
Figura 40: Distribución de presión para $p = 715.4058824$ kPa .....	91
Figura 41: Presión vs Posición para $p = 715.4058824$ kPa.....	91
Figura 42: Diagrama $\log(p)$ para $p = 715.4058824$ kPa.....	92
Figura 43: Distribución del Número de Mach para $p = 500$ kPa.....	93
Figura 44: Número de Mach vs Posición para $p = 500$ kPa.....	94
Figura 45: Distribución de la velocidad para $p = 500$ kPa.....	94
Figura 46: Velocidad vs Posición para $p = 500$ kPa .....	95
Figura 47: Distribución de la temperatura para $p = 500$ kPa .....	96

Figura 48: Temperatura vs Posición para $p = 500$ kPa .....	96
Figura 49: Distribución de presión para $p = 500$ kPa .....	97
Figura 50: Presión vs Posición para $p = 500$ kPa.....	98
Figura 51: Diagrama para $p = 500$ kPa.....	99
Figura 52: Distribución de la velocidad para $p = 400$ kPa.....	100
Figura 53: Distribución de la temperatura para $p = 400$ kPa .....	101
Figura 54: Distribución de presión para $p = 400$ kPa .....	102
Figura 55: Presión vs Posición para $p = 400$ kPa.....	102
Figura 56: Diagrama para $p = 400$ kPa.....	103
Figura 57: Distribución de la velocidad para $p = 300$ kPa.....	104
Figura 58: Distribución de la temperatura para $p = 300$ kPa .....	105
Figura 59: Distribución de presión para $p = 300$ kPa .....	106
Figura 60: Presión vs Posición para $p = 400$ kPa.....	106
Figura 61: Diagrama para $p = 400$ kPa.....	107
Figura 62: Distribución de la velocidad para $p = 72.5$ kPa.....	108
Figura 63: Velocidad vs Posición para $p = 72,5$ kPa .....	109
Figura 64: Distribución de presión para $p = 72,5$ kPa .....	109
Figura 65: Presión vs Posición para $p = 72,5$ kPa.....	110
Figura 66: Diagrama para $p = 72,5$ kPa.....	111
Figura 67: Contorno y líneas de corriente del número de Mach según investigación de E. M. S. Ekanayake .....	112
Figura 68: Contorno y líneas de corriente del número de Mach según investigación de E. M. S. Ekanayake .....	113
Figura 69. Plano de Tobera Convergente-Divergente.....	121

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA  
UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE MECÁNICA

**SIMULACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO EN UNA TOBERA  
CONVERGENTE – DIVERGENTE MEDIANTE UNA HERRAMIENTA  
COMPUTACIONAL DE CFD**

**Autor:** Carlos Esteban Prieto Arvelo

**Tutor:** Ing. Gruber A. Caraballo V.

**Fecha:** Agosto 2018

**RESUMEN INFORMATIVO**

La presente investigación muestra el análisis numérico realizado a una tobera convergente – divergente mediante el uso de un programa de Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). Una tobera convergente – divergente es un ducto de sección transversal variable el cual es usado para acelerar el flujo que pasa a través de ella y así exista la posibilidad de alcanzar velocidades supersónicas a la salida del mismo. A partir de esto se estudia el comportamiento del campo de flujo a través de la tobera y como el mismo se ve afectado por la relación de presiones entre la entrada y la correspondiente a la descarga (contrapresión), se generan ondas de choque normal en la parte divergente de la tobera. Los resultados demuestran que a medida que disminuye la contrapresión, la onda de choque normal se desplaza en la dirección del flujo y se acentúan los patrones de desprendimiento de capa límite, sin embargo, el modelo matemático basado en las ecuaciones RANS (Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds), las relaciones de Rankine-Hugoniot y el modelo de turbulencia kappa-épsilon demostraron ser apropiados debido a la estabilidad y convergencia de las simulaciones.

**Descriptor:** Campo de flujo compresible, tobera convergente – divergente, dinámica de fluidos computacional (CFD), Similitud y análisis dimensional en toberas convergentes – divergentes, presión, onda de choque normal

## NOMENCLATURA

Símbolo	Descripción	Unidad
	Área	m <sup>2</sup>
	Área Crítica	m <sup>2</sup>
	Velocidad del sonido	m/s
cp	Calor específico a presión constante	kJ/kgK
cv	Calor específico a volumen constante	kJ/kgK
Ev	Módulo de elasticidad	-
F	Factor de Darcy	-
	Entalpía	kJ/kg
0	Entalpía de estancamiento	kJ/kg
	Índice adiabático de un gas ideal	-
	Número de Mach	-
	Número de Mach antes del choque	-
	Número de Mach después del choque	-
	Flujo másico	kg/s
	Presión	kPa
	Presión Crítica	kPa
	Presión de Contrapresión	kPa
	Presión de salida	kPa
	Presión antes del Choque	kPa
	Presión después del Choque	kPa
	Transferencia de Calor por unidad de masa	kJ/kg
	Constante Universal de los gases	kJ/kgK
	Entropía	kJ/kgK
	Entropía antes del Choque	kJ/kgK
	Entropía después del Choque	kJ/kgK
Sm	Fuente de masa	kg/m <sup>3</sup> s

	Temperatura	K
0	Temperatura de estancamiento	K
	Temperatura antes del choque	K
	Temperatura después del choque	K
	Temperatura Crítica	K
	Vector velocidad	m/s
	Energía interna	kJ/kg*K
	Velocidad	m/s
	Velocidad Crítica	m/s
	Volumen	m <sup>3</sup>
	Trabajo por unidad de masa	kJ/kg
	Viscosidad dinámica	kg/ms
	Viscosidad efectiva	kg/ms
	Viscosidad turbulenta	kg/ms
	Difusividad turbulenta	kg/ms
	Viscosidad cinemática	m <sup>2</sup> /s
	Densidad	kg/m <sup>3</sup>
0	Densidad de estancamiento	kg/m <sup>3</sup>
	Densidad Crítica	kg/m <sup>3</sup>
	Densidad antes del Choque	kg/m <sup>3</sup>
y	Densidad después del Choque	kg/m <sup>3</sup>
	Constante del modelo k – Omega	0,009
	Constante del modelo k – Omega	5/9
	Constante del modelo k – Omega	0,075
k	Constante del modelo k – Omega	2
	Constante del modelo k – Omega	2

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la interacción entre los fluidos y las máquinas de fluidos ha sido estudiado desde que Euler en 1755 dedujo la ecuación fundamental de las turbomáquinas. Estos estudios se han centrado en tres vertientes: , la y con el desarrollo de la ciencia de la computación y avance en la tecnología se introduce la tercera herramienta de estudio:

La aplicación de la mecánica de fluidos a las turbomáquinas describe el comportamiento del campo de flujo compresible en las toberas convergentes – divergentes y muchos fabricantes se basan en bancos de pruebas, métodos y procedimientos de ensayo para mostrar las prestaciones y utilidades de sus equipos, sin embargo el costo de estas pruebas y bancos de ensayo son muy elevados, además de ser poco precisos y por ello optan por las soluciones por métodos numéricos, usando la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD por sus siglas en inglés).

En el presente trabajo de investigación se estudia el comportamiento del campo de flujo compresible de gas que pasa a través del interior de una tobera Laval convergente – divergente, con la finalidad de caracterizar las propiedades del flujo más relevantes como número de Mach, variación de presiones, ondas de choque normal, entre otras, desde un modelo tridimensional de la tobera generado por una herramienta CAD y simulado por usando el método de elementos finitos con un software de dinámica de fluidos computacional.

Inicialmente se discretiza el dominio fluidizado de tobera y se establecen las condiciones de borde, esto es, entrada y salida del flujo, así como la pared sólida con la que va a interactuar el campo de flujo. Luego se procede a realizar las pruebas del rendimiento de la malla computacional y una vez obtenida la más eficiente se realizan los experimentos numéricos o simulaciones por medio de un centro de procesamiento de datos denominado “solver”.

Después de haber ejecutado el solver se obtienen los resultados que describen el comportamiento del campo de flujo, con los cuales se procede a comparar con los datos bien sean teóricos o experimentales para lograr la validación de los mismos.

En el **capítulo I** se explica todo lo relacionado al planteamiento y formulación del problema, además de los objetivos a alcanzar en este proyecto, así como también las limitaciones que se presentan al momento de solucionar el problema.

Luego en el **capítulo II** se hace referencia a los antecedentes consultados, así como también, a toda terminología y conceptos necesarios que sirven de base para el desarrollo del estudio.

Por su parte el **capítulo III** consta de las distintas fases metodológicas a emplear en el desarrollo de las estrategias, que son establecidas para cumplir con los objetivos propuestos.

Y por último en el **capítulo IV** se obtienen los resultados para su posterior análisis, haciendo énfasis en el cumplimiento de los objetivos..

El trabajo aquí presentado, está estructurado de tal manera que el lector pueda ir adquiriendo los conocimientos básicos que le permitirán entender a cabalidad la tecnología referida y las herramientas a usar. Sin embargo, cabe destacar que si el lector es lo suficientemente conocedor del tema, perfectamente puede obviar los capítulos que contengan información que considere ya conocida, y continuar con los aspectos que crea interesantes sin que se pierda la linealidad o coherencia de la información que se desea mostrar.

# CÁPITULO I

## EL PROBLEMA

### 1.1 Planteamiento del problema

El flujo de fluidos es un fenómeno común en la vida diaria, esencialmente empleado en diversos procesos afines a la ingeniería como lo son las turbomáquinas, aplicaciones de hidrodinámica, hidráulica, entre otros. Por lo que es importante el estudio, control y manejo de los fluidos.

Una de las aplicaciones más comunes en la industria, es transformar la energía interna de un fluido compresible en energía cinética para que este alcance velocidades supersónicas. Este proceso ocurre a través de ductos de sección transversal variable donde dichas propiedades cambian a medida que el fluido se desplaza longitudinalmente a través de este.

Durante la circulación de un fluido a través de toberas, que no son más que ductos donde su sección transversal no es constante, las características numéricas del fluido varían principalmente en la dirección del flujo y solamente este puede aproximarse con buena exactitud como un flujo isotrópico unidimensional.

Sin embargo, a velocidades supersónicas, para algunos valores de contrapresión, ocurren cambios bruscos en las propiedades de los fluidos en una sección muy delgada de una tobera convergente – divergente creando una onda de choque unidimensional.

Hoy en día, existen estudios y cálculos analíticos donde se pueden determinar las propiedades del flujo cuando este se comporta de forma isotrópica y cuando ocurre una onda de choque unidimensional dentro del ducto, pero estos modelos matemáticos son de gran complejidad y no son tan exactos para casos generales. También es posible establecer un ensayo de una tobera Laval en un banco experimental, donde se observarían las propiedades que experimenta el fluido cuando viaja a velocidades supersónicas, pero esta opción generaría altos costos, tanto

monetario como de tiempo, además de la escasez de materiales y herramientas que permitirían su construcción.

Por lo señalado anteriormente, es importante estudiar las condiciones en las cuales se forman las ondas de choque normal en el campo de flujo de una tobera convergente – divergente y como afectan al flujo.

## **1.2 Formulación del problema**

¿Cómo se podrían describir las variables que forman el campo de flujo a través de una tobera convergente – divergente y analizar su comportamiento según el régimen de flujo, para estudiar las ondas de choque normal y su influencia en el desempeño de la misma?

## **1.3 Objetivos de la investigación**

### **1.3.1 Objetivo general**

Simular el campo de flujo en una tobera convergente – divergente mediante una herramienta computacional de CFD.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

Investigar acerca de las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo a través de una tobera convergente – divergente.

Seleccionar una tobera real e identificar sus características geométricas con la finalidad de modelarla mediante una herramienta CAD.

Elegir el modelo matemático adecuado para el estudio de ondas de choque normal en la sección divergente de la tobera.

Simular el campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional y obtener los resultados en forma de datos para su posterior comparación con los valores proporcionados por el fabricante.

## **1.4 Justificación**

La dinámica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés) tiene como objetivo la simulación del flujo de fluidos y los procesos de transferencia de calor, esto con el fin de simplificar el estudio de diversos fenómenos que analíticamente serían muy complejos y difíciles de desarrollar. Se basa en la

utilización de métodos numéricos para resolver las ecuaciones que describen la conservación de la masa, el momento y la energía en el seno de un fluido.

Hoy en día, con las enormes posibilidades que nos brindan las computadoras y el desarrollo de los métodos numéricos, la CFD se está convirtiendo en una herramienta muy práctica y eficiente para el análisis de situaciones en las que están involucrados fluidos y por consiguiente, en una inestimable herramienta de análisis y diseño. Sin embargo, esto no garantizaría una solución fiable y que se apegue a la realidad a pesar de que permite predecir con gran exactitud las propiedades del flujo supersónico. Por lo tanto, se desea realizar una simulación numérica del campo de flujo compresible de una tobera convergente – divergente, tomando en cuenta el comportamiento de las variables del fluido cuando este experimenta una onda de choque normal, lo cual es altamente difícil de lograr mediante un banco real experimental debido a la gran cantidad de variables involucradas, los diferentes estados termodinámicos implicados y los altos costos tanto de tiempo como de dinero que generaría la construcción de un banco. Igualmente, comparar los diversos modelos matemáticos y determinar cuál se adapta mejor al comportamiento real de la tobera cuando experimenta este fenómeno.

### **1.5 Limitaciones**

Durante la investigación se presentarán las siguientes limitantes:

El pensum carece de una materia que se enfoque en el estudio de la dinámica de fluidos computacional, lo que puede ocasionar impedimentos al utilizar la herramienta para la resolución de modelos numéricos adecuados.

La gran cantidad de tiempo que se invierte haciendo las simulaciones, las cuales se realizarán de manera que se puedan culminar en los tiempos establecidos para elaborar la investigación.

Se precisa la creación de un modelado geométrico preciso y un mallado de buena calidad, lo cual puede traer complicaciones al momento de la creación.

## **1.6 Alcance**

Esta investigación solo se encargará del estudio de la variación de las propiedades del campo de flujo a través de una tobera convergente – divergente cuando esta experimenta ondas de choque normal en su sección divergente, esto en virtud de que para el tiempo establecido, no se pretende indagar en otros tipos de consideraciones en el campo de flujo y estados termodinámicos que puedan existir. Tampoco se indagará en los cambios que puedan sufrir las propiedades por la presencia de elementos externos, como lo son la transferencia de calor generada por el medio donde se encuentra la tobera o la fricción entre el fluido y las paredes internas de la tobera, por lo que en todo momento, se considerará flujo estacionario sin transferencia de calor o interacciones de trabajo y sin cambio de energía potencial, así como también, en la onda de choque el flujo será considerado irreversible y adiabático. El estudio de la simulación numérica solo serán referidas para un modelo matemático específico, así como los resultados obtenidos solo serán aplicables para campos de flujo isotrópico unidimensional en toberas convergentes – divergentes.

Los resultados obtenidos serán arrojados en forma de datos y mediante el uso de gráficos experimentales de las variables que describen el fenómeno.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 Antecedentes de la investigación

Las investigaciones en el análisis numérico y en el desarrollo de modelos computacionales para el estudio de la cinemática de fluidos son de data reciente, y es muy escasa la cantidad de investigadores que han incursionado en esta área, siendo aún mucho menor el desarrollo de investigaciones en función del análisis y comportamiento numérico/computacional de una tobera convergente - divergente; muchos estudios realizados hasta ahora se basan en el comportamiento de dichas toberas en una aplicación industrial o entorno determinado

U.S. Ramakanth et al. (India, 2013), en su artículo titulado “**Flow Analysis in a Convergent-Divergent Nozzle Using CFD**” publicado en la International Journal of Research in Mechanical Engineering, utilizaron el análisis numérico a través de softwares de dinámica de fluidos computacional, para conocer el comportamiento de las propiedades del fluido que pasa a través de una tobera convergente – divergente variando el número de Mach y posteriormente la relación de presión. Las propiedades evaluadas fueron máxima presión, máxima velocidad, máxima fuerza y flujo másico máximo en la garganta de la tobera. Estas propiedades fueron tabuladas observando que a un mayor número de Mach aumenta la presión y la fuerza en la garganta, caso contrario ocurre cuando se aumenta la relación de presión.

Debido a la no linealidad de las ecuaciones que definen el modelo del flujo a través de la tobera, y a la simplificación que se usó para la modelación numérica, tomando en cuenta los aspectos que más afectaban al campo de flujo, por ello dicho trabajo representa una buena guía para la realización de la presente investigación, y se relaciona con este trabajo en primer lugar porque se trata de la simulación de una tobera convergente – divergente, y en segundo lugar porque establece una metodología para la realización de las simulaciones.

Así mismo, Shigeru Matsuo et al. (Japón, 2012), en su artículo **“Effects of Supersonic Nozzle Geometry on Characteristics of Shock Wave Structure”** publicado en la revista Open Journal of fluid Dynamics, estudia experimentalmente los efectos que proporciona la geometría de la tobera sobre una onda de choque oblicua usando una tobera supersónica, variando la relación de presión de estancamiento con la contrapresión. El estudio se enfocó en la interacción de la onda de choque y la capa límite turbulenta. Cuando la onda de choque es suficientemente fuerte para separar la capa límite, esta es bifurcada y otras ondas de choque se forman aguas abajo de la onda de choque original. Luego de dicho experimento se comprueba que la onda de choque oblicua disminuye su tamaño con el incremento de la longitud de su parte divergente.

Este antecedente se encuentra estrechamente vinculado con la investigación debido a que se realiza una simulación CFD, la metodología para su realización es de utilidad, sobre todo en la caracterización de las propiedades del campo de flujo, y posteriormente el establecimiento de las características del mismo. Su relación con la presente investigación es que se realiza un estudio numérico de una tobera convergente – divergente y se cambian las condiciones de contrapresión para diferentes regímenes de flujo.

Por su parte, E. M. Sudharshani Ekanayake. (Australia, 2013), en su tesis de maestría **“Numerical Simulation of a Convergent Divergent Supersonic Nozzle Flow”** presentada en la escuela de matemática y ciencias geoespaciales del instituto real de tecnología de Melbourne, estudia el flujo a través de toberas de cohetes propulsores de los aviones caza SR-71 y F-22A con la finalidad de evaluar el comportamiento de ondas de choque normal y oblicuas, así como la descripción del flujo de Prandtl-Meyer o estela de diamante producido fuera de la tobera .

El mencionado antecedente es un modelo de comparación con la presente investigación ya que por la carencia de datos disponibles en la industria aeroespacial acerca del comportamiento de toberas convergente – divergente, resulta un importante aporte documental para el presente estudio.

Raúl Echezuría (2017), en su tesis de grado para optar al título de ingeniero mecánico en la Universidad José Antonio Páez, titulada **“Estudio del flujo compresible en una tobera convergente-divergente utilizando dinámica de fluidos computacional”** realiza el análisis numérico en el campo de flujo de una tobera convergente – divergente que la atraviesa, a través del programa de dinámica de fluidos computacional ANSYS® Workbench. De esta manera, estudia los cambios experimentados por las diferentes propiedades del flujo tomando en cuenta cómo estas se ven afectadas por la transferencia de calor y la rugosidad superficial. Observando que esta última no implica un cambio importante en las propiedades, al contrario de la transferencia de calor.

Este último antecedente consultado, representa la base de ésta investigación ya que no consideró ondas de choque normal y sirvió como guía para el procedimiento de cálculo y adecuación de la herramienta computacional con base en el uso del método de elementos finitos en la dinámica de fluidos computacional.

## **2.2 Bases teóricas**

De acuerdo con Arias (2006), “Las bases teóricas implican un desarrollo amplio de los conceptos y proposiciones que conforman el punto de vista o enfoque adoptado, para sustentar o explicar el problema planteado” (p.107). Por lo tanto, la correcta realización de las bases teóricas permitirá no solo obtener un sustento sobre el cual se podrá realizar el apropiado y acorde análisis de resultados, sino que también ayudará a explicar la problemática a partir de un conjunto de teorías y supuestos ya establecidos y publicados.

### **2.2.1 Expresiones para un gas ideal**

Cualquier ecuación que relacione la presión, la temperatura y la densidad (o volumen específico) de una sustancia se llama ecuación de estado. La ecuación de estado más sencilla y conocida para sustancias en la fase gaseosa es la ecuación de estado del gas ideal, expresada como:

(Ec. 1)

Un gas ideal es una sustancia hipotética que obedece la ecuación 1. De manera experimental se ha observado que esta relación se aproxima con una buena precisión al comportamiento P-v-T de los gases reales a bajas densidades. A bajas presiones y altas temperaturas, la densidad de un gas decrece y tal gas se comporta como un gas ideal. En el rango del interés práctico, muchos gases conocidos como aire, nitrógeno, oxígeno, hidrógeno, helio, argón, neón y kriptón, e inclusive gases más pesados, entre ellos dióxido de carbono, se pueden tratar como gases ideales con error despreciable. Sin embargo, los gases densos, como el vapor de agua en las plantas generadoras y el vapor refrigerante empleado en los refrigeradores, no deben tratarse como gases ideales porque suelen existir en un estado cercano a la saturación. Para un gas ideal se definen dos capacidades caloríficas molares: a volumen constante (  $C_v$  ), y a presión constante (  $C_p$  ). (J. Anderson, 2002). Donde:

$C_v$ : Es la cantidad de calor que es necesario suministrar a un mol de gas ideal para elevar su temperatura mediante una transformación isocórica (volumen constante).

$$\text{---} \tag{Ec. 2}$$

$C_p$ : Es la cantidad de calor que es necesario suministrar a un mol de gas ideal para elevar su temperatura mediante una transformación isóbara (presión constante).

$$\text{---} \tag{Ec. 3}$$

Despejando de las ecuaciones generales de los calores específicos 2 y 3 (Ec. 4)

$$\text{---} \tag{Ec. 5}$$

Conociendo además la ecuación que define la entalpia

$$\text{---} \tag{Ec.6}$$

Por la ecuación de estado se conoce que:

$$- \quad (Ec. 7)$$

Entonces la definición de entalpia queda:

$$(Ec. 8)$$

Diferenciando la ecuación anterior

$$(Ec. 9)$$

Sustituyendo la ecuación 4 y 5 en la ecuación anterior, se obtiene:

$$(Ec. 10)$$

Si se sabe también que la constante de gases ideales es la relación de los calores específicos

$$- \quad (Ec. 11)$$

Este factor se puede sustituir en la ecuación 10 dando como resultado

$$- \quad (Ec. 12)$$

$$- \quad (Ec. 13)$$

### **2.2.2 Expresiones para la entropía.**

Para flujos compresibles, los cambios en la propiedad termodinámica, entropía (s), son importantes. Para cualquier sustancia pura incluidos los gases ideales, la "primera ecuación Tds" es:

$$- \quad (Ec. 14)$$

La cual relaciona las propiedades termodinámicas y debe ser válida para todas las sustancias puras. Dividiendo toda la ecuación anterior entre la temperatura



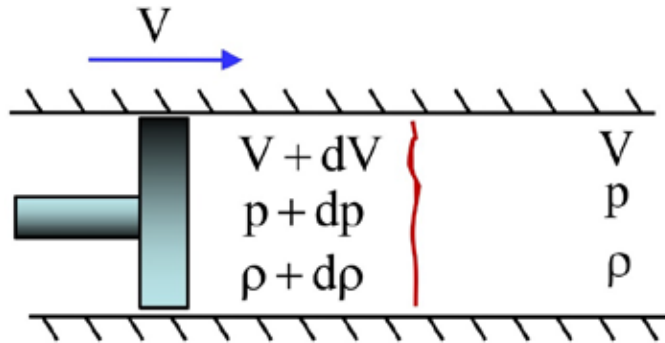
$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (Ec. 22)$$

La cual es una relación útil entre temperatura, densidad y presión para flujo isentrópico de un gas ideal. De la ecuación podemos concluir que:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (Ec. 23)$$

### 2.2.3 Velocidad del Sonido y Número de Mach

El sonido implica un fenómeno vinculado a la difusión de una onda de características elásticas que produce una vibración en un cuerpo, aun cuando estas ondas no se escuchen. El sonido está formado por las variaciones que se producen en la presión del aire, que el oído convierte en ondas mecánicas para que el cerebro pueda percibir las y procesarlas. Al propagarse, el sonido transporta energía pero no materia. Las vibraciones se generan en idéntico rumbo en el que se difunde el sonido: puede hablarse, por lo tanto, de ondas longitudinales. La velocidad en la que una onda de presión de amplitud pequeña se propaga a través de un medio se denomina velocidad sónica. Esta velocidad no solo depende del tipo de medio y su estado termodinámico, sino también es una función de la fuerza de la onda. Cuanto más fuerte es la onda, más rápido se mueve. Para demostrar el comportamiento de una onda sónica y su velocidad, se considera un ducto largo de sección transversal constante lleno de fluido en reposo con un pistón en uno de sus extremos, como se muestra en la figura 1. A medida que el pistón se mueve con una velocidad infinitesimal constante ( $dV$ ) las partículas del fluido inmediatamente próximas al pistón se comprimen a una cantidad muy pequeña y se crea la onda sónica. El frente de la onda se desplaza a través del fluido a la velocidad del sonido ( $c$ ) y separa el fluido adyacente al pistón, que ya está en movimiento, del fluido que aún está en reposo. El fluido que está antes de la onda, se ve afectado por esta, aumentando sus propiedades termodinámicas, mientras que el fluido que está posterior a la onda mantiene sus propiedades originales.



**Figura 1: Propagación de una pequeña onda de presión a lo largo de un ducto**

Fuente: G. Caraballo. Diapositivas de Dinámica de Gases – UC (2008)

Para un observador colocado en la onda tal como se muestra en la figura 2, presencia una velocidad del sonido ( $c$ ) del fluido en su contra, y el fluido, antes de la onda, se aleja a una velocidad  $c-dV$ . El observador (que se encuentra encerrado en el mismo volumen de control en el cual esta la onda) está en reposo, siendo testigo de un proceso estacionario. Para un flujo estable unidimensional, se tiene que el flujo másico viene dado por la ecuación:

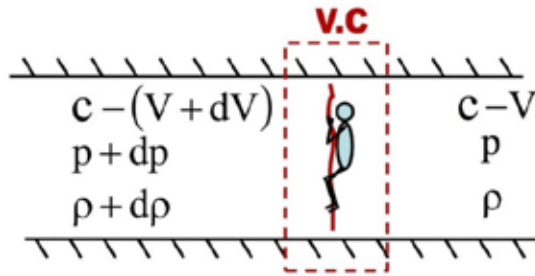
$$(Ec. 24)$$

Tomando en cuenta que el área del ducto es constante, la ecuación se expresa como:

$$(Ec. 25)$$

Aplicando la ecuación anterior en el volumen de control mostrado en la figura 2, resulta la siguiente ecuación:

$$(Ec. 26)$$



**Figura 2: Volumen de control en la onda infinitesimal**

Fuente: G. Caraballo. Diapositivas de Dinámica de Gases – UC (2008)

Resolviendo el producto notable la ecuación tiene el resultado siguiente:

(Ec. 27)

Asumiendo despreciable el término de orden superior y despejando  $dV$  se obtiene:

— (Ec. 28)

Como ningún trabajo o calor atraviesa las fronteras del volumen de control durante este proceso y despreciando cualquier cambio de energía potencial, la ecuación de conservación de la energía se demuestra en la siguiente ecuación:

— — (Ec. 29)

Simplificando la ecuación anterior, donde se desprecia el efecto del diferencial de energía cinética, queda:

(Ec. 30)

La amplitud de la onda sónica es muy pequeña y no genera ningún cambio en la temperatura del fluido. Por ello la propagación de una onda de presión no solo es adiabática, sino también isotrópica. Entonces:

— (Ec. 31)

Luego:

$$\text{---} \quad (\text{Ec. 32})$$

Sustituyendo dh en la ecuación 30

$$\text{---} \quad (\text{Ec. 33})$$

Sustituyendo la ecuación 28 en la ecuación anterior da como resultado lo siguiente:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (\text{Ec. 34})$$

Para un campo de presiones:

$$\text{---} \quad (\text{Ec. 35})$$

Por otro lado, para un proceso isentrópico, se conoce que:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (\text{Ec. 36})$$

Sustituyendo la ecuación 35 en la ecuación 36 Se obtiene

$$\text{---} \quad (\text{Ec. 37})$$

$$\text{---} \quad (\text{Ec. 38})$$

El número de Mach, M, llamado así en honor al físico austriaco Ernst Mach, se define como la relación entre el valor de la velocidad de flujo local, V, a la velocidad local del sonido c.

$$\text{---} \quad (\text{Ec. 39})$$

El número de Mach es el parámetro dominante en el análisis de flujos compresibles, con efectos distintos dependiendo de su magnitud. Los estudiosos de la aerodinámica suelen distinguir entre los diferentes rangos del número de Mach, siendo la siguiente clasificación aproximada de uso extendido (Ver cuadro 1). (J. Anderson, 2002)

### 2.2.4 Flujo Isentrópico

Un flujo isentrópico es un flujo que es a la vez adiabático y reversible. Es decir, no se añade calor al flujo y no hay transformaciones de energía que se producen debido a la fricción o el disipador de efectos. El flujo en transiciones, toberas y medidores Venturi no presentan efectos considerables de fricción debido a las pequeñas distancias recorridas. Por otro lado, la transferencia de calor es mínima ya que los cambios que sufren las partículas son suficientemente pequeños como para no generar gradientes de velocidad y temperatura importantes. Debido a esto se puede considerar este tipo de flujo como isentrópicos. (Y. Cengel, 2007)

#### 2.2.4.1 Flujo isentrópico con variación de área

Analizaremos el flujo isentrópico de un gas compresible. En particular se estudiará el efecto que tiene un cambio en la sección de paso del flujo sobre las condiciones del flujo. A partir de la ecuación de continuidad expresada anteriormente en la ecuación 24 (  $\rho V A = \text{constante}$  ) se puede diferenciar y dividirse entre la razón de flujo de masa. Se obtiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{Ec. 40})$$

Al despreciar la energía potencial, el balance de energía para un flujo isentrópico sin interacciones de trabajo puede expresarse de la forma diferencial como:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{\rho V^2} = 0 \quad (\text{Ec. 41})$$

Combinando las ecuaciones anteriores y reordenado se obtiene

**Cuadro 1: Tipo de flujo según el número de Mach.**

<b>Rango del número de Mach</b>	<b>Tipo de flujo</b>	<b>Descripción</b>
$M < 0,3$	Flujo incompresible	Los efectos de la densidad son despreciables
$0,3 < M < 0,8$	Flujo subsónico	Los efectos de la densidad son importantes, pero no aparecen ondas de choque.
$0,8 < M < 1,2$	Flujo transónico	Aparecen por primera vez ondas de choque que separan regiones subsónicas y supersónicas dentro del flujo
$1,2 < M < 3,0$	Flujo supersónico	Hay ondas de choque pero ya no existen regiones subsónicas.

Fuente: Y. Cengel, Fundamentos de mecánica de fluidos (2007)

Conociendo la ecuación 35, se puede reordenar y sustituirse en la ecuación anterior, dando como resultado:

— — (Ec. 43)

Esta relación describe la variación de la presión en función de la variación de áreas de flujo. Para flujos subsónicos ( $M < 1$ ), el término es positivo. La presión del fluido debe aumentar si el área de flujo del ducto aumenta, y debe disminuir si el área de flujo del ducto disminuye. Por lo tanto, a velocidades subsónicas la presión disminuye en ductos convergentes (toberas aceleradoras subsónicas) y aumenta en ductos divergentes (difusores subsónicos o toberas desaceleradoras subsónicas).

En flujo supersónico ( $M > 1$ ) el término es negativo, por lo tanto,  $dA$  y  $dP$  deben tener signos opuestos. La presión del fluido debe aumentar si el área de flujo del ducto disminuye, y debe disminuir si el área del flujo del ducto aumenta. Por lo tanto, a velocidades supersónicas la presión disminuye en ductos divergentes (toberas aceleradoras supersónicas) y aumenta en ductos convergentes (difusores supersónicos o toberas desaceleradoras supersónicas).

Al despejar la relación diferencial de la velocidad y la presión de la ecuación 5 y sustituirla en la ecuación 43 se obtiene una ecuación que determina la forma de una tobera aceleradora o de un difusor de flujos isentrópicos subsónicos o supersónicos.

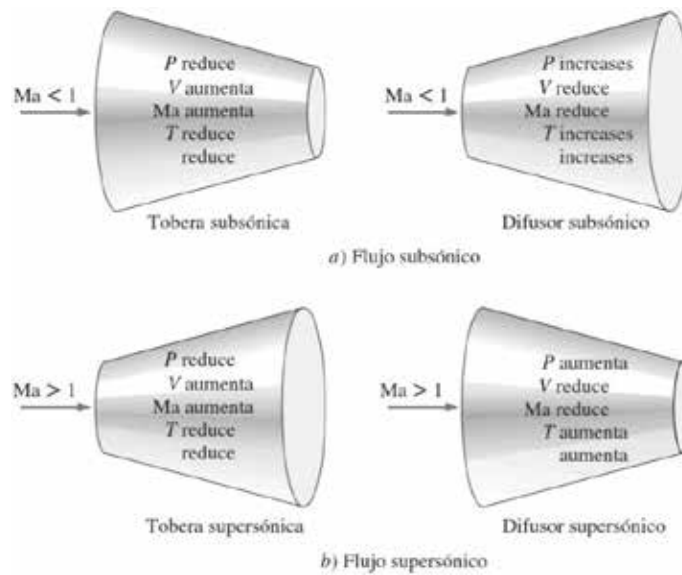
— — (Ec. 44)

Al notar que  $\rho$  y  $\gamma$  son cantidades positivas, se llega a las siguientes conclusiones:

Cuando el flujo es subsónico ( $M < 1$ ) la velocidad y el área de la sección varía en direcciones opuestas. En otras palabras, el aumento de área asociada con el flujo subsónico a través de una tobera divergente está acompañado por un decrecimiento de la velocidad. Flujo subsónico a través de una tobera convergente involucra un incremento de velocidad.



(Ec. 47)



**Figura 3: Propiedades del flujo según el área de la sección transversal del ducto.**

Fuente: Y. Cengel, Fundamentos de mecánica de fluidos (2007)

Como estamos hablando de un gas ideal, se asumen los calores específicos constantes. Sustituyendo la ecuación 5 de forma integrada en la ecuación 38 se obtiene:

(Ec. 48)

Entonces la temperatura que alcanza el gas cuando se lleva al reposo adiabáticamente (temperatura de estancamiento) resulta:

(Ec. 49)

Si se sustituye las ecuaciones 12, 37 y 39 en la ecuación anterior, se puede obtener la relación para la razón de temperaturas de estancamiento y estáticas, en función del número de Mach:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (\text{Ec. 50})$$

A partir de esta última relación, y de las relaciones isotrópicas para un gas ideal pueden formularse relaciones similares para la densidad y la presión de estancamiento:

La presión de estancamiento es la presión que alcanza un fluido cuando se lleva al reposo isotrópicamente. Para un gas ideal con calores específicos constantes,  $P_0$  se puede relacionar con la presión estática del fluido, y el número de Mach de la siguiente manera:

$$\frac{P_0}{P} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{Ec. 51})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{Ec. 52})$$

Análogamente la densidad de estancamiento y la densidad estática pueden relacionarse mediante las siguientes expresiones

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{Ec. 53})$$

$$\frac{P_0}{P} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{Ec. 54})$$

Por otro lado, haciendo un balance de energía, utilizando entalpías de estancamiento, en un flujo a través de un ducto, para un volumen de control que tiene una entrada y una salida. Se obtiene:



$$\frac{V}{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \frac{2}{\gamma - 1} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{M} \right] \quad (Ec. 60)$$

Para la velocidad crítica, se puede establecer una relación matemática, en términos de la temperatura de estancamiento ( $T_0$ ) en condiciones sónicas.

$$\frac{V}{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \frac{2}{\gamma - 1} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{M} \right] \quad (Ec. 61)$$

A partir de la ecuación de continuidad y las relaciones del gas ideal podemos obtener una relación matemática para la relación de área de flujo con área crítica en función del número de Mach. (Y. Cengel, 2007).

Según la ecuación de continuidad, podemos afirmar que el flujo másico en cualquier sección de flujo debe ser igual al flujo másico en una sección (real o imaginaria) en la que el flujo está en condiciones sónicas.

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (Ec. 62)$$

En donde:

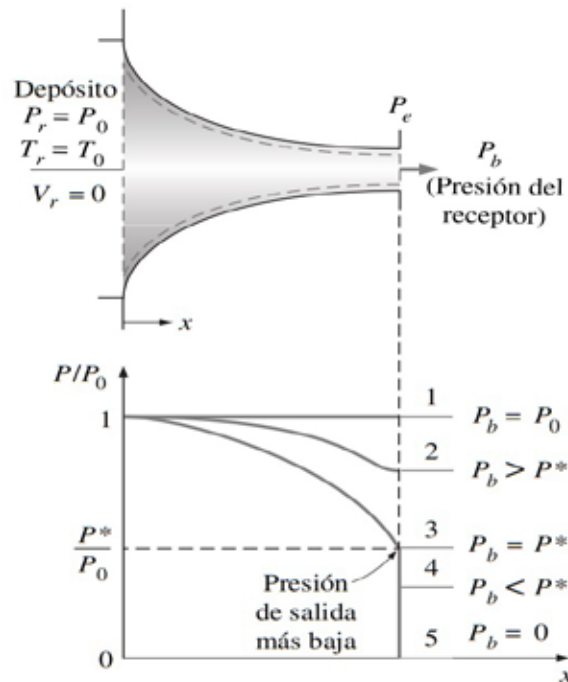
$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (Ec. 63)$$

### 2.2.5 Flujo isentrópico en toberas

Las toberas y difusores son dispositivos de regulación del flujo que se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería, como en turbinas de gas y de vapor, sistemas de propulsión de aviones, y en soplantes industriales de diferente índole. Estas pueden ser toberas convergentes y toberas convergentes – divergentes. Una tobera es un dispositivo que incrementa la velocidad de un fluido a expensas de la presión. En cambio, un difusor es un dispositivo que incrementa la presión de un fluido al desacelerarlo. Es decir, las toberas y los difusores llevan a cabo tareas opuestas. El área de la sección transversal de una tobera, disminuye en la dirección de flujo para flujos subsónicos y aumenta para los supersónicos. (Y. Cengel, 2007)

### 2.2.5.1 Toberas Convergentes

Puesto que la velocidad del fluido en el depósito es cero y el flujo a través de la tobera se aproxima como isentrópico, la presión de estancamiento y temperatura de estancamiento del fluido en cualquier sección transversal de la tobera son iguales a la presión y temperatura del tanque, respectivamente. Suponiendo que la condición de estancamiento a la entrada de la tobera se mantiene constantes, en tanto que la contrapresión (presión de la cámara a la salida de la tobera, presión del receptor) varía disminuyendo gradualmente desde un valor igual a la presión de estancamiento hasta un valor inferior a la presión crítica. En la figura 4 se ilustra el comportamiento de la tobera como consecuencia de esta variación. Mientras la contrapresión es ligeramente menor que la presión de estancamiento, se produce un flujo completamente subsónico. Pero a medida que la contrapresión disminuye, se incrementa el número de Mach del flujo. El fluido en estas condiciones sale de la boquilla a la presión ambiental ( $P_b$ ) como flujo libre subsónico, es decir:  $P_e = P_b$ .



**Figura 4: Distribución de presión en una tobera convergente.**

Fuente: Y. Cengel, Fundamentos de mecánica de fluidos (2007)

La tendencia anterior continúa hasta que finalmente el número de Mach es igual a 1, alcanzando las condiciones sónicas en la garganta. La presión de la contrapresión es igual a la presión crítica en la garganta. En esta situación se dice que la tobera está operando en condiciones de diseño ( $P_e = P^*$ ). Toda disminución adicional de la contrapresión no tiene ningún efecto sobre el flujo en la tobera y se dice que la tobera está operando en una condición de estrangulamiento. (Y. Cengel, 2007). En las condiciones del flujo estacionario, la razón del flujo de masa a través de la tobera es constante y puede expresarse como:

$$\frac{\dot{m}}{A^*} = \frac{P^*}{\sqrt{T^*}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \quad (Ec. 64)$$

Sustituyendo T y P de las ecuaciones 45 y 46 respectivamente se obtiene la siguiente ecuación de flujo másico.

$$\frac{\dot{m}}{A^*} = \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left( \frac{P^*}{P_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \left( \frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (Ec. 65)$$

De esta manera, la razón del flujo de masa de un fluido particular a través de una tobera es una función de las propiedades de estancamiento del fluido, el área del flujo y el número de Mach. Esta ecuación es válida para cualquier sección transversal por lo tanto el flujo másico puede evaluarse en cualquier posición a lo largo de la tobera.

Para las condiciones críticas ( $M=1$ ) la razón del flujo de masa a través de una tobera es máximo. Para estas condiciones la ecuación anterior resulta:

$$\frac{\dot{m}}{A^*} = \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left( \frac{P^*}{P_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \left( \frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (Ec. 66)$$

Una relación para la variación del área de flujo A a lo largo de la tobera respecto al área  $A^*$  de la garganta puede obtenerse al combinar las ecuaciones 65 y

66 aplicadas para la misma razón de masa de flujo y propiedades de estancamiento de un fluido particular. Esto lleva a:

$$\frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2} = \frac{A_2}{A_1} \quad (Ec. 67)$$

### 2.2.5.2 Toberas Convergentes - Divergentes

Cuando se piensa en toberas aceleradoras, por lo general se piensa en ductos de flujo cuya área de sección transversal disminuye en la dirección del flujo. Sin embargo, la mayor velocidad a la cual un fluido puede acelerarse en una tobera convergente se limita a la velocidad sónica ( $M=1$ ) la cual ocurre en la salida (garganta) de la tobera. La aceleración del fluido a velocidades supersónicas ( $M > 1$ ) puede lograrse solamente al añadir una tobera divergente a la tobera aceleradora subsónica en su garganta. La combinación resultante es una tobera convergente – divergente, la cual es un dispositivo común en aviones supersónicos y cohetes de propulsión.

Sin embargo, el solo hecho de hacer fluir un fluido a través de una tobera convergente – divergente no garantiza que el fluido se acelerara a una velocidad supersónica. Pues, si la presión del receptor (contrapresión) no está en el rango adecuado, existe la posibilidad de que el fluido puede por sí mismo desacelerarse en la sección divergente en vez de acelerarse.

Consideremos ahora, igual que en el caso anterior, una tobera convergente – divergente en las condiciones de estancamiento a la entrada de la tobera se mantiene constantes, en tanto que la contrapresión (presión de la cámara a la salida de la tobera, presión del receptor) varía disminuyendo gradualmente desde un valor igual a la presión de estancamiento hasta un valor inferior a la presión crítica, tal como se muestra en la figura 5, donde se ilustra el comportamiento de la tobera como consecuencia de esta variación.

Cuando la presión de estancamiento es igual a la presión de salida e igual a la contrapresión ( $P_o = P_e = P_b$ ) no existe flujo pasando por la tobera. En el caso de que la

presión de estancamiento sea mayor que la presión de salida, pero su diferencia es muy pequeña, el flujo permanece subsónico por toda la longitud de la tobera. Existen casos en donde la relación de presión de estancamiento y contrapresión es lo suficientemente grande como para que en la garganta el flujo llegue a velocidad sónica ( $M=1$ ) y siga aumentando en la sección divergente hasta conseguir velocidades supersónicas ( $M>1$ ) en dicha sección.

Para este trabajo, este es el caso a estudiar, debido a que las ondas de choque ocurren en la sección divergente de una tobera Laval a velocidades supersónicas. (Y. Cengel, 2007)

### 2.2.6 Flujo de Fanno.

En el caso en el cual es flujo es de área constante, en donde la fricción es el factor determinante sobre las alteraciones en las propiedades del fluido, es posible expresarlo directamente como una función de la fricción. En tuberías cortas donde no es hecho ningún ensayo para lograr calentamiento o enfriamiento, se considera que en un flujo no se va a presentar ninguna transferencia de calor. Esto es particularmente cierto en algunos de los ductos utilizados en los motores para aviones de propulsión. También el flujo en ductos se puede asociar con algún trabajo a alto vacío, pudiendo considerarse como adiabático con resultados satisfactoriamente precisos. Para flujo adiabático de área constante y que no efectúa trabajo, la ecuación de la energía para el flujo estable da:

$$\text{---} \tag{Ec. 68}$$

Como:

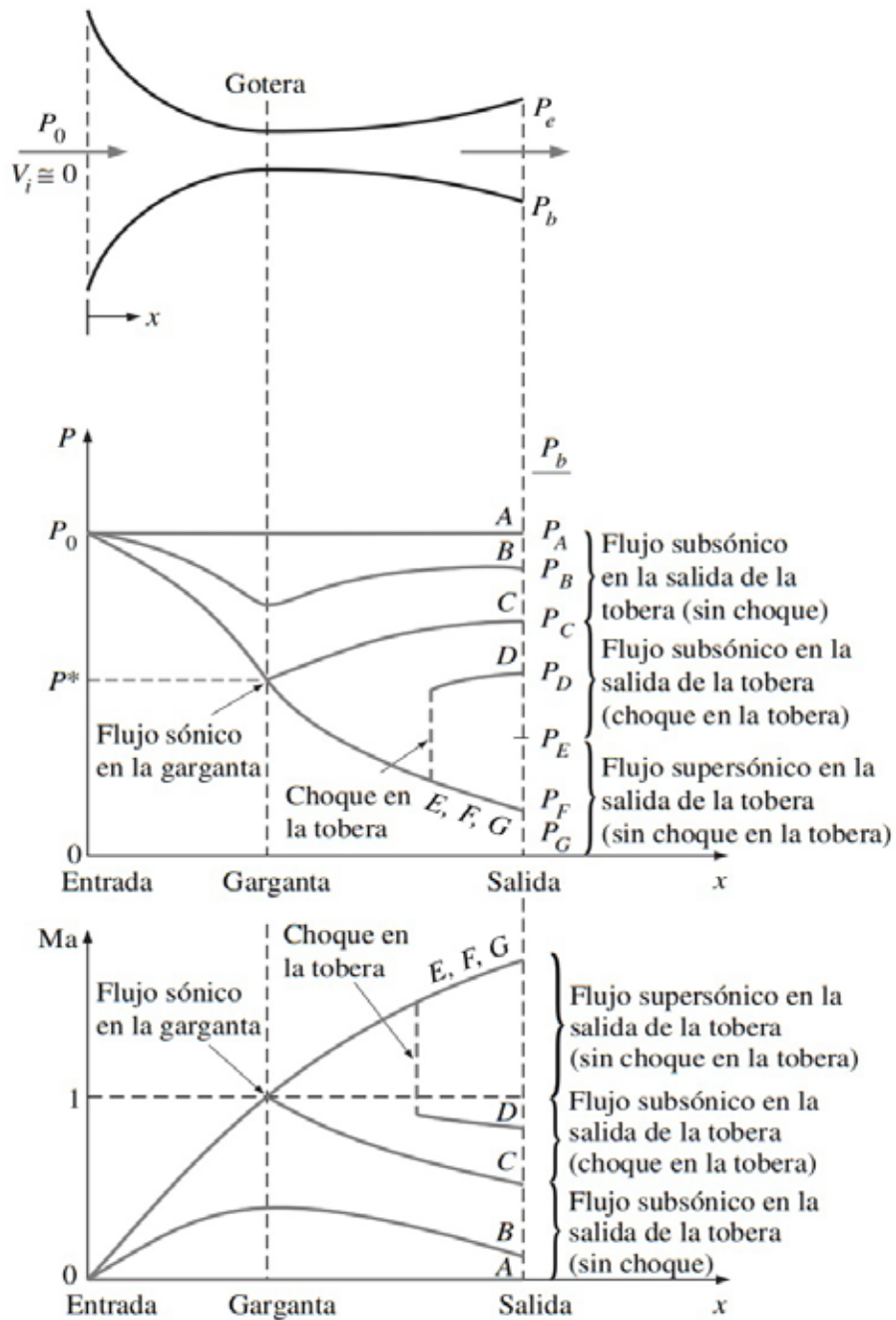
$$\text{---} \tag{Ec. 69}$$

Se despeja  $V$  y se busca la expresión:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{(Ec. 70)}$$

Y sustituyendo en (2.68)

$$\frac{\text{---}}{\text{---}} \quad \text{(Ec. 71)}$$



**Figura 5: Distribución de presión en una tobera convergente-divergente.**

Fuente: Y. Cengel, Fundamentos de mecánica de fluidos (2007)

Esta ecuación describe el flujo adiabático de área constante, la cual forma una familia de curvas o líneas de Fanno, como también se les llama, la forma de estas curvas se conoce al efectuar la integración de la ecuación (71):

$$\frac{dh}{h} = \frac{f}{4} \frac{dx}{D} \quad (Ec. 72)$$

Para entender más completamente la variación de estado a lo largo de una línea de Fanno, se emplea la relación termodinámica:

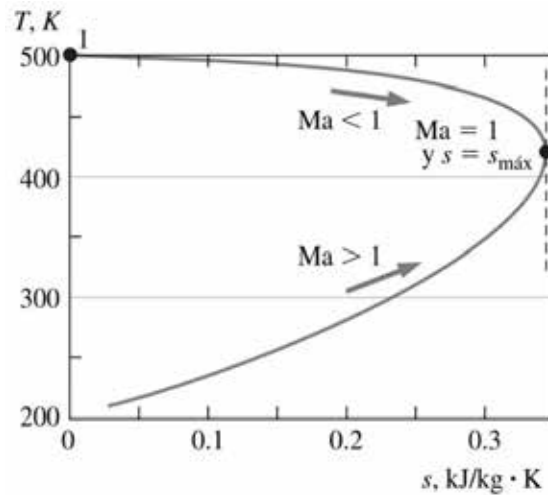
$$dh = T ds \quad (Ec. 73)$$

Sustituyendo  $dh$  en la relación fundamental de un fluido adiabático con área constante, queda:

$$T ds = \frac{f}{4} \frac{dx}{D} \quad (Ec. 74)$$

Es deseable poder visualizar las variaciones en las propiedades del fluido a lo largo de una línea de Fanno sobre un diagrama  $h-s$  o  $T-s$ . Si el fluido es una sustancia pura para la cual es conocida la ecuación de estado, entonces es posible eliminar 2 de las 4 variables ( $P, T, s, \rho$ ) de la ecuación (74). En efecto esto se hace para el caso de un gas perfecto, por ejemplo, calculando  $\frac{dh}{h}$ , y graficando contra  $\left(\frac{dx}{D}\right)$ , para diferentes números de Mach, lo que da como resultado una curva de la forma general. La máxima entropía debe presentarse para un número de Mach igual a 1. Para un flujo subsónico o supersónico, el estado se aproxima a la condición de velocidad sónica como se muestra en la figura 6.

La parte superior de la curva de Fanno se aproxima asintóticamente a la línea  $h = \text{constante}$ , indicando esto, que a muy bajas velocidades la entropía puede aumentarse como resultado de la fricción, permaneciendo la entalpía constante. Este es el procedimiento común para considerar al flujo con una fricción equivalente a un proceso de estrangulamiento ( $h = \text{constante}$ ).



**Figura 6: Diagrama para un flujo adiabático con fricción en un ducto de área constante.**

Fuente: Y. Cengel, Fundamentos de mecánica de fluidos (2007)

En puntos situados en la parte superior de la curva, el flujo es subsónico, y como la entropía aumenta, el número de Mach se aproxima a 1. En un valor máximo de entropía, el número de Mach alcanza el valor límite de 1. En puntos situados en la parte inferior de la curva el flujo es supersónico. Como la entropía nunca puede disminuir, para condiciones adiabáticas en un área constante, un flujo subsónico nunca puede llegar a supersónico y, en ausencia de alguna discontinuidad, un flujo supersónico nunca puede llegar a subsónico. (Y. Cengel, 2007)

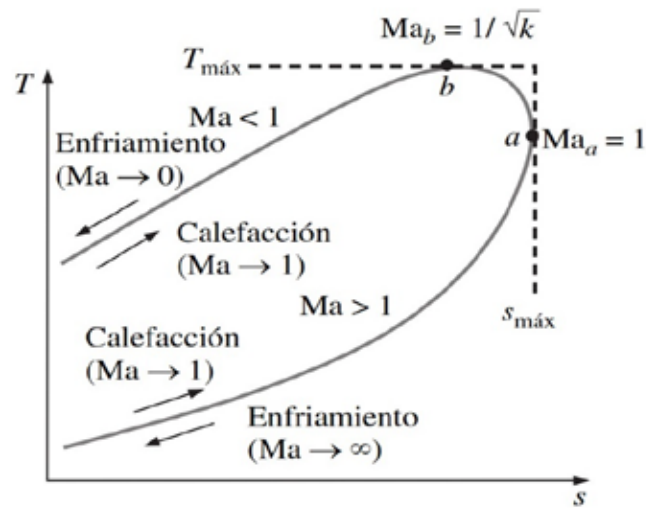
### 2.2.7 Flujo de Rayleigh

Las curvas o líneas de Rayleigh se derivan de los principios de conservación de la masa y los principios de momento lineal. Las curvas de flujo de Rayleigh corresponden al flujo de fluidos a través de un cambiador, como consecuencia de esto la entalpía de estancamiento y la temperatura de estancamiento son variables, por lo que las ecuaciones presentadas para flujo adiabático no pueden ser aplicadas en este caso. Para este caso deberemos considerar un proceso de calentamiento o enfriamiento simple, con la finalidad de poder despreciar los efectos de la fricción. Esta interpretación puede tomarse de la misma forma para las cámaras de

combustión, donde la relación de la mezcla aire-combustible es tan pequeña, que los efectos causados por el cambio en la composición química y cambios de masa son relativamente pequeños, comparados con los efectos producidos por los cambios de la entalpía de estancamiento. Para tener una idea más completa de los cambios que resultan de los procesos simples de calentamiento o enfriamiento. Es útil hacer la gráfica de sus propiedades en diagramas termodinámicos como se muestra en la figura 7. La entropía aumenta con el suministro de calor al fluido, y así el estado se desplaza a la derecha a lo largo la línea de Rayleigh mientras que se transfiere calor al fluido.

Los estados sobre la rama superior de la línea de Rayleigh por arriba del punto a son subsónicos, y los estados sobre la rama inferior por abajo del punto a, supersónicos. Un proceso a la derecha sobre la línea de Rayleigh corresponde a la adición de calor, y a la izquierda, al rechazo, cualquiera que sea el valor inicial del número de Mach. El punto a es el punto de máxima entropía y por tanto donde la velocidad es sónica ( $M=1$ ).

El calentamiento aumenta el número de Mach para flujos subsónicos, pero lo disminuye para flujos supersónicos. Durante el calentamiento, el número de Mach de flujo se aproxima a  $M=1$ . (Y. Cengel, 2007)



**Figura 7: Diagrama  $T-s$  para el flujo en un ducto de área constante con transferencia de calor y de fricción despreciable (flujo de Rayleigh).**

Fuente: Y. Cengel, Fundamentos de mecánica de fluidos (2007)

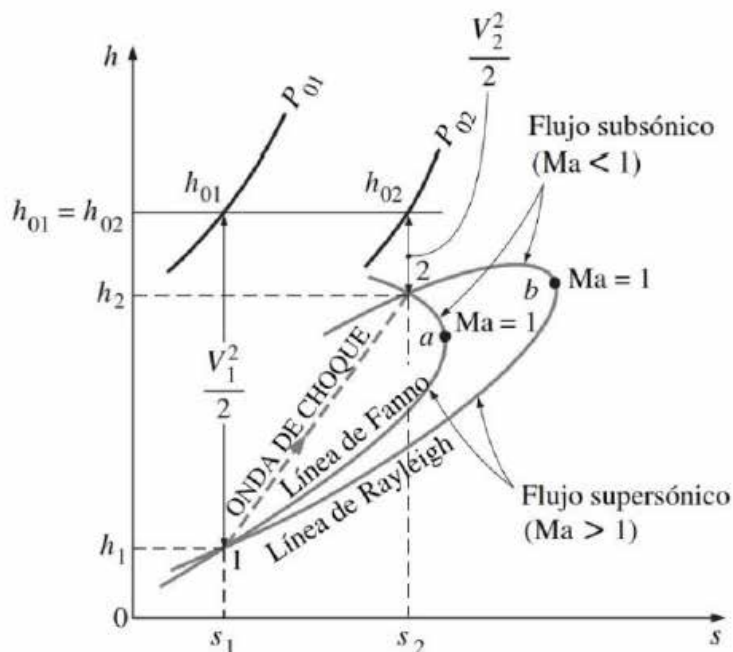
### 2.2.8 Onda de Choque normal

Con flujo supersónico, en función de la geometría y de las condiciones aguas abajo, se pueden producir bruscos cambios de muy poco espesor (del orden de  $10^{-6}$  m) a flujo subsónico, de marcado carácter irreversible y por tanto con aumento de entropía, equivalentes a discontinuidades en el flujo: es la denominada onda de choque normal. En donde se tienen altos gradientes de presión y de temperatura, en el sentido del flujo.

La aplicación de la segunda ley de la termodinámica a la onda de choque normal delgada y adiabática, revela que las ondas de choque normales sólo pueden causar un fuerte aumento de la presión del gas y deben ser supersónico aguas arriba y subsónico aguas debajo de la onda choque normal. De la misma manera, debido al aumento de temperatura en una onda de choque de muy poco espesor, los gradientes térmicos son elevados y siempre en el sentido del flujo ( $2 > 1$ ), lo que implica alta velocidad de transmisión de calor.



Al superponer las líneas de Fanno y Rayleigh en el mismo diagrama, tal como se muestra en la figura 9, los puntos de intersección entre las curvas del mismo



flujo másico por unidad de área representan los estados en que se cumplen las leyes de conservación antes y después de la onda de choque normal.

### Figura 9: Representación de una onda de choque en un diagrama h-s

Fuente: G. Caraballo. Diapositivas de Dinámica de Gases – UC (2008)

El principio de la conservación de energía exige que la entalpía de estancamiento permanezca constante durante el choque;  $h_{01} = h_{02}$ . Esto significa que la temperatura de estancamiento de un gas ideal también permanece constante durante el choque. Sin embargo, se nota que la presión de estancamiento disminuye durante el choque debido a las irreversibilidades, mientras que la temperatura normal (estática) aumenta drásticamente debido a la conversión de energía cinética en entalpía y causa un gran descenso en la velocidad del fluido. (J. Anderson, 2002)

### 2.2.9 Separación de la capa límite

La separación del flujo en la sección divergente de la tobera es uno de los muchos fenómenos que se producen en flujos internos sometidos a régimen supersónico, cuando una onda de choque interactúa con la capa límite, ocurren diversos fenómenos como inestabilidad, vórtice de flujo, ondas de presión, mezcla aleatoria y turbulencia (ver cuadro 2).

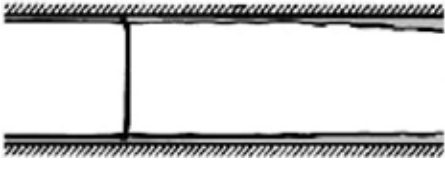

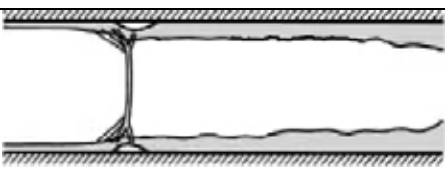
La separación de la capa límite se debe a las fuerzas tangenciales que incrementan la fricción en las zonas de presión de la capa interna entre el flujo y la pared de la tobera; esta crea inestabilidad seguido por muchos choques débiles, que desaceleran al gas. El aumento adverso del gradiente de presión del choque provoca que la capa límite se separe aguas abajo de la pared de la tobera formando una capa de cizallamiento. La región que limita la capa de cizallamiento y la pared de la tobera se llama la zona de separación y también se conoce como la zona de circulación. La inestabilidad iniciada por la interacción de la onda de choque con la capa límite en la sección divergente de una tobera supersónica hace que el gas de escape pierda la acumulación de energía cinética del fluido, por lo tanto, existe una desaceleración de la velocidad del flujo y disminución del empuje. Para flujo interno, estos efectos se traducen en pérdida total de presión e inestabilidad, y la pérdida de rendimiento del control de flujo es una gran desventaja.


Con el aumento progresivo del número de Mach, se reduce el mínimo de la tensión de cizallamiento. Se llega a cero en un punto donde se forma una burbuja de separación diminuta (separación incipiente). Con un mayor aumento en el número de Mach, la zona o de separación crece y la interacción se hace más fuerte.

Asimismo, a altos números de Reynolds, las pequeñas perturbaciones generadas en el punto de desarrollo se amplifican en las capas de cizallamiento formadas entre el flujo y la zona de re-circulación, desembocando remolinos que se alternan de un lado a otro con la consiguiente asimetría del flujo. Debido a esta inestabilidad, se crea una estructura bifurcada entre las dos zonas de separación del flujo.

El choque  $\sigma_{\text{ob}}$  se crea a partir de un choque  $\sigma_{\text{ob}}$  que surge desde el punto de la pared superior donde inicia la zona de separación y estos se encuentran en un punto común llamado punto triple, donde el choque de  $\sigma_{\text{ob}}$  y el choque vertical  $\sigma_{\text{ob}}$  también se encuentran. El choque de  $\sigma_{\text{ob}}$  rebota desde la capa de cizallamiento como un  $\sigma_{\text{ob}}$  que rebota de nuevo por la reflexión de la zona de circulación opuesta como una  $\sigma_{\text{ob}}$ . Este patrón se moverá aguas abajo repitiéndose. Las corrientes de deslizamiento onduladas que emergen del punto triple crean una zona de un canal de flujo convergente – divergente que genera una región subsónica. La forma de triángulo es conocida como pie  $\sigma_{\text{ob}}$ , y el tamaño de este choque se convierte en la mitad del tamaño corriente abajo (ver figura 10) y con el tiempo disminuye de distancia entre la salida y la región de pluma (después de la salida de la tobera). Cuando se incrementa la relación de presión, los pies de choque  $\sigma_{\text{ob}}$  se alejan de la garganta y la zona de separación se transforma de asimétrica a simétrica (ver figura 11)

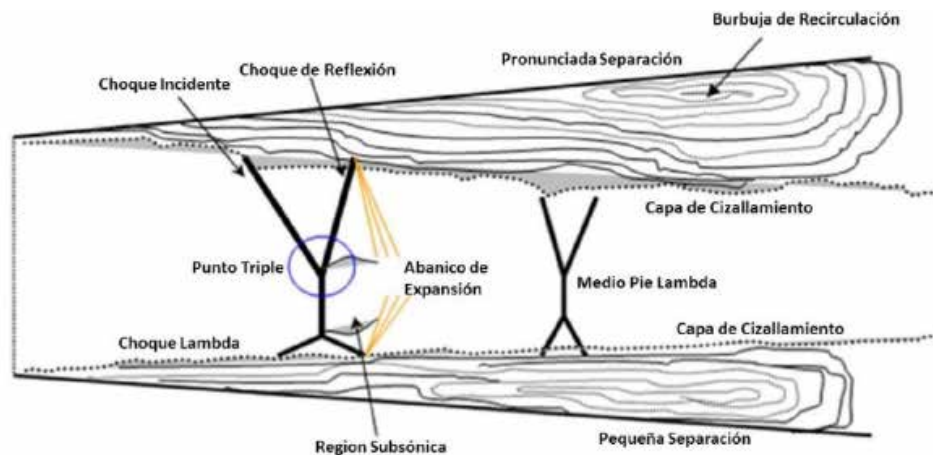
**Cuadro 2: Patrones de Interacción para distintos rangos de número de Mach**

Número de Mach	Patrón de interacción	Condición	Representación gráfica
$1 < M_1 < 1,2$	Débil	No hay separación	
$1,2 < M_2 < 1,32$	Moderada	Separación incipiente	
$1,32 < M_3 < 1,5$	Fuerte	Separación considerada	

$M_4 > 1,5$	Muy Fuerte	Sistema de multiples ondas de choque	
-------------	------------	--------------------------------------	--

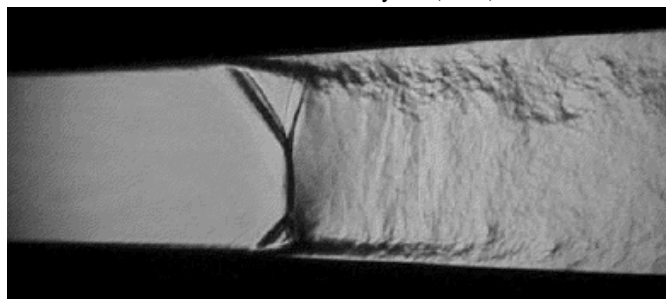
Fuente: E.M. S. Ekanayake (2010)

Anteriores investigaciones de la separación de la capa límite a lo largo de las paredes de toberas supersónicas mostraron que se puede asumir que esta se separa siempre que la re-compresión de la onda de choque excede la presión a la salida. Generalmente, efectos similares deberían ocurrir si el ángulo de divergencia de la tobera fuese demasiado grande generando aumentos perjudiciales en los gradientes de presión aguas abajo de la onda de choque donde el flujo es subsónico. Algunos trabajos experimentales realizados en flujos externos, muestran que en la interacción de la onda de choque y la capa límite turbulenta los aumentos de presión en el punto de separación son independientes de la geometría de la interacción y solo dependen del número de Mach aguas arriba del choque. Tal suposición también podría aplicarse a flujos sobre expandidos en una tobera, donde por lo general, se espera que sea requerida la fuerza de una onda de choque oblicua para que se genere la separación de capa límite. (E.M. S. Ekanayake, 2010)



**Figura 10: Esquemización de los parámetros involucrados en la separación de capa límite para flujos internos**

Fuente: E.M. S. Ekanayake (2010)



## Figura 11: Separación de flujo e inestabilidad de la capa de cizallamiento

Fuente: E.M. S. Ekanayake (2010)

### 2.2.10 Modelación matemática

A continuación se presentan los modelos matemáticos utilizados para realizar la simulación del campo de flujo, a través de la geometría, basados en las leyes de conservación.

#### Ecuación de la continuidad

En la ecuación 25 se expresa la ecuación de continuidad como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{Ec. 75})$$

Donde  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  y  $\frac{D\rho}{Dt}$  es la divergencia de la velocidad y el término  $\frac{D\rho}{Dt}$  en realidad expresa la derivada material  $D/Dt$ , esta forma de la ecuación de continuidad no hace referencia a ningún sistema de coordenadas en específico, es la forma para expresarla empleando diversos sistemas de coordenadas, en el caso de un **flujo incompresible**, en el que la densidad de una partícula de fluido no cambia durante su trayecto  $D\rho/Dt=0$ , se puede ver que la **ecuación de continuidad** se expresa en forma diferencial (ec. 76) y vectorial (ec. 77) respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{Ec. 76})$$

(Ec. 77)

### **Ecuación de momentum**

En la ecuación 28 se expresa la ecuación de momentum como:

$$\text{—————} \quad \text{(Ec. 78)}$$

Como se muestra en la ecuación 79 el esfuerzo cortante , está relacionado con la velocidad de deformación por:

$$\text{—} \quad \text{(Ec. 79)}$$

Las ecuaciones diferenciales de momentum se pueden escribir para flujos incompresibles, utilizando la derivada material (Ec. 80, 81 y 82):

$$\text{—} \quad \text{---} \quad \text{(Ec. 80)}$$

$$\text{—} \quad \text{---} \quad \text{(Ec. 81)}$$

$$\text{—} \quad \text{---} \quad \text{(Ec. 82)}$$

Y en forma vectorial:

$$\text{—} \quad \text{(Ec. 83)}$$

Se han añadido tres ecuaciones adicionales a la ecuación de continuidad para obtener cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. Con las condiciones de frontera iniciales apropiadas, es posible obtener una solución que nos dé un campo de velocidad y presión para este flujo incompresible.

### **Ecuación de la energía total**



esfuerzo-velocidad-gradiente, conocidas como ecuaciones constitutivas, se presentan en las ecuaciones:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{Ec. 86})$$

$$\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 87})$$

$$\tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{Ec. 88})$$

Para la generalidad de los gases, y con exactitud para los gases monoatómicos, el segundo coeficiente de viscosidad está relacionado con la viscosidad como se muestra en la ecuación:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{Ec. 89})$$

Condición conocida como hipótesis de Stokes. Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos normales es igual a la presión, es decir:

$$-p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (\text{Ec. 90})$$

Utilizando las ecuaciones 86; 87 y 88, se puede demostrar que esto siempre se cumple para un líquido en el que  $\mu > 0$ , y con la hipótesis de Stokes también se cumple para un gas.

Si sustituimos las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de momentum, se obtiene, utilizando las hipótesis de Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (\text{Ec. 91})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (\text{Ec. 92})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (\text{Ec. 93})$$

Donde se ha supuesto un fluido homogéneo, es decir, que las propiedades del fluido (incluida la viscosidad) son independientes de la posición. En el caso de un flujo incompresible la ecuación de continuidad permite reducir las ecuaciones anteriores como muestra las ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (\text{Ec. 94})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (\text{Ec. 95})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (\text{Ec. 96})$$

Éstas se denominan ecuaciones de Navier-Stokes; con estas tres ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de continuidad se tienen cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , y  $p$ . Se supone que las propiedades de viscosidad y densidad del fluido se conocen. Con las condiciones de borde apropiadas, es de esperar que se puedan resolver las ecuaciones. Varias geometrías relativamente sencillas permiten soluciones analíticas; aunque para muchos flujos de interés ingenieril se han determinado soluciones numéricas. Puesto que las ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, no se puede confiar en que la solución que se obtenga se pueda reproducir realmente en el laboratorio; es decir, las soluciones no son únicas. Por ejemplo un flujo laminar y uno turbulento pueden tener condiciones iniciales y de frontera idénticas, a pesar de que los dos flujos (las dos soluciones) son muy diferentes. Se puede expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en forma vectorial multiplicando las ecuaciones por  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  respectivamente, y sumando:

$$\mathbf{i} \cdot \text{---} + \mathbf{j} \cdot \text{---} + \mathbf{k} \cdot \text{---} \quad (\text{Ec. 97})$$

$$\text{---} + \text{---} + \text{---} \quad (\text{Ec. 98})$$

$$\text{---} \quad (\text{Ec. 99})$$

Donde se ha utilizado el operador Laplaciano:

$$\text{---} + \text{---} + \text{---} \quad (\text{Ec. 100})$$

Combinando lo anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes adoptan la forma vectorial como:

— (Ec. 101)

Esta forma nos permite utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando otros sistemas de coordenadas (rectangulares, cilíndricas y esféricas). (J. Anderson, 2002).

### **2.2.11 Modelo de turbulencia eddy viscosity**

(C. Mataix, 1998). Una propuesta sugiere que la turbulencia se compone de pequeños remolinos que se forman y disipan continuamente, en la cual los esfuerzos de Reynolds se asumen proporcionales a los gradientes de la velocidad media. Esto define a los modelos “Eddy-Viscosity”. Esta hipótesis supone que los esfuerzos de Reynolds pueden estar relacionados con los gradientes de velocidad promedio y la viscosidad de “Eddy”, a través de la hipótesis del gradiente de difusión. Se representan mediante:

— (Ec. 102)

Donde  $\nu_t$  es la viscosidad turbulenta o viscosidad de Eddy.

Análoga a la hipótesis de viscosidad de Eddy, la difusividad de Eddy es la hipótesis que afirma que los flujos de Reynolds son un escalar linealmente relacionadas con el gradiente de la media escalar como se muestra en la ecuación 103:

(Ec. 103)

Donde  $Pr_t$ , el número de turbulencia de Prandtl.

Las ecuaciones anteriores sólo pueden expresar los términos de las fluctuaciones de la turbulencia en función de la velocidad promedio si la viscosidad turbulenta  $\nu_t$  se conoce, tomando en cuenta que tanto los modelos  $k - \epsilon$  y  $k - \epsilon - \omega$  proporcionan esta variable; sujeto a esta hipótesis, tanto la ecuación de momento promedio de Reynolds y la ecuación escalar de transporte se pueden expresar como:



= Disipación viscosa

El modelo  $k - \epsilon$  tiene cinco constantes, que garantizan la homogeneidad dimensional. Las cuales son:

$$C_{\mu} = 0,09, \quad C_1 = 1,44, \quad C_2 = 1,92, \quad k = 1,0, \quad \epsilon = 1,3$$

Si bien los modelos estándar de dos ecuaciones, como el modelo  $k - \epsilon$ , dan una buena predicción para muchos problemas de fluidos en ingeniería, existen otras aplicaciones para las cuales estos modelos pueden no ser los más adecuados. Entre estos se encuentran: Flujos con separación de capa límite, corrientes con cambios bruscos en la tasa promedio de los esfuerzos, flujos rotativos, flujos sobre superficies curvas. Entre las principales ventajas e inconvenientes del modelo de turbulencia  $k - \epsilon$  son las siguientes:

#### **Ventajas:**

Sólo se necesita fijar las condiciones iniciales y de contorno.

Resultados satisfactorios para una gran cantidad de flujos.

Es el modelo turbulento más ampliamente utilizado en la mayoría de flujos en aplicaciones industriales.

Se dispone de leyes de pared desarrolladas como condiciones de contorno para este tipo de modelos.

Desde el punto de vista de modelado computacional, presenta mejor rendimiento en flujo rotacional.

#### **Inconvenientes:**

Implementación más compleja que los modelos algebraicos debido a la introducción de dos ecuaciones diferenciales adicionales.

Pobres resultados en casos como: flujos no confinados, flujos con grandes gradientes longitudinales, flujos turbulentos completamente desarrollados en conductos no circulares.



separación de flujos bajo condiciones de gradientes de presión adversas; esta alta precisión se obtiene limitando la formulación de “Eddy Viscosity” restringiendo el limitador de la capa límite de la pared. Su formulación se basa en la distancia más cercana a la superficie y en las variables de flujo.

#### **2.2.15 Modelos de la capa límite**

(C. Mataix, 1998) La capa límite es la zona del campo fluido próxima a un contorno sólido en la que se manifiestan especialmente los efectos viscosos. Debido a la viscosidad y a la condición de no deslizamiento, cerca de cualquier contorno sólido aparece un gradiente de velocidades en la dirección normal a dicho contorno. Este gradiente de velocidades condiciona el intercambio energético entre las distintas partículas de fluido con velocidades diferentes, originando vorticidad y turbulencia.

El problema básico para la modelización numérica del intercambio energético en la capa límite sobre cualquier frontera sólida consiste en la definición correcta de las velocidades de las partículas en una zona muy próxima a dicha frontera. Esto implica una densidad de mallado muy elevada, necesaria para capturar los distintos fenómenos que se producen dentro de la capa límite.

Esta dificultad se ha abordado usando varias aproximaciones, que se pueden englobar en cuatro grupos: modelos de distribución de las pérdidas, modelos de capa de cortadura, modelos de capa límite y leyes de pared, que son brevemente explicados a continuación.

#### **2.2.16 Niveles de aproximación numérica**

El desarrollo de las técnicas numéricas y su aplicación a cualquier ciencia o tecnología han dado lugar al desarrollo y a la concienciación generalizada de uno de los conceptos básicos en ingeniería como es el de grado de aproximación. Esta idea es bastante clara si se considera que lo que se pretende con cualquier técnica numérica es conocer las variables físicas a partir de la resolución numérica de una serie de ecuaciones que gobiernan el fenómeno.

Se han de definir y establecer las distintas aproximaciones que introducen los métodos numéricos. En lo referente a la Mecánica de Fluidos, la primera aproximación que aparece es el planteamiento del modelo físico-matemático que defina el comportamiento real de un determinado flujo. Dicho modelo matemático está habitualmente basado en la hipótesis del continuo, válida para la mayor parte de problemas industriales, pero que tiene sus limitaciones para casos extremos de flujos de gases. Una vez hecha esta salvedad, aplicando las leyes básicas de la física clásica se puede establecer una serie de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento matemático de toda partícula fluida. La resolución exacta de dichas ecuaciones serviría para determinar completamente cualquier movimiento en el seno de un fluido. Se puede decir que un modelo matemático se define únicamente tras haber considerado el nivel de aproximación a la realidad requerido a la hora de obtener la exactitud deseada en el cálculo de una serie de variables dependientes. Desafortunadamente, debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales que aparecen, a la complejidad geométrica de los flujos, y a la complejidad de las condiciones de contorno iniciales, no resulta posible obtener soluciones analíticas de dichas ecuaciones de gobierno.

Establecidas las ecuaciones de gobierno resulta imprescindible introducir una segunda aproximación al problema. La forma clásica de abordarlo sería construir un modelo a escala reducida del flujo en cuestión y analizarlo experimentalmente en el laboratorio. La aproximación numérica implica introducir algunas hipótesis simplificadas que aproximen lo más posible los resultados finales a los que se obtendrían si se pudiera calcular la solución exacta. Dichas hipótesis se dirigen habitualmente hacia la simplificación tanto de la geometría a estudiar como de las ecuaciones a resolver. Obviamente, al no disponerse de la solución analítica exacta resulta bastante complicado establecer de antemano qué hipótesis sirven y cuales son descartables y, por tanto, en cualquier simulación aplicada a la Mecánica de Fluidos, es preciso dedicar

mucho esfuerzo al análisis de los resultados obtenidos antes de aceptarlos como válidos.

Una vez definidas las ecuaciones diferenciales simplificadas, aparece otro problema relacionado con el posible tratamiento que se pueda hacer de dichas ecuaciones usando técnicas computacionales. Por medio de los ordenadores resulta muy fácil resolver una ecuación o sistema de ecuaciones algebraico, sin embargo, las ecuaciones que estudian el movimiento de los fluidos son ecuaciones diferenciales no lineales. Resulta obligatorio realizar la transformación de las ecuaciones de forma que puedan ser resueltas por un ordenador. El paso de las ecuaciones diferenciales a sus equivalentes lineales constituye otro nivel de aproximación y normalmente recibe el nombre de discretización de las ecuaciones.

En cuanto a la geometría a estudiar, se debe señalar que la aproximación a la que debe someterse no sólo es de orden descriptivo respecto a su contorno, sino que además ha de establecerse la definición del espacio ocupado por el fluido. En este sentido, resulta imprescindible referir los puntos a un determinado sistema de coordenadas en los que se pretenderá resolver las ecuaciones para obtener soluciones de las variables deseadas. Aunque el campo fluido sea un continuo, no se puede pretender resolver las ecuaciones en todos los puntos de un determinado volumen, porque entonces se tendría un número enorme de ecuaciones a resolver. Por tanto, hay que elegir cierto conjunto de puntos en los que se resolverán las mencionadas ecuaciones y que serán los puntos dónde finalmente se conocerán los valores de las variables fluidas. La definición de estos puntos es lo que se denomina habitualmente discretización espacial del dominio (también se habla de generación del mallado). El proceso descrito no deja de ser otra aproximación que se introduce en el cálculo y que define el nivel de aproximación espacial.

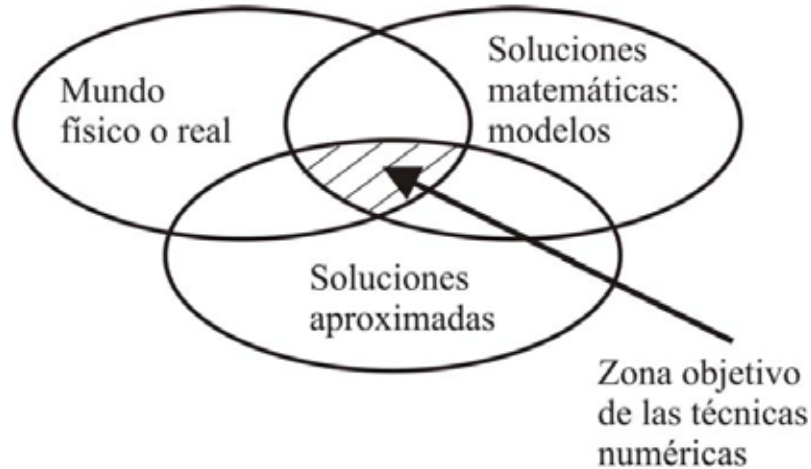
En el caso de tener ecuaciones que dependan de la variable tiempo (flujo no estacionario) es esencial la definición de un nivel de aproximación temporal.

No es posible tampoco estudiar la evolución de las variables en el tiempo de forma continua. El nivel indicará la forma de modelizar la evolución real introduciendo lo que se denomina discretización temporal del sistema de ecuaciones. A partir de la solución calculada se podrá realizar un promediado temporal oportuno para estudiar ciertas características medias de flujo que dependan de la evolución de las variables con el tiempo.

Finalmente, se pueden manipular las ecuaciones eliminando ciertos términos cuya influencia en un determinado problema se considere despreciable. La conclusión de que algún término no afecta a la solución de un determinado flujo se debe alcanzar tras analizar detenidamente la sensibilidad del problema ante valores dispares de dicho término. Normalmente dicho estudio se hace tras dimensionalizar convenientemente las ecuaciones y realizar el correspondiente análisis de semejanza (técnicas asintóticas). Esta cuestión es de importancia capital en la Mecánica de Fluidos y está en el origen de cualquier estudio experimental. Desde el punto de vista numérico, la eliminación de algún término en las ecuaciones introduce lo que se denomina nivel de aproximación dinámico de las ecuaciones consideradas.

Resumiendo, desde el modelo matemático (ecuaciones diferenciales no lineales) que aproxima la realidad física en un medio continuo se llega a un número finito de ecuaciones algebraicas que eliminan algún término de las ecuaciones de partida y que aproximan la evolución temporal real que, tras resolver con técnicas apropiadas, proporcionan una aproximación al valor de las variables incógnita en los puntos elegidos como discretización espacial del dominio de cálculo. En definitiva, se establece un nivel de aproximación numérico límite por debajo del cual será imposible acercarse al valor real de las variables en los puntos elegidos. Sin embargo, desde un punto de vista ingenieril, el proceso descrito es perfectamente válido y ha significado a lo largo de la evolución de las técnicas numéricas, la posibilidad de mejorar diseños y ahorrar mucho esfuerzo que de otra manera supondría trabas insalvables a la

evolución de muchos sectores industriales. En la figura 12 se muestra gráficamente la panorámica explicada en este apartado. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017)



**Figura 12: Técnicas de aproximación numérica en MF**

Fuente: ANSYS CFX-SolverTheory Guide (2017)

### 2.2.17 Método de solución numérica

(J. Anderson, 2002) Existen dos métodos fundamentales para el diseño y el análisis de sistemas en ingeniería relacionados con el flujo de fluidos: uno es la experimentación y otro es el cálculo. La experimentación, es basada mediante la construcción de modelos que son ensayados en instalaciones, mientras el segundo, el cálculo significa la resolución de ecuaciones diferenciales, estas ecuaciones se resuelven por métodos analíticos tradicionales o por métodos alternativos como se aplica a este trabajo, la cual es el método de volumen finito, en ambos métodos se puede hacer el uso de las herramientas computacionales para rapidez de cálculos.

Ambos métodos se complementan entre si, por ejemplo, los ingenieros podrían obtener propiedades globales, como sustentación, fuerza de arrastre, caída de presión o potencia, experimentalmente; pero emplean la CFD para obtener detalles acerca del campo de flujo, como los esfuerzos de corte,

velocidad y perfiles de presión y líneas de corriente. Además, los datos experimentales se emplean con frecuencia para validar soluciones de CFD al comparar cantidades globales determinadas de manera computacional y experimental. La CFD se emplea para reducir la cantidad necesaria de análisis experimental. Actualmente la dinámica de fluidos computacional puede manejar flujos laminares, pero los flujos turbulentos de interés práctico son difíciles de resolver sin tener que recurrir a los modelos de turbulencia. Por desgracia, ningún modelo de turbulencia es universal y una buena solución en CFD de flujo turbulento depende de que tan apropiado sea el modelo de turbulencia aplicado. A pesar de esta limitación, los modelos estándares producen resultados razonables para muchos problemas prácticos de ingeniería. Continuando con lo antes dicho, se tiene que el punto de partida de cualquier método numérico es el modelo matemático, la selección las ecuaciones diferenciales o integrales y las condiciones de borde. Se elige un modelo apropiado para la aplicación (flujos compresibles o incompresibles, turbulentos, de dos o tres dimensiones, etc.). Como ya dijimos, este modelo podría incluir simplificaciones de las leyes de conservación. Un método de solución es designando un modelo para una ecuación en particular seleccionada.

#### **2.2.18 Método de discretización**

Después de seleccionar el modelo matemático, se tiene que elegir un método de discretización apropiado, un método de aproximación de las ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas para las variables en estudio de localizaciones discontinuas en espacio y tiempo. Hay muchos enfoques, pero los más importante son: diferencia finita (FD), volumen finito (FV) y los métodos de elemento finito (FE). Cada método produce la misma solución si el mallado es muy refinado. Sin embargo, algunos métodos son más apropiados para alguna clase de problemas que otros. A menudo la preferencia es determinada por la actitud del desarrollador. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

### **2.2.19 Mallado o discretización numérica**

La generación de la malla donde se definen las celdas que es el punto de partida para el cálculo de las variables de flujo (velocidad y presión, etc.), en todo el dominio computacional. Los modernos paquetes comerciales de CFD vienen con sus propios generadores de malla y también están disponibles programas para generar mallas independientes.

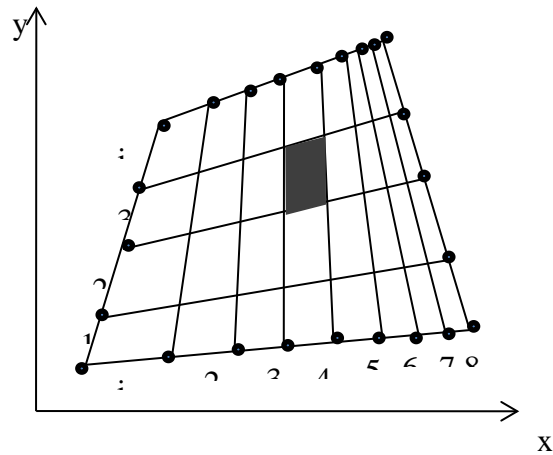
Las ubicaciones discontinuas en las que las variables calculadas son definidas por la discretización numérica que es esencialmente una representación discontinua del dominio geométrico sobre el cual el problema será solucionado. Divide el dominio de solución en un número finito de subdominios (elementos, volúmenes de control, etc.). Algunas de las opciones disponibles son las siguientes:

#### **Mallas regulares estructuradas**

Consta por celdas planas con cuatro lados (2D) o celdas volumétricas con seis caras (3D). Aunque la forma rectangular de las celdas podría estar distorsionada, cada celda se enumera de acuerdo con los índices (i, j, k) que no necesariamente corresponden a las coordenadas “x”, “y” y “z”.

A continuación, en la figura 13 se muestra un ejemplo de malla estructurada bidimensional con nueve nodos y ocho intervalos en el lado superior e inferior, y cinco nodos y cuatro intervalos en los lados derecho e izquierdo. Se muestran los índices i y j. La celda sombreada esta en (i=4, j=3)

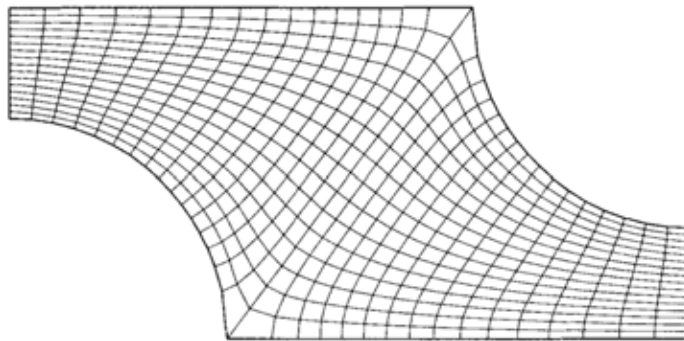
El mallado estructurado o regular está constituido por familias de cuadrículas lineales con la propiedad de que miembros de una familia no cruzan con otras y cada miembro cruza con otra familia sólo una vez. Esto permite que las líneas de una selección en particular sean enumeradas consecutivamente. La posición de cualquier punto de la cuadrícula (o el volumen de control) dentro del dominio es excepcionalmente identificado para la selección de dos o tres dimensiones. Esta es la estructura de cuadrícula más simple, ya que es de manera



lógica equivalente a una cuadrícula cartesiana. Cada punto tiene cuatro vecinos cercanos en dos dimensiones y seis en tres dimensiones; uno de los índices de cada vecino del punto  $p$  ( $i, j, k$ ) es diferente por  $\pm 1$  del índice correspondiente de  $p$ . Un ejemplo de una cuadrícula de 2D estructurada es indicado la figura 14.

**Figura 13: Malla estructurada**

Fuente: ANSYS CFX-SolverTheory Guide (2017)



**Figura 14: Cuadrícula estructurada en 2D**

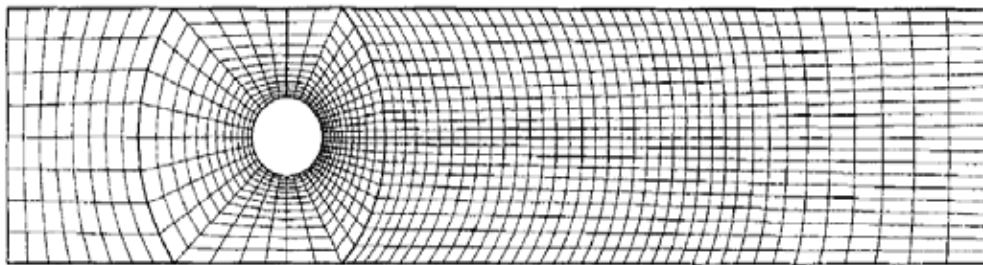
Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

Efectivamente, hay muchos solvers eficientes aplicables solamente a cuadrículas estructuradas. La desventaja de cuadrículas estructuradas es que pueden ser usadas solamente para dominios de solución geométrica simple. Otra desventaja es que podría ser difícil controlar la distribución de los puntos de la cuadrícula: la concentración de puntos en una región para razones de exactitud produce pequeños espacios innecesarios en otras partes del dominio solución y

un desperdicio de recursos. Este problema es exagerado en los casos de 3D. Las celdas largas también podrían afectar la convergencia adversamente.

### **Mallas estructurado en bloque**

En las cuadrículas estructuradas en un bloque, hay dos (o más) niveles de subdivisión del dominio solución. Sobre el nivel rugoso, hay bloques en el que son relativamente grandes los segmentos del dominio; su estructura podría ser irregular y pueden o no ser superpuestos. Sobre el nivel (dentro de cada bloque) es definida una cuadrícula estructurada. El trato especial es necesario en las interfaces. En la figura 15 un mallado estructurado de bloque con combinación en las interfaces, es designado para el cálculo de la circulación del flujo en 2D alrededor de un canal cilíndrico y contiene tres bloques.

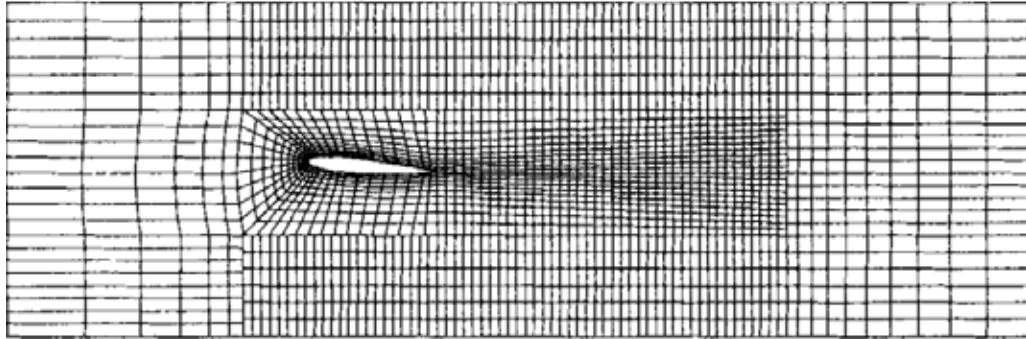


**Figura 15: Mallado estructurado con interfaz ajustada**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

En la figura 16 se presenta un mallado estructurado en bloque sin ajuste en la interface; usado para calcular la circulación alrededor de un hidrodenslizador sumergido (hydrofoil). Consta de cinco bloques de cuadrículas de diferentes tamaños. Esta clase de cuadrícula es más flexible que los previos, cuando admite el uso de cuadrículas más finas en las regiones donde es requerida una gran resolución. El no ajuste en las interfaces puede ser tratado de una manera completamente conservadora. La programación es más difícil que para tipos de cuadrícula descritos antes. El Solver para mallas estructuradas puede ser aplicable como bloque, y los dominios de flujo complicados pueden ser tratados

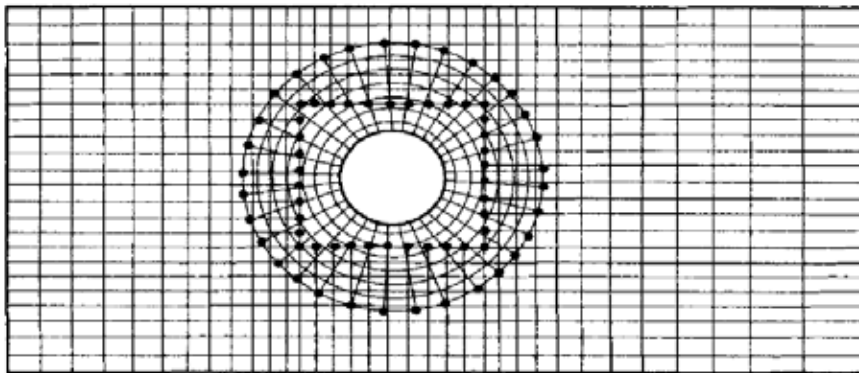
con estas cuadrículas. Es posible la refinación local del modo bloque (la cuadrícula puede ser refinada en algunos bloques).



**Figura 16: Mallado estructurado en bloque 2D sin interfaces ajustadas**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

Las cuadrículas estructuradas con bloques con superposición se muestran en la figura 17. En la región de superposición, las condiciones de bordes para un bloque son obtenidas interpolando la solución del otro bloque (en superposición). La desventaja de estas cuadrículas es que las leyes de conservación no se hacen cumplir fácilmente en los límites del bloque. La ventaja de este enfoque es que los dominios complicados son arreglados con más facilidad y puede ser usado en los siguientes cuerpos móviles: un bloque es fijado al cuerpo y se mueve con él, mientras que una cuadrícula inactiva cubre los entornos. Este tipo de cuadrícula no es usada a menudo, aunque tiene sus partidarios.



**Figura 17: Mallado compuesto en 2D**

### **Cuadrículas (mallado) poco estructuradas**

Consta de celdas de varias formas, comúnmente se emplean triángulos o cuadriláteros (2D) o tetraedros o hexaedros (3D). Se generan dos mallas no estructuradas para el mismo dominio que el de la figura 13, con la misma distribución de intervalo en los lados. A diferencia de la malla estructurada, en la no estructurada, no puede identificarse a las celdas de manera única mediante los índices  $i$  y  $j$ , en cambio, las celdas se numeran internamente de alguna otra manera por el paquete de la CFD.

Para configuraciones geométricas complejas, por lo general, es más fácil para el usuario del paquete de generación de malla crear una no estructurada. Por ejemplo, algunos paquetes de CFD (usualmente antiguos) están escritos de manera específicas para mallas estructuradas, estos convergen con mayor rapidez y con mayor exactitud, por utilizar la identificación celdas por índices como se hace en caso de mallas estructuradas; los modernos paquetes de CFD de aplicación general ya no presentan este problema ya que pueden manejar mallas estructuradas y no estructuradas. Por lo que se generan menos celdas con una malla estructuradas que con una no estructurada.

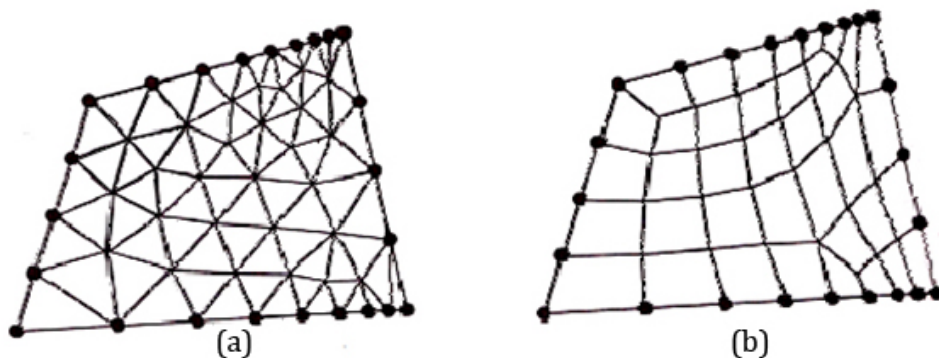
En la figura 9 la malla estructurada de  $8 \times 4 = 32$  celdas, mientras que la malla triangular no estructurada de la figura 14(a) tiene 76 celdas, y la malla cuadrilátera no estructurada de la figura 14(b) tiene 38 celdas, aun cuando se aplica la distribución de nodos en los lados de los tres casos.

A continuación, se presenta un ejemplo de malla no estructurada bidimensional con 9 nodos y 8 intervalos en los lados superior e inferior, y 5 nodos y 4 intervalos en los lados izquierdo y derecho. También la misma distribución de nodos que en la figura 18 (a) malla triangular no estructurada y

18 (b) malla cuadrilátera no estructurada. La celda sombreada en (a) es levemente sesgada.

Útil para configuraciones muy complicadas, es el tipo de cuadrícula más flexible que puede ajustarse al límite de un dominio de solución arbitraria. En principio, tales cuadrículas podían ser usadas con cualquier plan de discretización, pero se adaptan mejor al volumen finito y aproximaciones a elemento finito. Los elementos o los volúmenes de control podrían tener cualquier forma; no hay una restricción sobre el número de elementos vecinos o nodos. En la práctica, las cuadrículas hechas de triángulos o cuadriláteros en 2D, y tetraedros o hexaedros en 3D son usados a menudo. Tales cuadrículas pueden ser generadas automáticamente por los algoritmos existentes. Si se desea, la cuadrícula puede ser hecha de forma ortogonal, el radio de aspecto es fácilmente controlado, y la cuadrícula puede ser refinada fácilmente a nivel local. La ventaja de la flexibilidad es compensada por la desventaja de la irregularidad de la estructura de los datos. Las ubicaciones de los nodos y las conexiones vecinas necesitan ser especificadas explícitamente. Los “Solvers” para los sistemas de ecuaciones algebraicas son generalmente más lentos que para cuadrículas regulares.

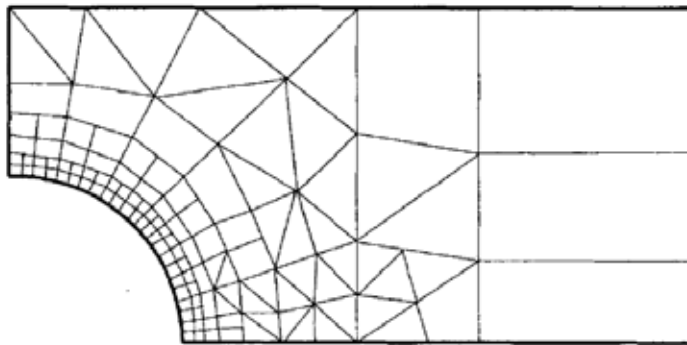
Malla triangular no estructurada.      Malla cuadrilátera no estructurada.



**Figura 18: Malla no estructurada**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

Las mallas poco estructuradas son usadas con métodos de elemento finitos, y cada vez más, con los métodos de volumen finitos. Los códigos de computación para cuadrículas poco estructuradas son más flexibles. No necesitan ser cambiados cuando la cuadrícula es refinada a nivel local, o cuando son usados los elementos o volúmenes de control de formas diferentes. Sin embargo, la generación del mallado y el pre-procesamiento son generalmente más difíciles. Un ejemplo de una cuadrícula poco estructurada, se muestra en la figura 19.



**Figura 19: Ejemplo de mallado no estructurado en 2D**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

En las capas límite, donde las variables de flujo cambian con rapidez en la dirección normal de la pared y requieren de mallas de alta resolución en la cercanía de ésta, las mallas estructuradas permiten una resolución mucho más fina que las no estructuradas para el mismo número de celdas. Las celdas de mallas estructuradas son más delgadas y están muy compactadas cerca del lado derecho a diferencia que las celdas de mallas no estructuradas (ver figura 15)

Se debe enfatizar que sin importar el tipo de malla que se vaya a utilizar (estructurada o no estructurada, cuadrilátera o triangular, etc.), es la calidad de la malla lo que es más imprescindible para soluciones confiables de CFD. En particular, debe tenerse cuidado que cada una de las celdas no esté muy sesgada porque esto puede crear dificultades e inexactitudes en convergencia en la solución numérica. La celda de la figura 20 (a) es una celda con sesgo

moderadamente alto, es la desviación respecto de la simetría. Existen varias clases de sesgo, tanto para celdas de dos como de tres dimensiones, el tipo de sesgo apropiado para celdas bidimensionales es el sesgo equilátero, definido en la ecuación:

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \text{sesgo} \quad (112)$$

Dónde:  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos mínimo y máximo (en grados) entre dos lados cualesquiera de la celda.  $\alpha_0$  es el ángulo entre dos lados de una celda equilátera ideal con el mismo número de lados.

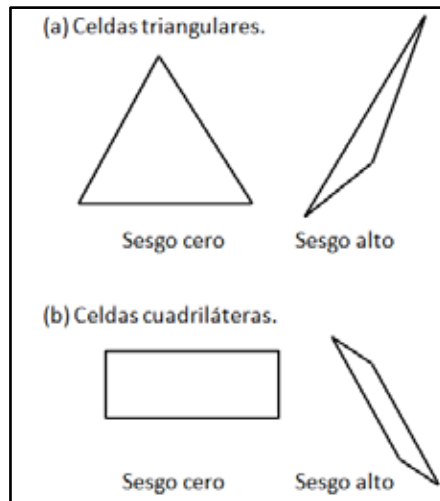
En celdas triangulares el  $\alpha_0 = 60^\circ$  y para celdas cuadriláteras  $\alpha_0 = 90^\circ$ . Se muestra mediante la ecuación 2.66 que  $0 < \text{sesgo} < 1$  para cualquier celda de 2D. Por definición, un triángulo equilátero tiene sesgo cero. De la misma manera, un cuadrado o rectángulo también tienen sesgo cero. Un elemento triangular o cuadrilátero muy distorsionado podría tener un sesgo inaceptable alto (figura 20 (b)). Algunos paquetes de generación de malla emplean esquemas numéricos para emparejar la malla con el fin de reducir el sesgo.

Uno de los factores que afectan la calidad de la malla pueden ser los cambios abruptos en el tamaño de celda, esto conduce al programa de CFD a dificultades numéricas o de convergencia. También, las celdas con una razón de sus dimensiones muy grande a veces pueden causar problemas. Aunque es posible reducir la cantidad de celdas al usar una malla estructurada en vez de una no estructurada, depende de la forma del dominio computacional.

A continuación, se muestra el sesgo (a) para un triángulo equilátero, donde tiene sesgo cero, pero para un triángulo muy distorsionado tiene un sesgo alto. (b) de manera similar se muestra un rectángulo que tiene sesgo cero, pero una cuadrilátera muy distorsionada que tiene sesgo alto.

### **Mallas híbridas**

Una malla híbrida es la que combina regiones o bloques de mallas estructuradas y no estructuradas. Por ejemplo, se puede juntar una malla estructurada cercana a una pared con un bloque de malla no estructurada fuera de la región de influencia de la capa límite. Con frecuencia se emplea una malla híbrida para permitir alta resolución cerca de un pared sin necesitar alta resolución lejos de la pared. Cuando se genera cualquier tipo de malla estructurada, no estructurada e híbrida, debe tenerse cuidado siempre de que cada una de las celdas no esté muy sesgada. (A. Pérez y C. Garre, 2011)



**Figura 20: Sesgo en celdas**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

### 2.2.20 Procedimiento para la solución en CFD

Para resolver de manera numérica las ecuaciones de gobierno del problema a estudiar en este trabajo se tienen los siguientes pasos:

Elegir un dominio computacional y se genera una malla (conocida también como red de nodos); este dominio se divide en muchos elementos pequeños llamados celdas. Para dominios de dos dimensiones (2D), las celdas son áreas, mientras que para dominios tridimensionales (3D) las celdas son volúmenes. Un dominio computacional es la región en el espacio en la cual las ecuaciones de movimiento se resuelven mediante la CFD. Una celda es un subconjunto pequeño del dominio

computacional. Los límites de un dominio bidimensional se denominan lados, y los límites de un dominio tridimensional se llaman caras.

Especificar las condiciones de frontera en cada lado del dominio computacional (flujos 2D) o en cada cara del dominio (flujos 3D).

Seleccionar el tipo de fluido (agua, aceite, gasolina, entre otros), junto con las propiedades del fluido (temperatura, densidad, viscosidad, etc). La mayoría de los paquetes de CFD tienen integrada bases de datos de propiedades de algunos fluidos.

Los valores de la primera aproximación para las variables del campo de flujo se especifican para cada celda. Estas son condiciones iniciales, que podrían ser correctas o no, pero son necesarias como punto de partida, para que la iteración pueda seguir. Al comenzar con los valores de la primera aproximación, las formas discretizadas de las ecuaciones de gobierno se resuelven por iteración, en el centro de cada celda. Si se trasladan todos los términos de la ecuación 2.39 a un lado para obtener cero del otro lado de la ecuación, la solución numérica sería “exacta” cuando al sumar todos estos términos, el residuo, se volviera cero para cada celda del dominio en una solución de CFD, esta suma nunca es cero, pero suele disminuir al hacer las iteraciones. Un residuo se considera como una medida de la desviación de una solución numérica para determinada ecuación de conservación o transporte respecto a la solución exacta, se debe monitorear el residuo promedio relacionado con cada ecuación de conservación o transporte para ayudar a determinar cuando converge la solución. A veces se necesitan cientos, o hasta miles, de iteraciones para que converja la solución a una solución final. Cuando converge la solución, las variables del campo de flujo como la velocidad y la presión se trazan y analizan gráficamente, Los usuarios pueden definir y analizar otras funciones particulares que se forman mediante combinaciones algebraicas de variables de campo de flujo. La mayoría de los paquetes de CFD tienen integrados post- procesadores, diseñados para analizar el

campo de flujo de manera gráfica y rápida, también hay paquetes post-procesadores autónomo. Las propiedades globales del campo de flujo, como la caída de presión, las propiedades integrales, como las fuerzas (de sustentación y de arrastre), los torques que actúan sobre un cuerpo, se calculan a partir de la solución que se obtiene por convergencia. Con la mayoría de los paquetes de CFD esto puede hacerse “sobre la marcha” a medida que proceden las iteraciones, en numerosos casos, de hecho, es aconsejable monitorear estas cantidades junto con los residuos durante el proceso de iteración; cuando converge una solución, las propiedades globales e integrales deben establecerse en valores constantes también. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

#### **2.2.21 Verificación de la geometría**

Para determinar si la convergencia de la solución numérica es fiable, existen algunos criterios computacionales basados en la calidad del mallado que permiten corroborar la veracidad de los resultados.

##### **Verificación de ejes “silver edge checking”**

Realiza una búsqueda de los ejes más pequeños en la geometría, los cuales pueden producir una malla de baja calidad en regiones cercanas a estos; usando como criterio el valor de tolerancia de longitud mínima de un eje,  $1,60 \times 10^{-1} [\text{mm}]$ .

##### **Verificación de caras “silver face checking”**

Es un factor de verificación de geometría que relaciona el perímetro con el área para cada cara. Caras con un factor de “SliverFace” pueden resultar en mallas con una pobre calidad superficial. El Sliver Factor es calculado mediante la siguiente ecuación:

---

$$\text{Sliver Factor} = \frac{\text{Perímetro}^2}{\text{Área}} \quad (\text{Ec. 113})$$

El valor máximo permisible de “Sliver Factor” es 25.

### Verificación de la distorsión “parametrization face checking”

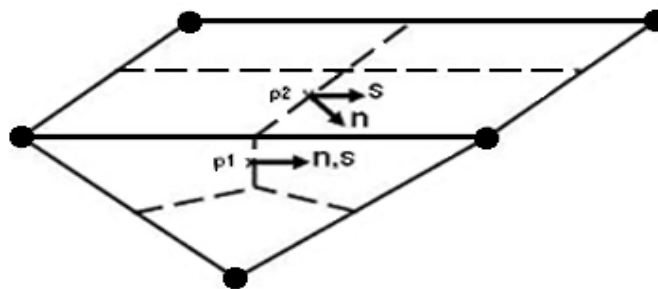
Es un parámetro que mide la distorsión de las caras, la máxima distorsión aceptada normalmente es 10. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

### 2.2.22 Calidad de la malla

Usar una malla con adecuada calidad es una parte importante para controlar los errores de discretización. La calidad de la malla puede ser medida mediante el cálculo de tres valores principalmente como lo son:

#### Ortogonalidad de mallado “mesh orthogonality”

El concepto de malla ortogonal se refiere al ángulo entre caras de elementos adyacentes o el ángulo entre ejes de elementos adyacentes, estén cerca de su ángulo óptimo (por ejemplo,  $90^\circ$  para cuadrilátero y los  $60^\circ$  para elementos de caras triangulares). La medida más relevante de la ortogonalidad de la malla, se ilustra a continuación en la figura 21. Se trata del ángulo entre el vector que une a dos (volumen de control) nodos (s) y el vector normal en cada punto de integración de superficie (n) asociados con el borde. El mínimo ángulo de ortogonalidad aceptable es de  $20^\circ$ . (A. Pérez y C. Garre, 2011)



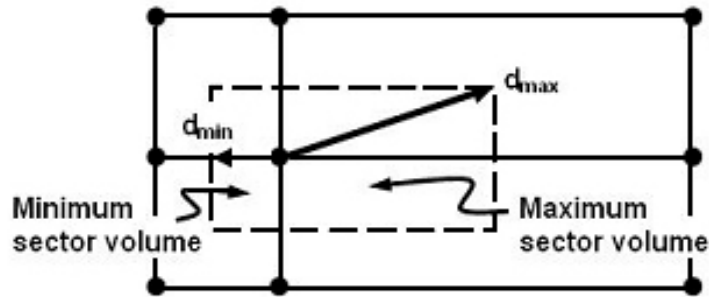
**Figura 21: Ortogonalidad del mallado**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

#### Factor de expansión de la malla “mesh expansion factor”

Este factor se refiere a la mayor tasa de cambio de volumen entre volúmenes de control adyacentes y se calcula de manera aproximada relacionando el radio máximo con el radio mínimo de volúmenes de control

adyacentes. El “Mesh expansión factor” recomendado para las aplicaciones es de 22. Un esquema de este factor se puede observar en la figura 18.

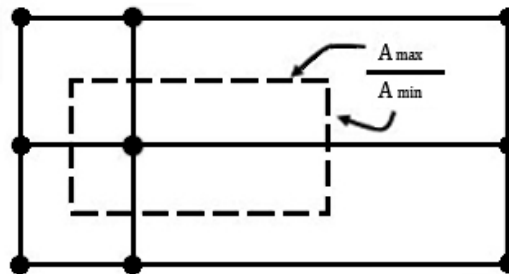


**Figura 22: Factor de expansión de la malla**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

### Aspecto de radio de la malla “mesh aspect ratio”

El concepto de “MeshAspect Radio” estudia los elementos de la malla a medida que estos se van estrechando en mayor medida y envuelve la relación entre la máxima distancia y la mínima área adyacentes a cada nodo a través de todo el dominio. Como se ilustra en la figura 23, un rango aceptable de “MeshAspect Radio” sería  $<100$ .



**Figura 23: Aspecto del radio de la malla "MeshAspect Radio"**

Fuente: A. Pérez y C. Garre (2011)

### 2.2.23 Criterio de convergencia (RMS).

El Residuo llamado “Raíz Cuadrada Media”, RMS por sus siglas en inglés “Root Mean Squar”, consiste en sumar todos los residuos del dominio, determinar la media de los residuos y por último calcular la raíz cuadrada de la media obtenida. Una medida de cuán bien converge la solución puede ser obtenida por el trazado de los residuos para cada ecuación al final de cada

intervalo de tiempo de la simulación (iteración) o “TimeStep”. Para la determinación del valor de RMS razonable para evaluar la convergencia pueden tenerse en cuenta los siguientes lineamientos:

Valores por encima de  $1 \times 10^{-4}$  puedan ser suficientes para obtener una evaluación cualitativa del campo de flujo

$1 \times 10^{-4}$  es una convergencia relativamente precisa, pero puede ser suficiente para muchas aplicaciones de ingeniería

$1 \times 10^{-5}$  representa una buena convergencia y usualmente suficiente para la mayoría de aplicaciones de ingeniería.

$1 \times 10^{-6}$  ó menor representa una convergencia bastante alta y es ocasionalmente requerida para problemas sensibles a la geometría. En muchos casos no es posible obtener este nivel convergencia, particularmente utilizando un programa de solución de ecuaciones de precisión simple. (ANSYS CFX-SolverTheory Guide, 2017).

### **2.3 Definición de términos básicos**

**Caudal:** cantidad de fluido que pasa por segundo por un área determinada.

**Cantidad de movimiento:** es la cantidad de movimiento por unidad de volumen integrada sobre el volumen, donde la cantidad de movimiento por unidad de volumen es la densidad de la partícula material multiplicada por su velocidad.

**Chorro Libre:** es considerado como un flujo fluido que fluye desde un conducto hacia una zona relativamente grande que contiene fluido, el cual tiene una velocidad respecto al chorro que es paralela a la dirección del flujo en el chorro.

**Condición de estancamiento:** estado termodinámico en el cual la sustancia alcanza el reposo de forma adiabática y toda su energía se encuentra en forma de entalpía.

**Entalpía:** es la cantidad de energía que un sistema puede intercambiar con su entorno.

**Entropía:** puede definirse esquemáticamente como el "progreso para la destrucción" o "desorden inherente a un sistema".

**Ecuación de continuidad:** se usa para relacionar la densidad del fluido, el área del fluido y la velocidad de éste en dos secciones del sistema donde existe flujo estable. Es válido para todos los fluidos, ya sean gases o líquidos.

**Estabilidad:** una medida de la capacidad de un sistema de resistir la perturbación. La capacidad de recuperar la posición original tras el cambio.

**Flujo:** el flujo de una cantidad por una superficie. Por ejemplo, el flujo de la energía siempre va desde algún lugar a otro lugar, es decir que la naturaleza del vector es importante.

**Fluido:** se define como una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo de corte, por tanto, en ausencia de este, no habrá deformación. Los fluidos pueden clasificarse de manera general de acuerdo con la relación entre el esfuerzo de corte aplicado y la relación de deformación.

**Flujo compresible:** es aquel en los cuales los cambios de densidad de un punto a otro no son despreciables.

**Flujo ideal:** es aquel flujo incompresible y carente de fricción. La hipótesis de un flujo ideal es de gran utilidad al analizar problemas que tengan grandes gastos de fluido, como en el movimiento de un aeroplano o de un submarino. Un fluido que no presente fricción resulta no viscoso y los procesos en que se tenga en cuenta su escurrimiento son reversibles.

**Flujo permanente:** llamado también flujo estacionario. Este tipo de flujo se caracteriza porque las condiciones de velocidad de escurrimiento en cualquier punto no cambian con el tiempo, o sea que permanecen constantes con el tiempo o bien, si las variaciones en ellas son tan pequeñas con respecto a los valores medios.

**Flujo unidimensional:** es un flujo en el que el vector de velocidad sólo depende de una variable espacial, es decir que se desprecian los cambios de velocidad transversales a la dirección principal del escurrimiento. Dichos flujos se dan en tuberías largas y rectas o entre placas paralelas.

**Flujo uniforme:** este tipo de flujos son poco comunes y ocurren cuando el vector velocidad en todos los puntos del escurrimiento es idéntico tanto en magnitud como en dirección para un instante dado o expresado matemáticamente.

**Gradiente:** el índice de mayor cambio por unidad de longitud de una variable en el espacio a partir de un punto de interés.

**Número de Mach:** es la razón entre la velocidad del objeto y la velocidad del sonido en el medio donde viaja.

**Tobera:** ducto corto con sección transversal variable usado para conducir un flujo compresible con la finalidad de que intercambie energía cinética y energía potencial elástica en términos de su presión absoluta.

## **CAPÍTULO III**

### **MARCO METODOLÓGICO**

#### **3.1 Tipo de investigación**

La investigación puede ser de varios tipos, y en tal sentido se puede clasificar de distintas maneras, sin embargo es común hacerlo en función de su nivel, de acuerdo a esto podemos clasificarlas en: Investigación exploratoria, la cual se efectúa sobre un tema u objeto desconocido o poco estudiado y su resultado constituye una visión aproximada de dicho objeto, Investigación descriptiva, la cual consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo con el fin de establecer su estructura o comportamiento, y la Investigación explicativa que se encarga de buscar el porqué de los hechos mediante el establecimiento de relaciones causa y efecto

Esta investigación será de tipo exploratoria, ya que se caracteriza por explorar el comportamiento del campo de flujo compresible que pasa a través de una tobera convergente – divergente mediante la manipulación de las variables envueltas en el mismo, a través de aproximaciones numéricas, utilizando los adelantos de la Dinámica de Fluidos Computacional o CFD, y comparándolo con resultados de trabajos anteriores.

#### **3.2 Diseño de investigación**

De acuerdo con Hernández (2004), el diseño de investigación constituye el plan general del investigador para conseguir una respuesta clara a sus interrogantes o comprobar una hipótesis de investigación. El diseño de la investigación se encarga de detallar las estrategias básicas que el investigador adopta para conseguir información exacta y que se pueda interpretar. El tipo de investigación es la manera que se va a adoptar para cumplir con los objetivos, existen varios tipos de investigación los cuales pueden ser; Experimental, de Campo o Documental.

En base al objetivo general, se concibe que el nivel de la actual investigación será de tipo documental ya que en este se busca obtener y analizar datos provenientes de materiales impresos u otro tipo de documentos para realizar la simulación y comparación de los fenómenos físicos y el campo de flujo presentes que integran el campo de flujo a través del dominio fluidizado de una tobera convergente – divergente, en este caso con ayuda de una herramienta computacional CFD. Por lo tanto, el estudio se encuentra alineado en este nivel documental.

Según Zorrilla (1993), la investigación documental es aquella que se realiza a través de la consulta de documentos (libros, revistas, periódicos, memorias, anuarios, registros, códigos, constituciones, etc.).

### **3.3 Nivel de la investigación**

El nivel de conocimiento es descriptivo, y éste consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. Hernández (2004), señala que la investigación descriptiva busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice. Teniendo como objetivo indagar la incidencia y los valores en que se manifiestan una o más variables al ubicar, categorizar y proporcionar la visión de una comunidad, un evento, un contexto, un fenómeno o situación.

En este orden de ideas, la investigación se basa en describir el comportamiento del campo de flujo, incluyendo la relación de presiones que garantice la aparición de ondas de choque normal en la parte divergente de la tobera, mediante la aplicación de la Dinámica de Fluidos Computacional o CFD, en una situación rigurosamente controlada y de esta manera fijar los parámetros por los cuales se regirá la investigación.

### **3.4 Población y muestra**

La población Hurtado y Toro (2001), la definen como: “es la composición de todos los elementos a ser estudiados y a quienes podrán ser generalizados los resultados de la investigación, una vez concluida ésta, para lo que es necesario que la muestra con la cual se trabaje sea representativa de la población”. Por ende, la

población será las diferentes curvas características y gráficas experimentales que muestran los fabricantes. La muestra a emplear en este proyecto es una muestra del tipo no probabilística, donde Véliz, y Arredondo determinan en su trabajo de grado titulado Aspectos Teóricos sobre tipos de Muestreo, que este tipo de muestra es: “aquel tipo de muestra para el cual no puede no puede calcularse la probabilidad de extracción de una determinada muestra (p. 30)”.

Por lo tanto, la muestra seleccionada son: los diferentes puntos o nodos que se generen por la discretización del dominio fluidizado y en los cuales se evaluarán las características del fluido.

### **3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos**

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (1998) se define a la técnica de recolección de datos como “las observaciones que consisten en el registro sistemático, cálido y confiable de comportamientos o conductas”. Las técnicas para la recolección de datos son básicamente: revisiones bibliográficas, entrevistas, registros de prensa, observaciones directas, entre otras. Existen diversos instrumentos para la recolección de estos datos los cuales son: computadores, lápiz, hojas, grabadoras, fotografías, entre otras.

Las técnicas a utilizar en el presente trabajo serán:

Localización y consolidación de los datos.

Revisión documental: Esta técnica se realizará con el fin de profundizar la información recopilada con todas las aplicadas anteriormente, esta comprende la búsqueda de la información de documentos empresariales, que contribuyan al conocimiento del comportamiento de sucesos realizados que sirvan de apoyo para el desarrollo de teorías pertinentes para la resolución de problemas. (Candelo, 2006).

Y por último, en el presente trabajo se contará con la utilidad de computadoras para conseguir los resultados obtenidos por la simulación que describen el

comportamiento del campo de flujo, con los cuales se procede a comparar con valores experimentales realizados anteriormente y/o formular hipótesis en base a los principios de conservación para lograr la validación de los mismos.

### **3.6 Fases metodológicas**

Se describirán de manera individual, las respectivas acciones, procedimientos, técnicas y actividades a realizar, para dar cumplimiento a cada uno de los objetivos específicos planteados.

#### **Fase I: “Busqueda de información acerca de la variables que inervienen en el comportamiento del campo de flujo a través de una tobera convergente – divergente”**

A través de los diferentes antecedentes seleccionados y apoyados por material bibliográfico técnico sobre dinámica de gases y flujo compresible, se identificarán las variables que permiten la explicación fenomenológica del paso del flujo de aire por una tobera convergente – divergente, involucrando todas las condiciones de flujo que puedan presentarse.

#### **Fase II: “Selección de una tobera real e identificación de sus características geométricas con la finalidad de modelarla mediante una herramienta CAD”**

Luego de una exhaustiva investigación y documentación en base a varios artículos científicos y estudios sobre el campo de flujo compresible a través de una tobera convergente – divergente, se seleccionará una que será el modelo a validar. Se determinan los parámetros dimensionales y condiciones de flujo para la aplicación de la investigación y los estudios, a fin de manejarlos como data necesaria para realizar los objetivos del proyecto de investigación. Luego se modelará mediante una herramienta de dibujo asistido por computadora CAD por sus siglas en inglés.

#### **Fase III: “Elección del modelo matemático adecuado para el estudio de ondas de choque normal en la sección divergente de la tobera”**

Una vez realizada la revisión bibliográfica satisfactoria, se determinan los modelos matemáticos más apropiados para la realización de la simulación numérica basándose en la interpretación de la investigación bibliográfica y de ser necesario la

comparación de los resultados obtenidos en la simulación de modelos similares al seleccionado en esta investigación. La idea es establecer las condiciones para que aparezcan ondas de choque normal en la parte divergente de la tobera y chequear cual es el rango de contrapresiones que permiten la aparición de dichas irreversibilidades.

**Fase IV: “Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional y obtener los resultados en forma de datos para su posterior comparación con los valores proporcionados por el fabricante”**

La simulación del campo de flujo se realiza a través de la configuración del software ANSYS® Workbench CFX®, es decir, una herramienta que aplica CFD (computational fluid dynamics) para ejecutar algoritmos computacionales seleccionados para la solución de los modelos matemáticos, estableciendo también los criterios de convergencia que tendrá a la hora de realizar los cálculos, donde se especifica el número máximo de iteraciones o pasos a realizar para el cálculo, así como el valor objetivo del criterio de convergencia ya sea residual o máximo. El cálculo se detendrá al cumplirse cualquiera de estas dos condiciones y así poder generar la data, gráficos y/o diagramas para la descripción de las variables involucradas.

## **CAPÍTULO IV**

### **RESULTADOS**

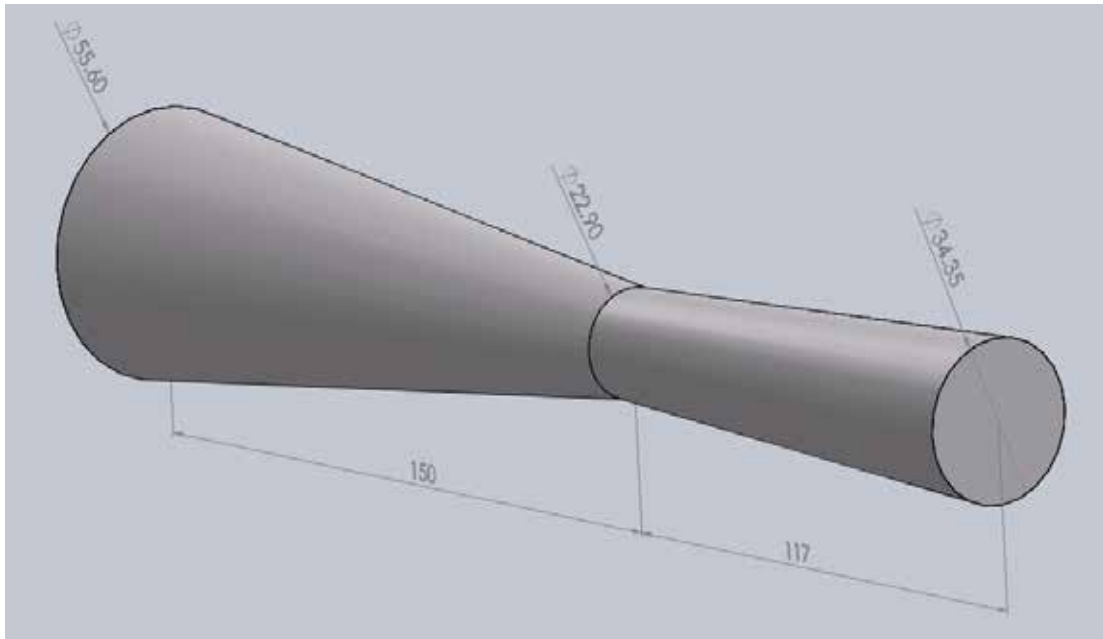
#### **4.1 Búsqueda de información acerca de las variables que intervienen en el comportamiento del campo de flujo a través de una tobera convergente – divergente.**

A pesar de que existen muchos trabajos sobre la descripción del flujo en toberas convergentes y toberas convergentes-divergentes, no existen tantos donde se visualicen los diferentes patrones del flujo cuando se presenta una onda de choque normal en la zona divergente, sin embargo se hizo una investigación a través del portal sciencedirect.com y se logró obtener algunos papers con suficiente información para guiar ésta investigación. Otros por su parte dieron apoyo en el área de la dinámica de fluidos computacional y el uso de técnicas de aproximación numérica para obtener los resultados deseados.

#### **4.2 Selección de una tobera real e identificación de sus características geométricas con la finalidad de modelarla mediante una herramienta CAD.**

Se selecciona una tobera convergente – divergente considerando como premisa que es un modelo real o a escala de las toberas usadas en aplicaciones específicas de propulsión para la aviación comercial o militar. El flujo se va a considerar adiabático y sin fricción para expansiones supersónicas, de tal manera que este experimente ondas de choque en la sección divergente y pueda apreciarse el comportamiento del campo de flujo, así como los fenómenos que ocurren dentro de la tobera por efecto de las ondas de choque. El diseño de la geometría de la misma se realizará mediante la ayuda de un programa CAD y su posterior procesamiento en el programa de dinámica de fluidos computacional. La geometría de la tobera convergente – divergente a estudiar se realizará mediante el uso del programa de diseño SolidWorks™, el cual es el más indicado para el dibujo de la tobera ya que permite un modelo sencillo y eficaz de la geometría de la misma (áreas de entrada y salida, ángulos

de convergencia y divergencia). En la figura 24 se observa el resultado luego de dibujar la tobera. Las dimensiones observadas en la misma son tomadas a partir de un modelo utilizado en el estudio realizado por E. Ekanayake et al., (2010), la cual tiene una relación de área de 1,5.



**Figura 24: Dimensionamiento de la tobera convergente – divergente**

Fuente: Prieto (2018)

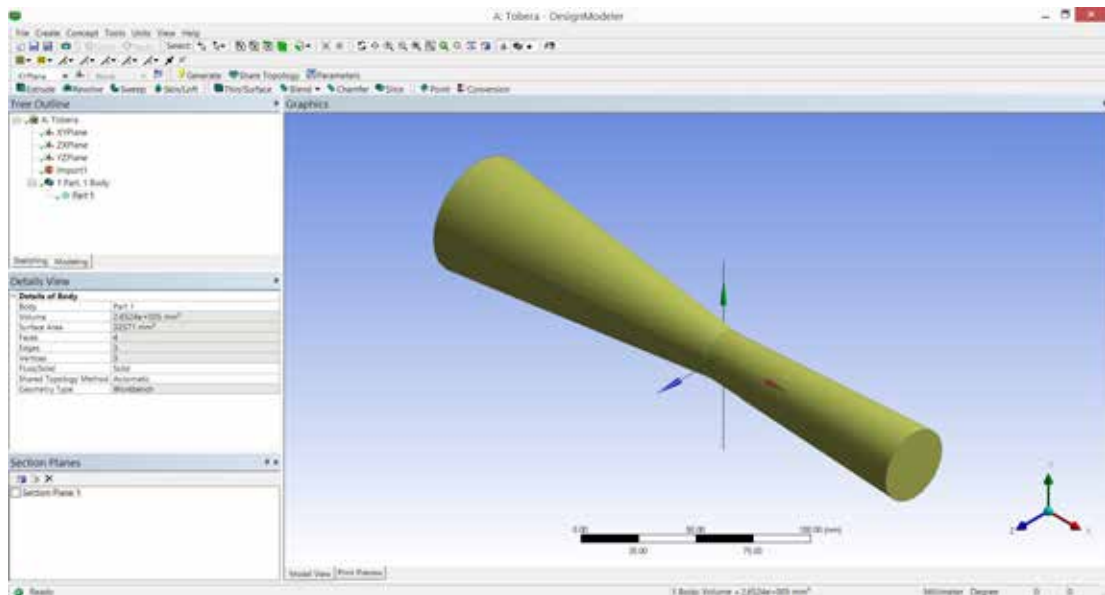
#### **4.3 Elección del modelo matemático adecuado para el estudio de ondas de choque normal en la sección divergente de la tobera**

Basándose en la interpretación de la investigación bibliográfica y las guías prácticas para los usuarios de ANSYS® Workbench, los modelos matemáticos más apropiados para la realización de la simulación numérica son las ecuaciones RANS (Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds), las relaciones de Rankine-Hugoniot y el modelo de turbulencia kappa-epsilon. La idea es establecer las condiciones para que aparezcan ondas de choque normal en la parte divergente de la tobera y chequear cual es el rango de contrapresiones que permiten la aparición de dichas irreversibilidades.

**4.4 Simulación del campo de flujo mediante una herramienta de dinámica de fluidos computacional y obtener los resultados en forma de datos para su posterior comparación con los valores proporcionados por el fabricante.**

#### **4.4.1 Establecimiento de la geometría y mallado**

Luego de la obtención de la geometría mediante el programa CAD, se importa al programa CFD como se muestra en la figura 25, para luego proceder a la verificación de los criterios necesarios para el correcto funcionamiento del diseño y de la simulación en cuestión.



**Figura 15: Importación del diseño CAD al software CFD**

Fuente: Prieto (2018)

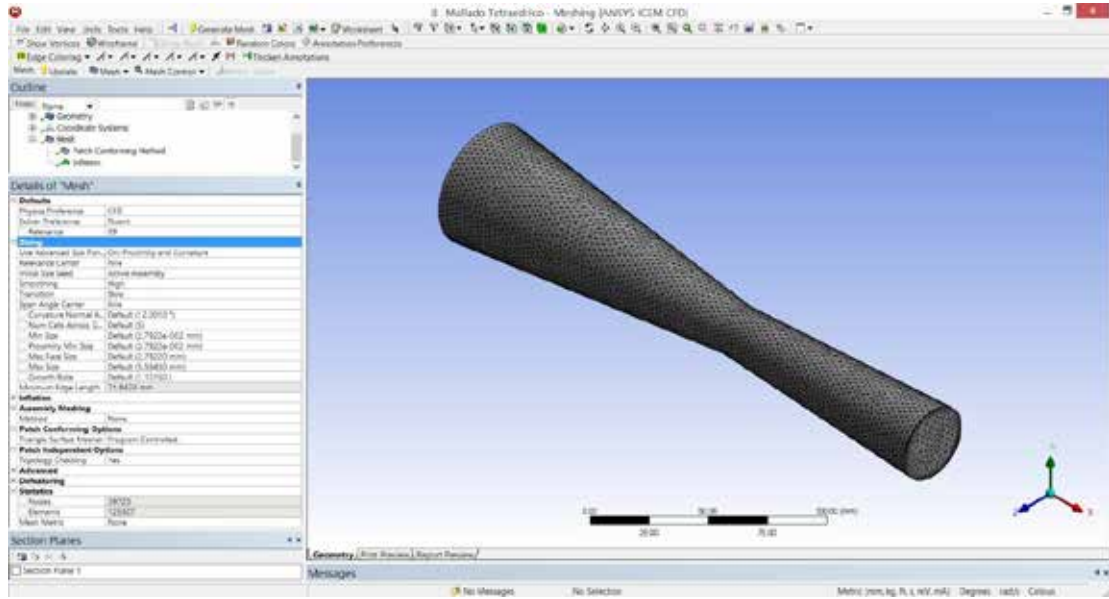
Ahora, se procede a la configuración del mallado para realizar la discretización del dominio. El programa de acuerdo a la aplicación a estudiar, propone lo que sería un mallado “ideal” como punto de partida, al que se le realizaran cambios de acuerdo a la profundidad en el estudio. Este mallado ideal consiste en una mezcla de diferentes geometrías en los elementos constitutivos de la malla, así como un tamaño estándar para dichos elementos. La primera fase del mallado consiste en la selección de las superficies de entrada y salida de la tobera, así como de lo que sería la pared de la misma. Luego de esto, se procede a la generación del mallado “ideal”.

A partir de este mallado, se modifican diversos factores que, de acuerdo al manual del programa, son necesarios para obtener un mallado más refinado y así los resultados de la simulación sean más precisos. Estos factores van desde el tamaño del elemento de la malla, hasta la calidad de los mismos. Un elevado número de elementos permite una simulación efectiva y que arroje resultados precisos. Por ello, se selecciona una intensidad o relevancia del mallado alta (99) debido a que, de este modo, se genera el número de elementos necesarios para una simulación correcta y precisa. Se usa la configuración de función avanzada de tamaño en las proximidades y curvaturas para capturar con precisión la geometría mientras se mantiene una tasa de crecimiento suave entre estas regiones.

En cuanto a los parámetros de tamaño de elemento de la malla, estos se configuran de tal manera que se pueda aumentar la calidad del mallado. A esta configuración se le inserta un Método de Mallado Tetraédrico, que generalmente proporciona una solución más automática con la posibilidad de añadir controles de malla para mejorar la precisión en regiones críticas. Al contrario de una malla de hexaedros que generalmente proporciona una solución más precisa, pero es más difícil de generar. También se inserta a esta configuración una  en la superficie de la geometría, exceptuando las fronteras de entrada y salida del flujo con el fin de delimitar la capa límite de la geometría donde los efectos viscosos son significativos. Ahora se procede a la realización del mallado con el módulo Mesh del ANSYS® CFX Mesh y puede observarse en la figura 26 que la generación del mallado con la configuración anterior, resulta en un mallado con 125307 elementos y 39725 nodos.

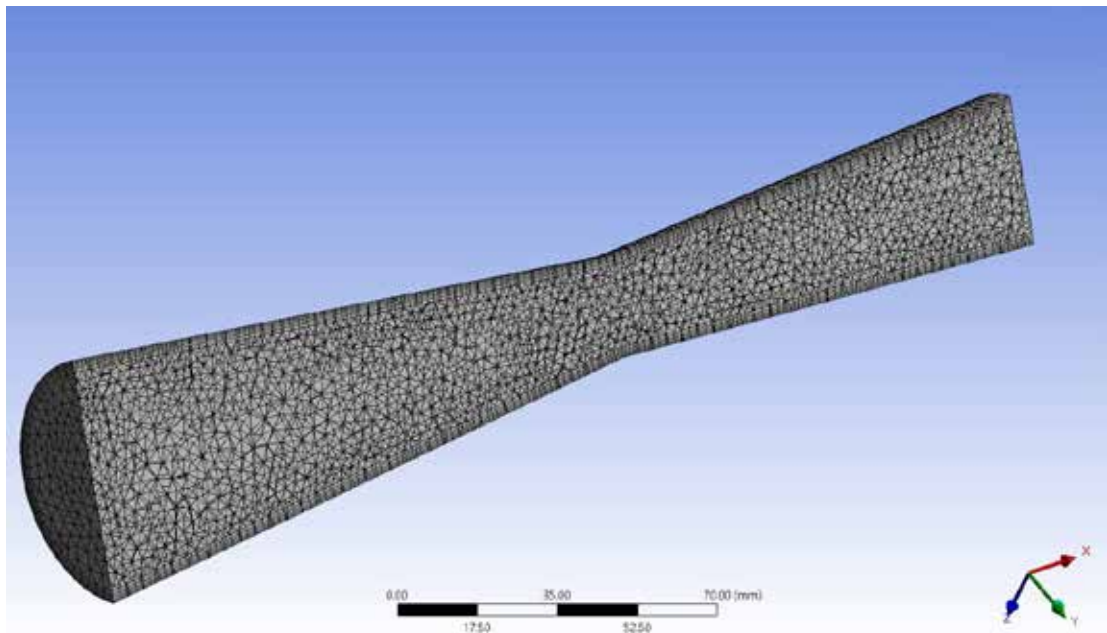
Al realizar un corte longitudinal sobre la geometría luego de la generación del mallado, como se muestra en la figura 27, se observa la distribución de elementos en esta, destacando la tendencia a generar elementos más finos en las proximidades de la capa límite definida debido a la  en las paredes, así como la exclusiva presencia de elementos tetraédricos, los cuales permiten no solo una más fácil resolución de las ecuaciones de conservación y modelos de turbulencia, sino que

también permiten una correcta predicción del comportamiento de las variables a ser estudiadas para este tipo de estudios.



**Figura 26: Configuración del mallado**

Fuente: Prieto (2018)



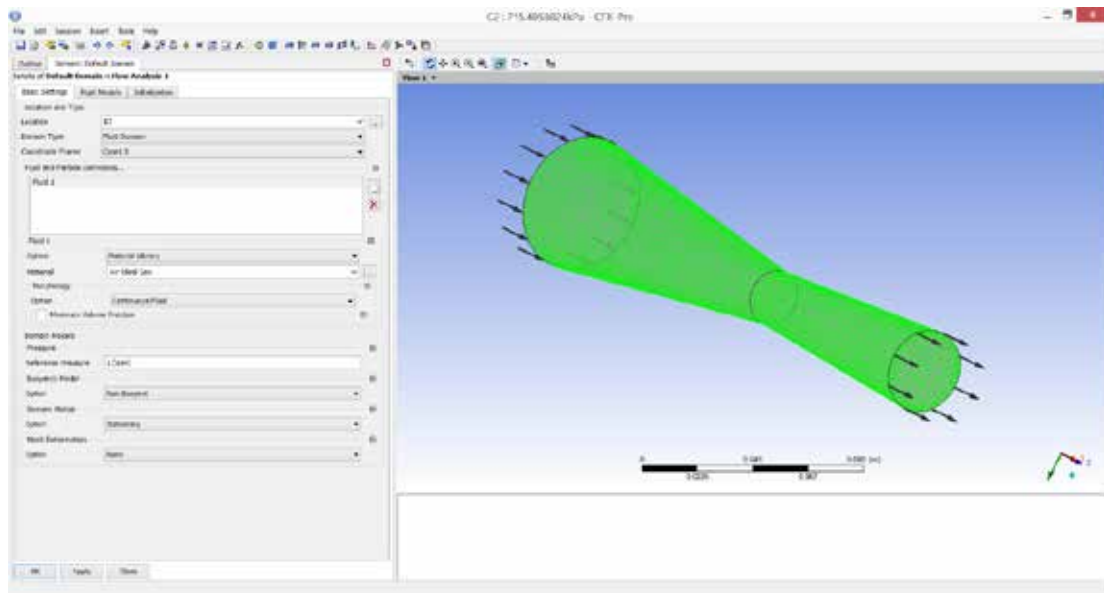
**Figura 37: Corte longitudinal de la geometría**

Fuente: Prieto (2018)

#### 4.4.2 Configuración del dominio

En esta fase, se definen las áreas principales de la tobera (entrada, salida, garganta), así como los límites que debe tener el paso de flujo. Esto se realiza mediante la herramienta CFX – Pre del programa. La configuración de las condiciones de borde de entrada y de salida de la tobera se establecerá para que ocurran ondas de choque en la sección divergente de esta. En la figura 28, se muestran los ajustes básicos al dominio predeterminado, donde se definen importantes parámetros como lo son el tipo de dominio, cuál será el fluido a manejar, morfología, presión de referencia, entre otros.

Luego, se puede apreciar en la figura 28 la configuración de los Modelos de Fluido, donde se configuran los modelos de transferencia de calor y turbulencia. Para lo cual se seleccionó el modelo para definir la transferencia de calor, ya que este proporciona un modelo del transporte de entalpía e incluye los efectos de energía cinética. Este se debe utilizar para gases cuando el número de Mach es superior a 0,2, donde los efectos de energía cinética se vuelven significativos.



**Figura 48: Configuración del dominio**

Fuente: Prieto (2018)

Asimismo, el modelo de turbulencia seleccionado para esta configuración, será el modelo  $k - \epsilon$  este estudio, como se podrá apreciar en el desarrollo de la investigación. Se define el régimen de flujo, dos parámetros para la solución de las ecuaciones de masa y momento (presión en la entrada de 794,4 kPa y velocidad en la entrada en 44,1949 m/s ), condiciones de turbulencia en 5% y la temperatura en 499 K como parámetro de solución de las ecuaciones de transferencia de calor.

Análogamente, se define el área a la salida de la tobera, ubicando la sección correspondiente y se define un régimen de flujo subsónico, condicionando de esta manera la generación de ondas de choque en la sección divergente, lo cual se cumplirá siempre y cuando se logre la convergencia de la simulación. Para ello y según cálculos previos el flujo debe descargar a una presión de 715,4058824 kPa.

Las áreas que conformarán la pared de la tobera se configuran bajo una condición de no deslizamiento, con la finalidad de condicionar al fluido a que tenga una velocidad nula relativa a la frontera de la pared, así como que esta sea lisa y adiabática, que son condiciones fundamentales en la obtención de las ecuaciones de las ondas de choque normal en una tobera convergente – divergente según el modelo de Rankine–Hugoniot.

#### **4.4.3 Configuración de la herramienta de cálculo**

La configuración de la herramienta de solución de ecuaciones o “Solver”, es en donde se establecen todos los criterios correspondientes a la convergencia de la simulación, y los que tendrá en cuenta el programa a la hora de realizar los cálculos. Para esto se ingresa en el panel de control del Pre – CFX. En la figura 29 se muestran las especificaciones del número de iteraciones máximas a realizar, así como el valor mínimo residual o RMS. La simulación entonces convergerá al momento de cumplirse primero cualquiera de las dos premisas mencionadas anteriormente. Después de realizar esta configuración, se tienen todas las condiciones para llevar a cabo una simulación para los parámetros previamente definidos, tal como se puede



#### **4.4.4 Obtención de los resultados**

Los datos obtenidos se agrupan en forma de gráficos, los cuales representan el comportamiento de las curvas de conservación de masa y momento, así como los modelos de turbulencia y energía, presentados, principalmente, por diagramas bidimensionales de contornos y curvas de posición a partir de líneas de corriente para cada uno de los parámetros o variables que definen los estados o condiciones en los que se realizó el estudio para un plano medio de la geometría de la tobera, tal como sigue:

Curvas del número de Mach del fluido en la dirección del flujo.

Curvas de la velocidad del fluido en la dirección del flujo.

Curvas de la temperatura del fluido en la dirección del flujo.

Curvas de la presión del fluido en la dirección del flujo.

Diagramas

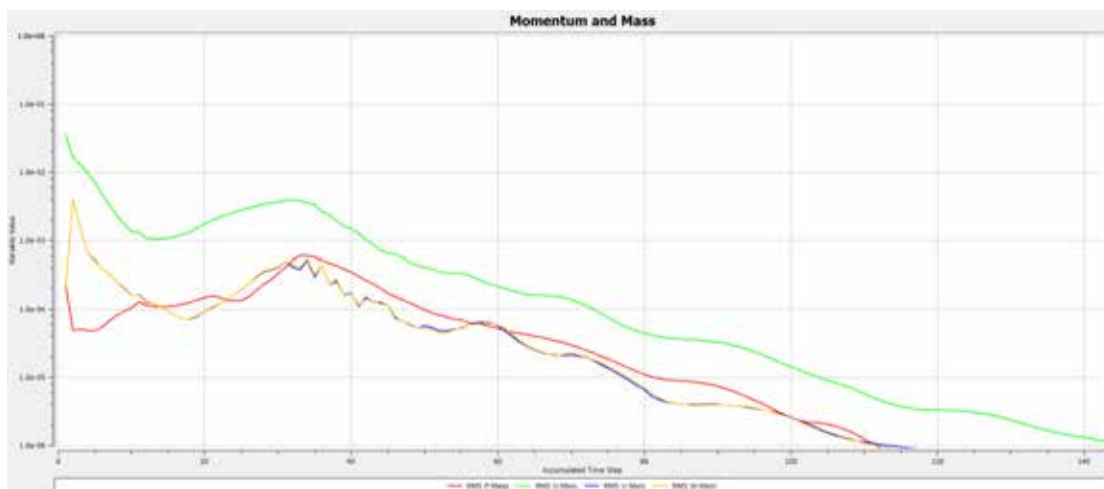
#### **4.4.5 Convergencia de las simulaciones**

Mediante el uso de un procesador de ecuaciones incluido en el software ANSYS® CFX, se procede a la resolución de las ecuaciones. Se fija un valor de RMS de 0,0000015 ( $1,5 \times 10^{-6}$ ) como criterio de convergencia, el cual es un valor que proporciona una alta precisión en los resultados de una simulación y es extremadamente conservador para las recomendaciones del fabricante del software de CFD; mientras que se selecciona un número máximo de 1000 iteraciones, esto con la finalidad de buscar que el objetivo residual sea el criterio principal de convergencia.

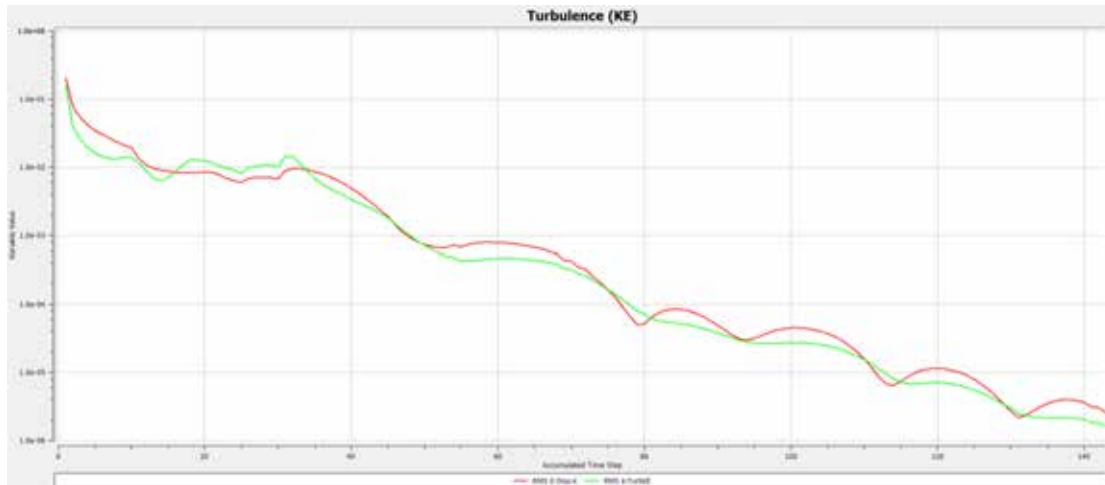
La finalidad del análisis CFD es resolver ecuaciones de conservación (conservación de la masa, cantidad de movimiento, energía, etc.), por lo que debemos asegurarnos de que la solución final en efecto, conserva estas cantidades. Por lo tanto, el análisis de las curvas de conservación para todos los estados de la simulación es vital para asegurar una correcta simulación y de esta manera, evitar la violación de los principios de conservación postulados por las leyes termodinámicas.

Se presenta el resultado de la simulación referido al comportamiento de las curvas de convergencia tanto para las leyes de conservación de masa y momento, así como las ecuaciones de turbulencia para los casos en los que el flujo a través de una tobera convergente – divergente presenta ondas de choque desde la garganta hasta la salida, condición dada por la variación de contrapresión comprendida por los valores: [715.4058824; 500; 400; 300; 72.5] kPa. Además, se presenta gráficamente el porcentaje de imbalance global para las ecuaciones de masa, momento y energía.

En la figura 31, se puede apreciar que la convergencia de las ecuaciones de transporte fue lograda, anticipadamente respecto a las ecuaciones de turbulencia mostradas en la figura 32. Asimismo, puede observarse que en la figura 33, el porcentaje de imbalance global para todas las ecuaciones de transporte y energía tiende a cero a partir de 76 iteraciones, por lo tanto, se puede afirmar que la conservación también fue lograda. Este análisis es análogo para todos los estados de estudio, debido a que la simulación se comporta de manera similar, obteniendo curvas de convergencia con resultados equivalentes.

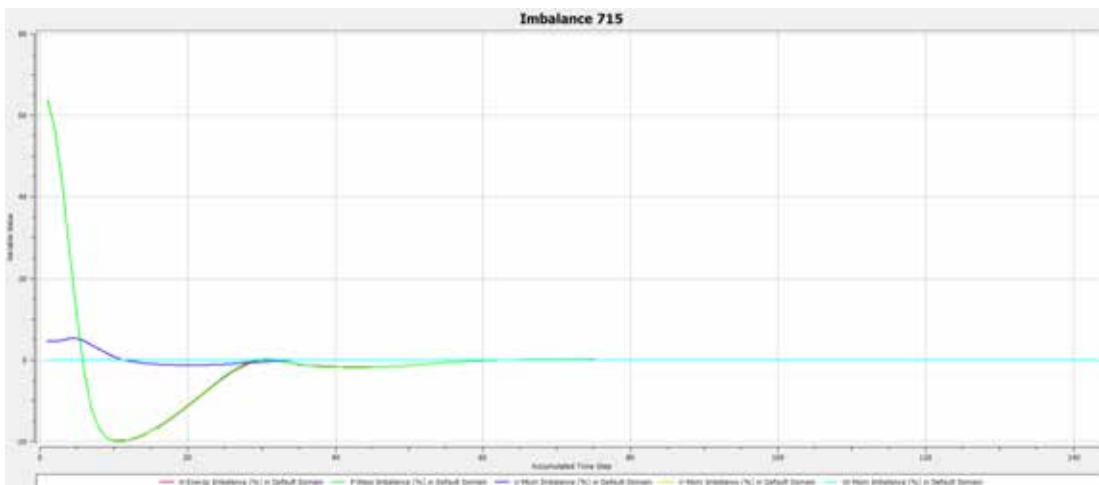


**Figura 31: Convergencia de las ecuaciones Masa y Momento para  $p = 400$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)



**Figura 32: Convergencia de las ecuaciones del modelo de Turbulencia k – para = 400 kPa**

Fuente: Prieto (2018)



**Figura 33: Convergencia de los Imbalances de las ecuaciones para = 400 kPa**

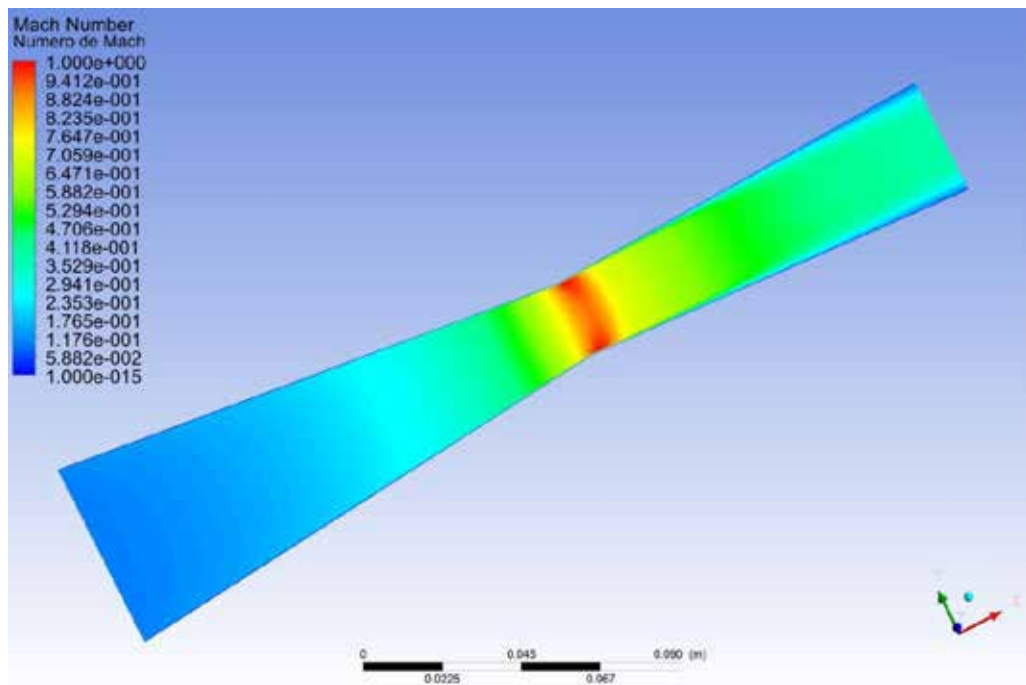
Fuente: Prieto (2018)

#### 4.5 Validación de los resultados con antecedentes o formulación de las hipótesis en base a una interpretación fenomenológica sin violar las leyes físicas

##### 4.5.1 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de = 715,40594 kPa

En las siguientes figuras se observa el comportamiento del flujo de aire cuando pasa a través de una tobera convergente – divergente con una contrapresión de 715,406 kPa. Condición que produce una onda de choque justo en la garganta de la tobera. En la figura 34 se observa a través de un diagrama de contorno el

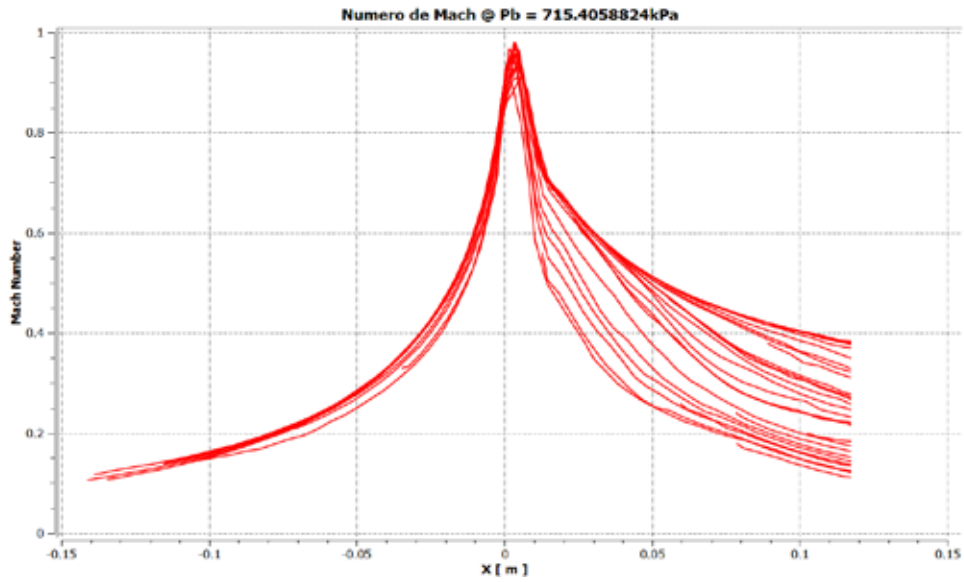
comportamiento del número de Mach cuando la contrapresión es de  $p_2 = 715.4059$  kPa. El número de Mach va en aumento en la sección convergente hasta la garganta donde producto de la onda de choque incidente, el flujo sufre una abrupta desaceleración. Aguas abajo de la onda de choque, se aprecia un desprendimiento de la capa límite y una compresión del flujo.



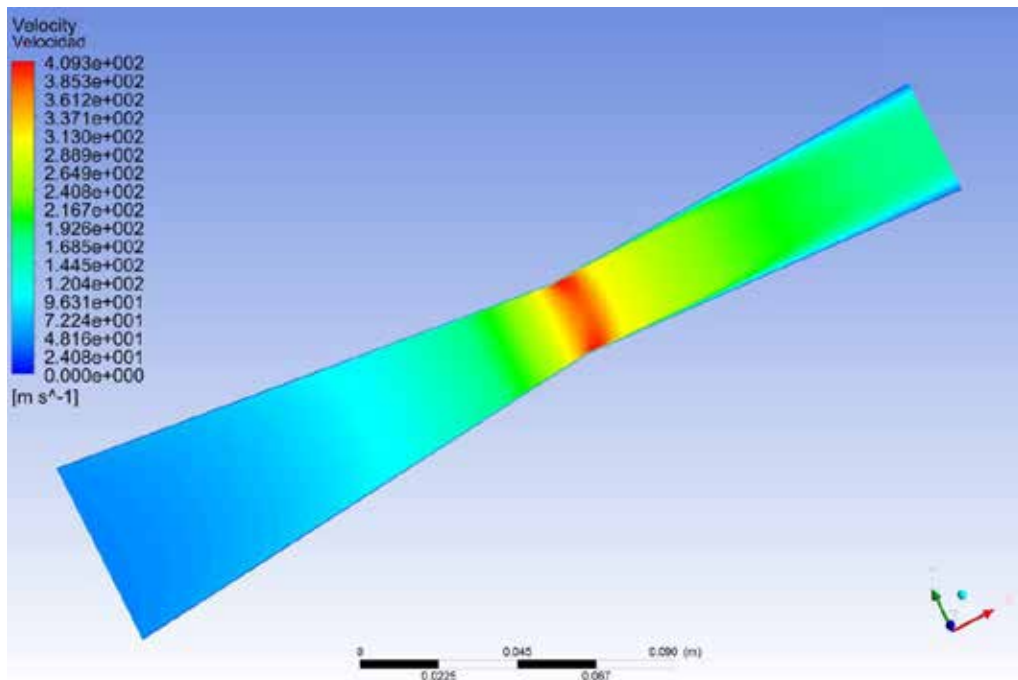
**Figura 34: Distribución del Número de Mach para  $p_2 = 715.4058824$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)

En la figura 35, se representa el comportamiento del número de Mach en función de la longitud de la tobera, donde el origen del eje de las abscisas del sistema coordenado se encuentra en la sección de la garganta (menor área transversal), donde el número de Mach alcanza el régimen sónico ( $M = 1$ ). En la sección divergente se puede observar que el comportamiento del flujo es más uniforme que aguas abajo de la onda de choque incidente, lo cual se debe a las irreversibilidades producto de la onda que producen turbulencias en la zona divergente y por directa proporcionalidad

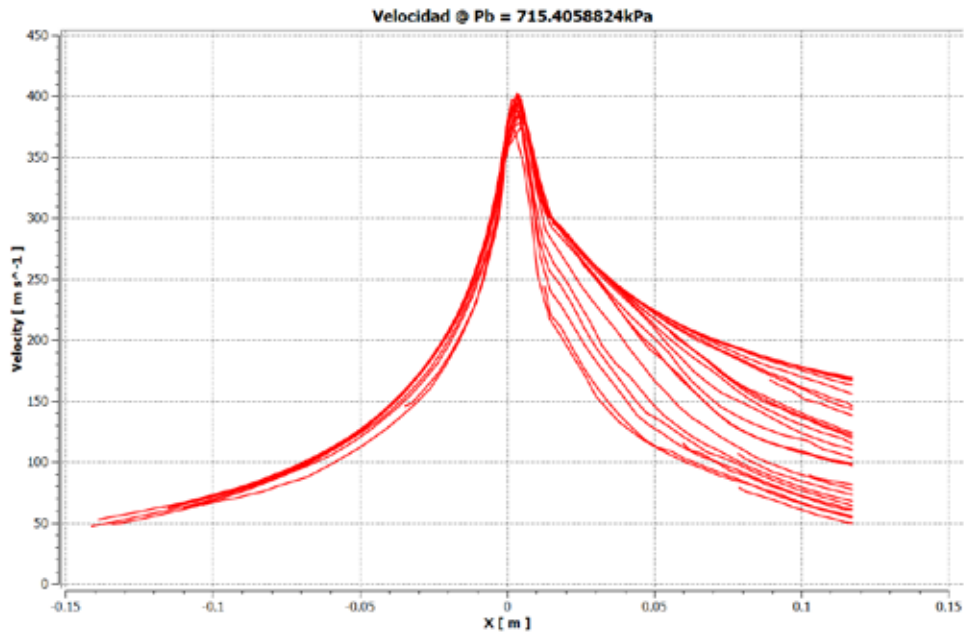
de las variables, el comportamiento de la velocidades similar al de número de Mach, apreciable en las figuras 36 y 37.



**Figura 35: Número de Mach vs Posición para  $P_b = 715.4058824$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)



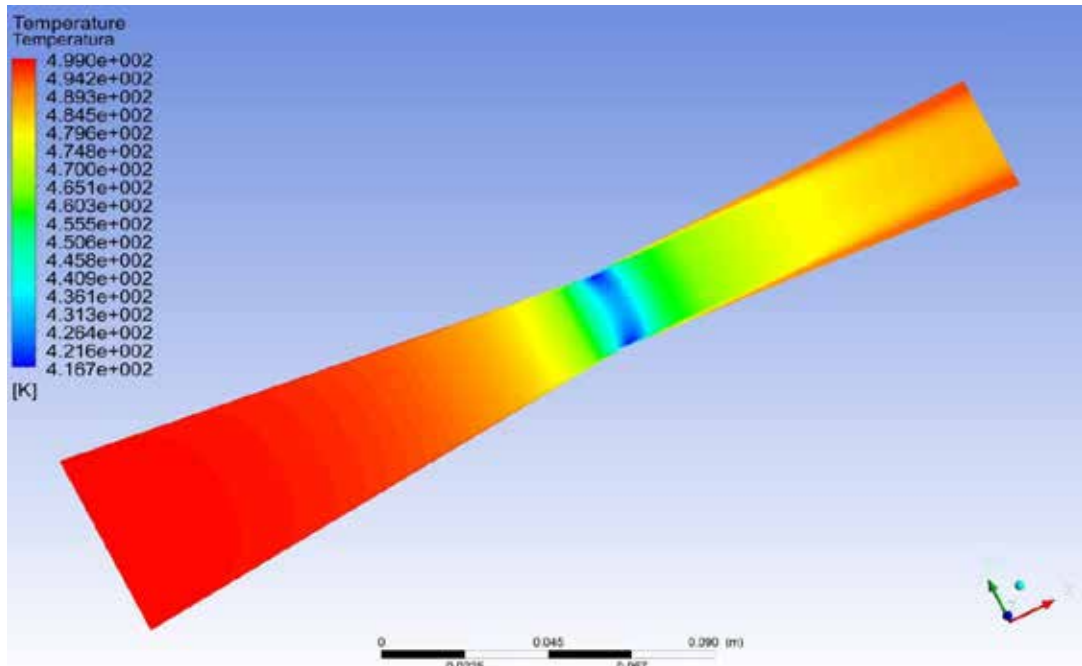
**Figura 36: Distribución de la velocidad para  $P_b = 715.4058824$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)



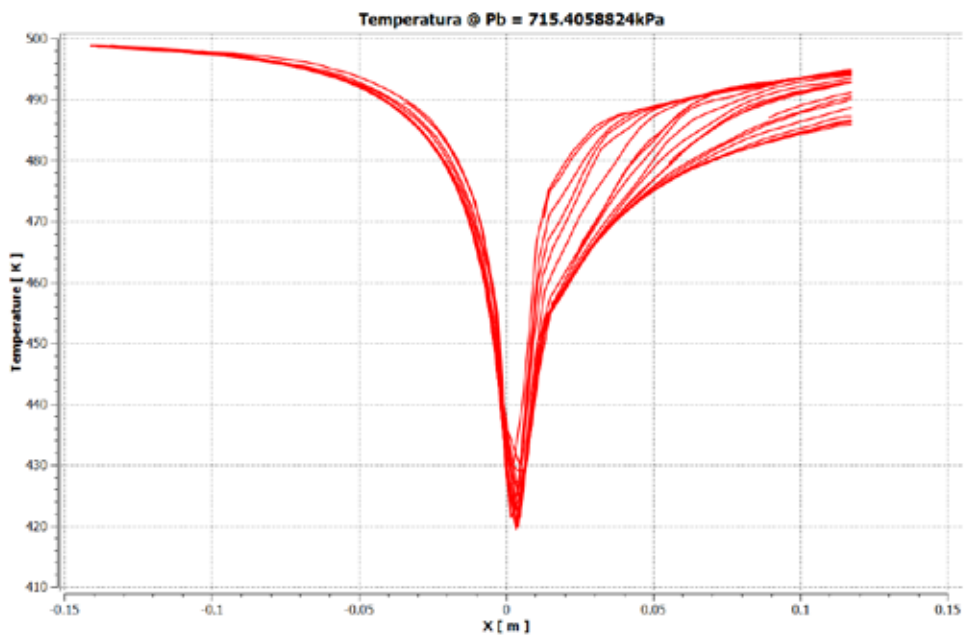
**Figura 37: Velocidad vs Posición para  $P_b = 715.4058824$  kPa**  
 Fuente: Prieto (2018)

Como resultado de la simulación, también se determinó la distribución de la temperatura a lo largo de la tobera, mostradas en las figuras 38 y 39 donde la temperatura va disminuyendo hasta que llega a la sección de menor área transversal, donde ocurre un cambio abrupto, aumentado su temperatura para adaptarse a la perturbación producto de la onda. Se observa además cómo la temperatura es elevada en zonas próximas a la pared de la tobera aguas abajo de la onda de choque, donde la interacción de esta con el flujo reduce su energía cinética.

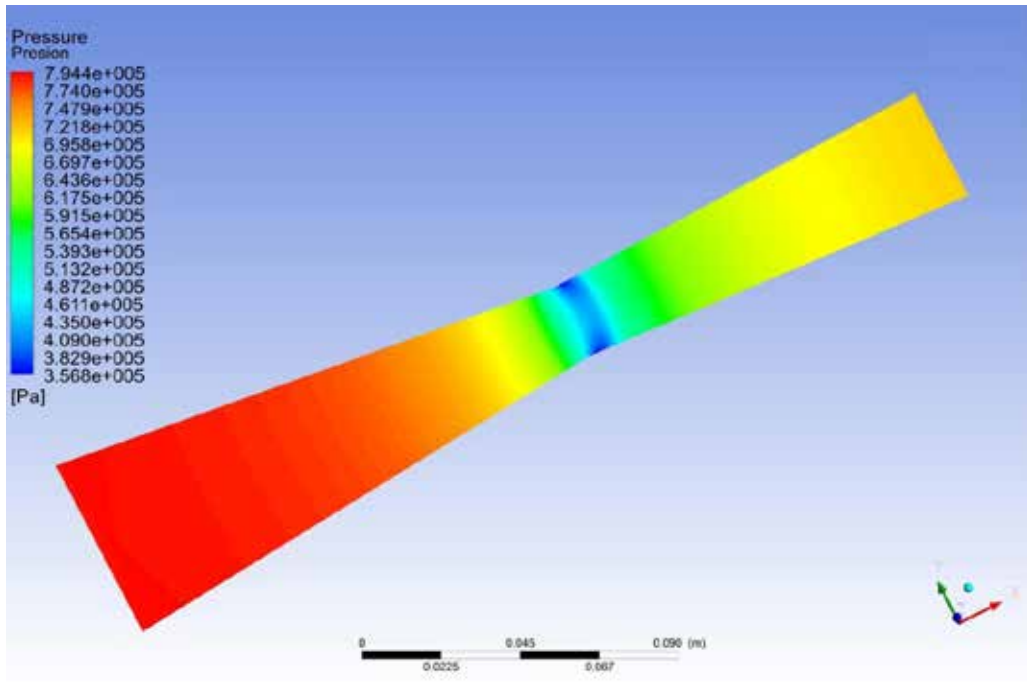
En las figuras 40 y 41 se muestra el diagrama de contorno y las líneas de corriente, respectivamente, para el comportamiento de la presión en función de la longitud, cuando la contrapresión es de  $P_b = 715.4059$  kPa



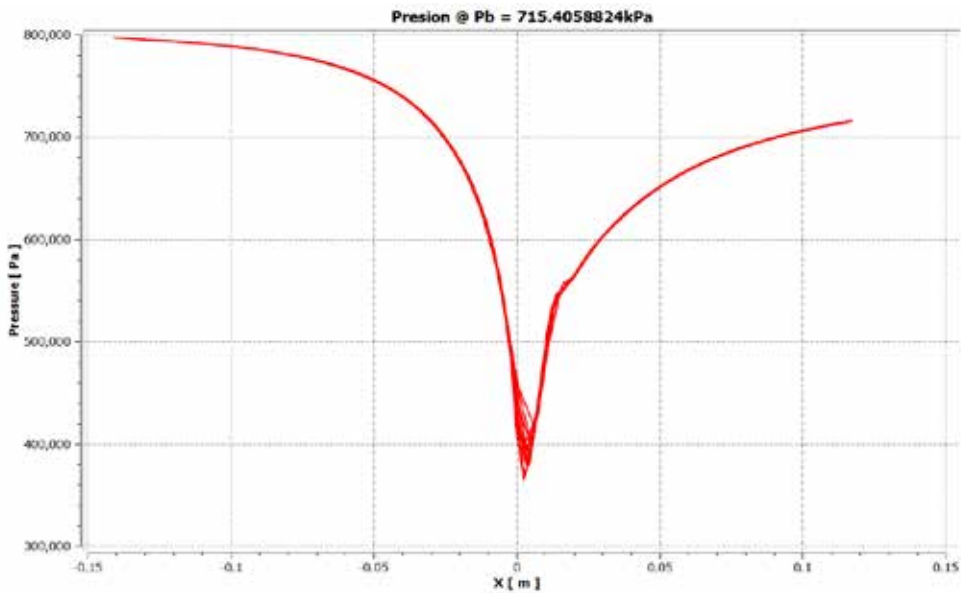
**Figura 38: Distribución de la temperatura para  $P = 715.4058824 \text{ kPa}$**   
Fuente: Prieto (2018)



**Figura 39: Temperatura vs Posición para  $P = 715.4058824 \text{ kPa}$**   
Fuente: Prieto (2018)



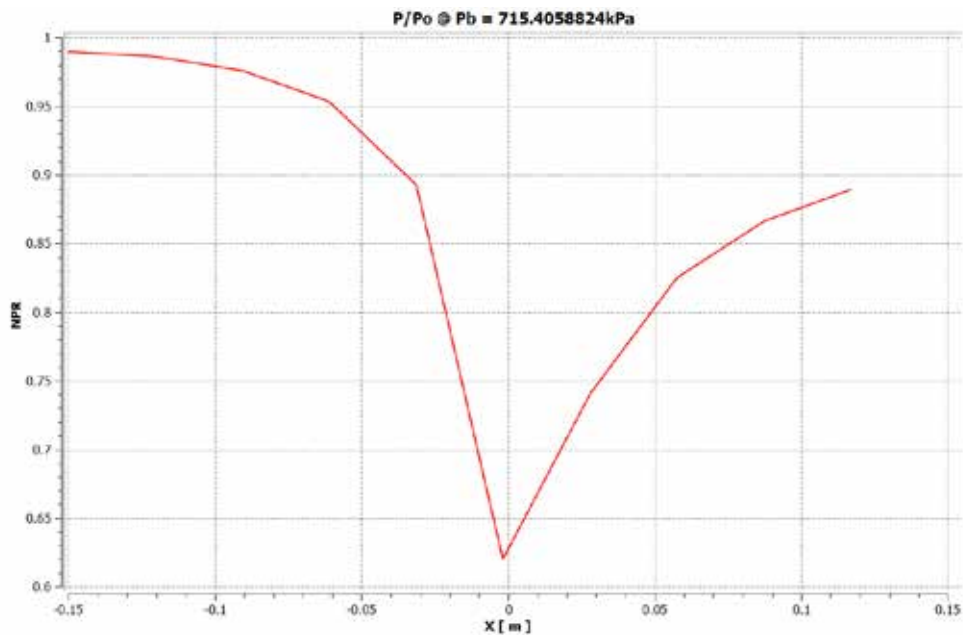
**Figura 40: Distribución de presión para  $P_b = 715.4058824\text{kPa}$**   
 Fuente: Prieto (2018)



**Figura 41: Presión vs Posición para  $P_b = 715.4058824\text{ kPa}$**   
 Fuente: Prieto (2018)

En la figura 42, se puede apreciar la variación de presión respecto a la presión de estancamiento en todo el desarrollo de expansión (antes del choque) y compresión

(después del choque) del flujo a lo largo de la tobera. Dicha relación en la sección donde se genera la onda de choque, equivale aproximadamente a 0,62, valor para el cual, a una relación de áreas de 1,5, se encuentra en una zona donde se experimenta choque oblicuo y separación de la capa límite. Asimismo, es importante destacar el hecho de que se observa un proceso de expansión normal en la sección divergente de acuerdo a la relación de presiones, por lo que se evidencia que dicha expansión es cuasi-isentropica.

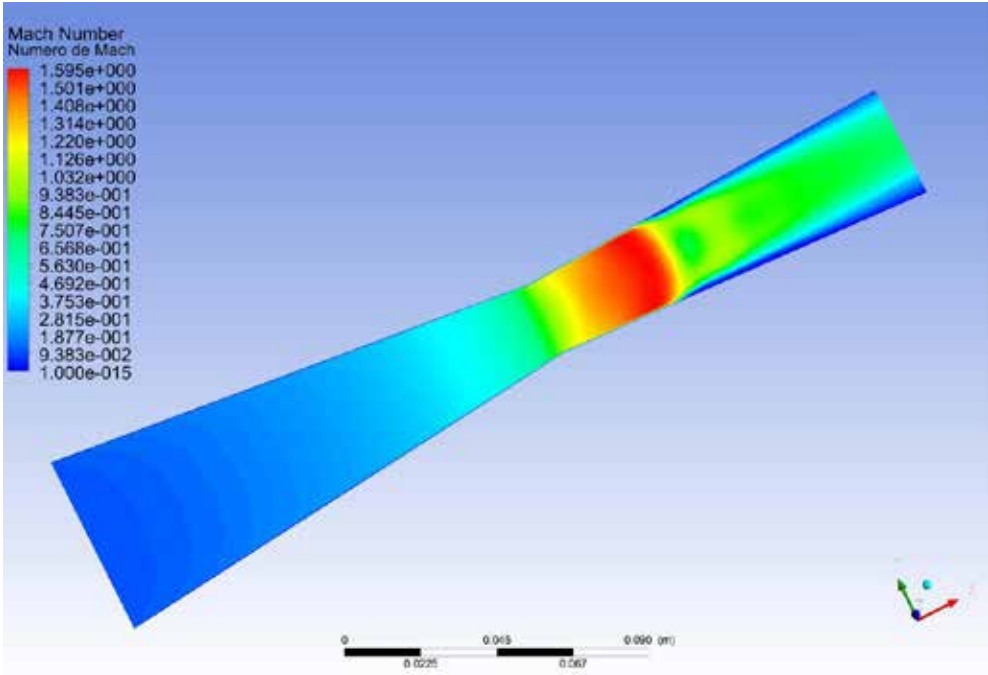


**Figura 42: Diagrama para  $P_b = 715.4058824$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)

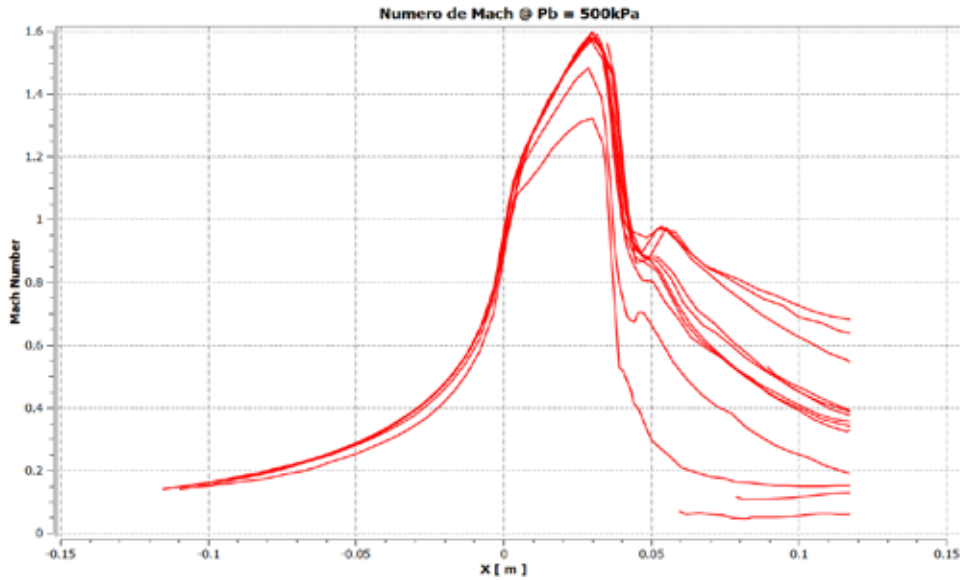
#### 4.5.2 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de $P_b = 500$ kPa

Para una contrapresión de 500 kPa, se reduce la relación de presiones, por lo que el flujo logra una mayor expansión antes de experimentar la onda de choque incidente. El valor máximo de número de Mach es de  $M = 1,595$ , tal como se observa en la figura 43. De igual manera, en la figura 44 se observa que la onda de choque se ha desplazado aproximadamente 3 cm de la garganta, lo cual implica que la expansión lograda fue mayor que en el caso anterior. Acontecimiento que justifica que se haga más pronunciada la separación de capa límite observada aguas abajo de

la onda de choque, así como una leve formación de ondas de choque oblicuas producto de la convergencia de una onda de choque incidente con una onda de reflexión y una onda horizontal lambda. También puede observarse que dicha separación de la capa límite, es asimétrica.



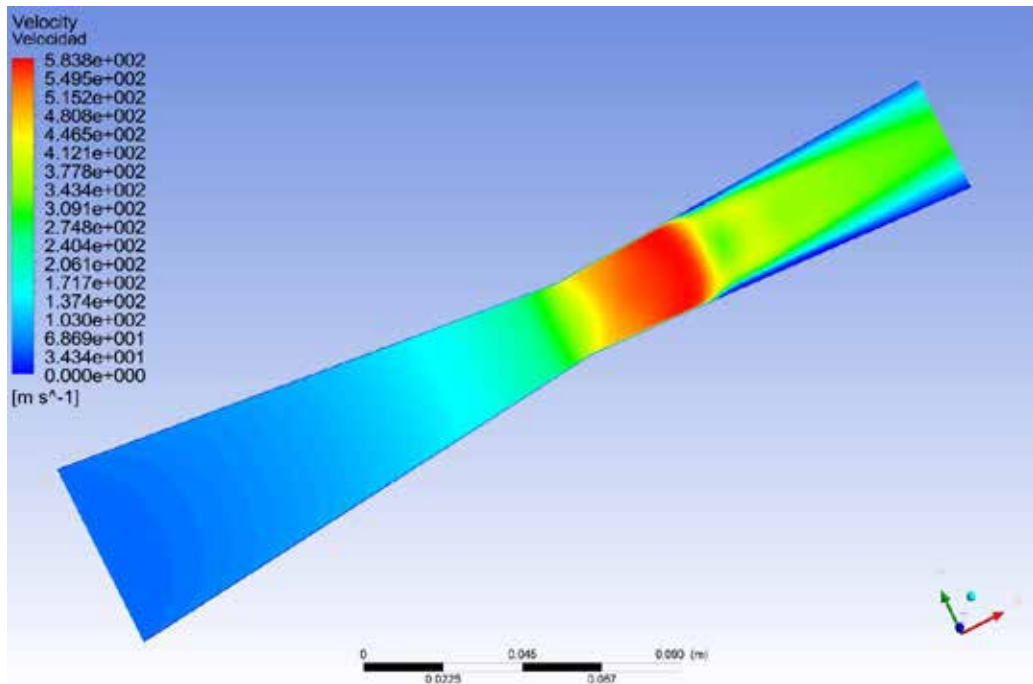
**Figura 43: Distribución del Número de Mach para  $p = 500 \text{ kPa}$**   
Fuente: Prieto (2018)



**Figura 44: Número de Mach vs Posición para  $P_b = 500 \text{ kPa}$**

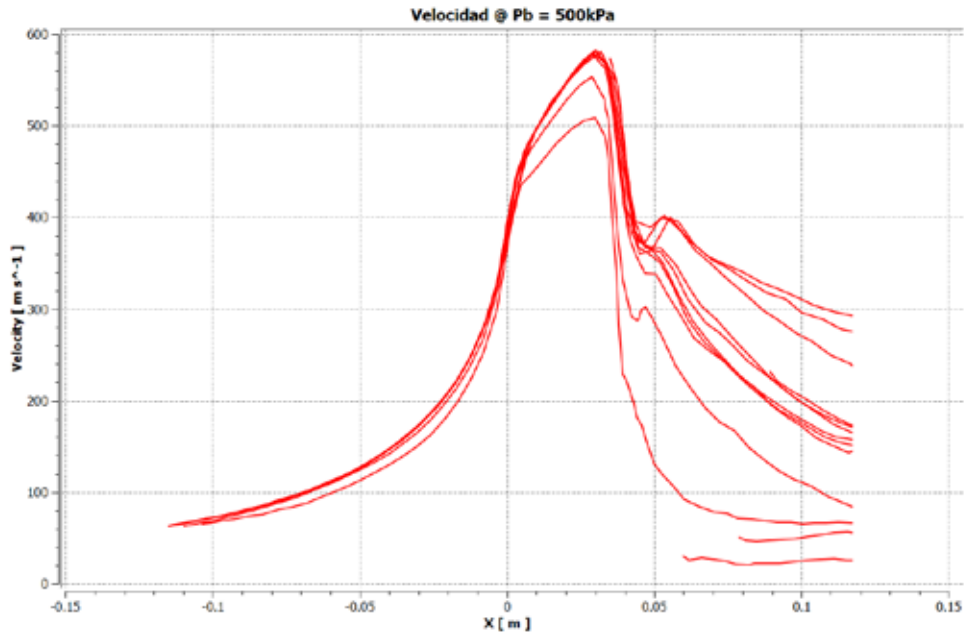
Fuente: Prieto (2018)

Nuevamente, el comportamiento de la velocidad es similar al de número de Mach. Como se muestra en las figuras 45 y 46.



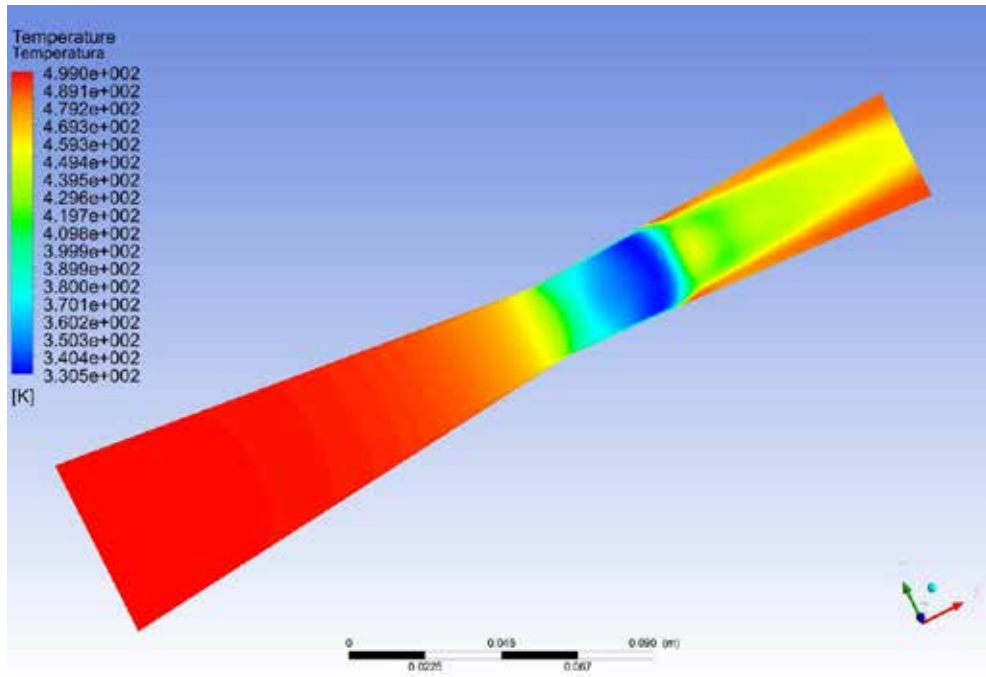
**Figura 45: Distribución de la velocidad para  $P_b = 500 \text{ kPa}$**

Fuente: Prieto (2018)

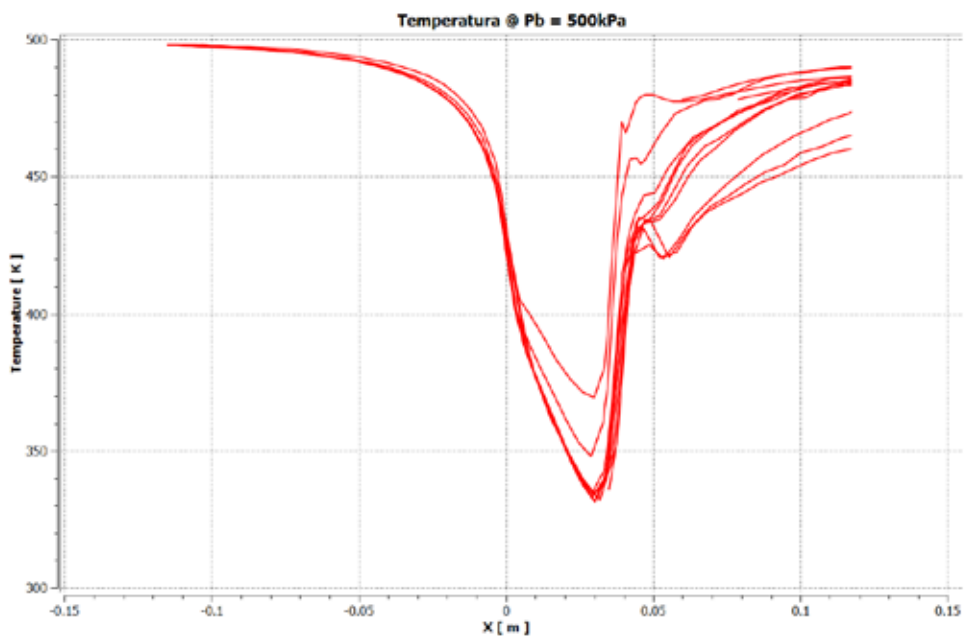


**Figura 46: Velocidad vs Posición para  $P_b = 500 \text{ kPa}$**   
 Fuente: Prieto (2018)

Como resultado de la simulación, también se determinó la distribución de la temperatura a lo largo de la tobera. En la figura 47 se observa cómo en las paredes de la tobera, la temperatura es alta y aumenta progresivamente a medida que se desplaza a lo largo de esta, además, de otro cambio de temperatura esta vez no tan brusco luego de la onda de choque. Al igual que el diagrama de contorno, las líneas de corrientes observadas en la figura 48, indican el comportamiento de la propiedad de temperatura cuando el flujo se desplaza con una presión de contrapresión de  $P_b = 500 \text{ kPa}$ . Se muestra el cambio de temperatura en forma de pico luego de la onda de choque, a aproximadamente 4,5 cm de la garganta.

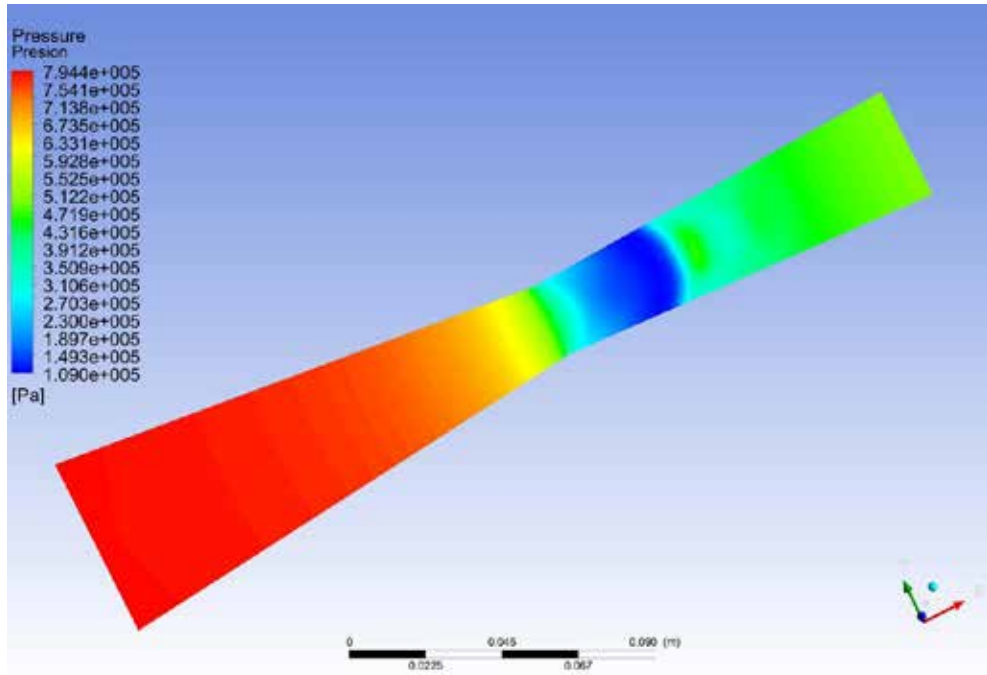


**Figura 47: Distribución de la temperatura para  $P_b = 500$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)



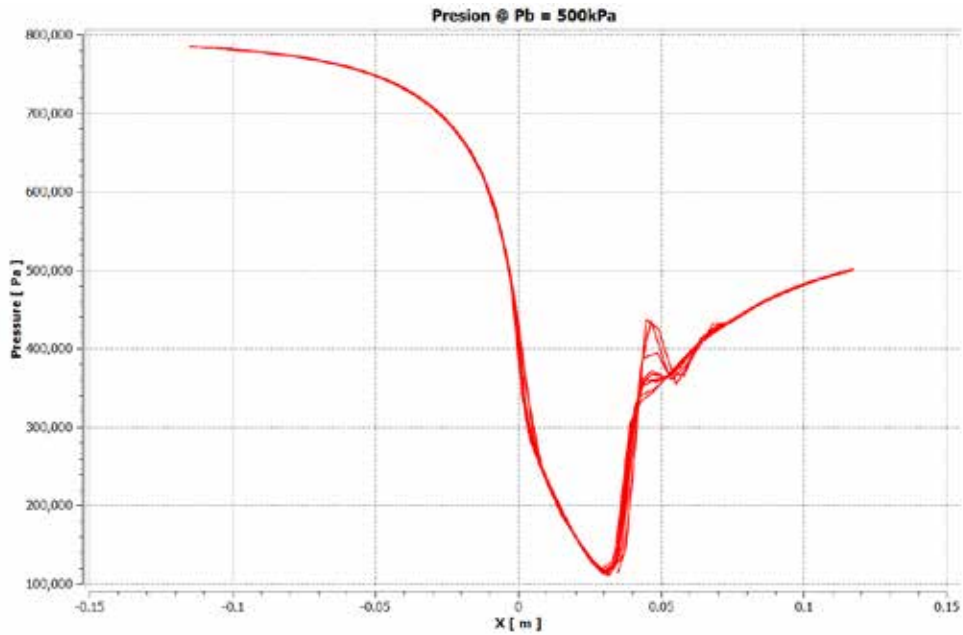
**Figura 48: Temperatura vs Posición para  $P_b = 500$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)

En la figura 49, se muestra la distribución de presión para esta condición. Se aprecia que, al lograr una mayor del flujo, el gradiente de presión presente cuando se experimenta la onda de choque, es mayor que para la condición anterior.



**Figura 49: Distribución de presión para  $\approx 500$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)

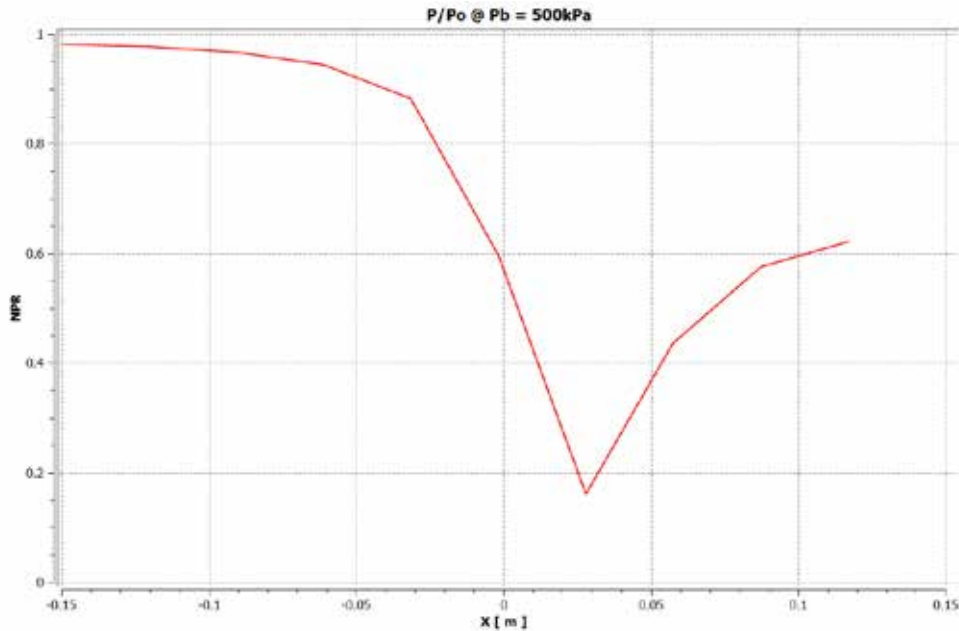
En la figura 50, se observa uniformidad en las líneas de corriente aguas arriba de la onda de choque, por lo que el proceso de expansión en esta zona, se conserva. Por otro lado, aguas abajo de la onda de choque, se observa una dispersión de esta cantidad aproximadamente a 5 cm de la garganta, esto se debe a los gradientes de presión producto del choque oblicuo que se genera conjuntamente con la interacción de la capa límite con la onda de choque incidente. Los puntos en los que se observan presiones más elevadas, se ubican en la zona subsónica que surge de la coincidencia entre la onda incidente y la onda de reflexión. Esto para el primer choque resultante.



**Figura 50: Presión vs Posición para  $P_b = 500 \text{ kPa}$**

Fuente: Prieto (2018)

La figura 51 muestra el diagrama para esta condición, donde se puede observar que la expansión antes del choque sigue ocurriendo con normalidad, luego se experimenta la onda de choque 3 cm aguas abajo de la sección de la garganta y posteriormente, existe una compresión que desacelera al flujo.

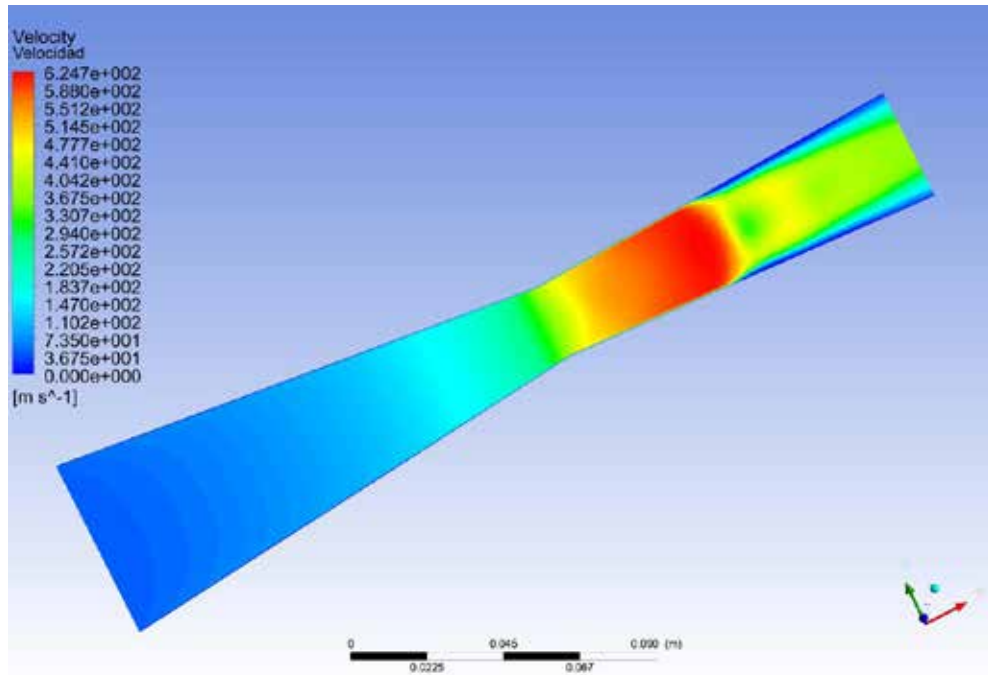


**Figura 51: Diagrama para = 500 kPa**  
Fuente: Prieto (2018)

#### 4.5.3 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de = 400 kPa

Del mismo modo, se hizo un estudio del flujo de aire que atraviesa la tobera, ahora para un valor de contrapresión de 400 kPa. Lo que produce que la onda de choque se desplace longitudinalmente en dirección del flujo. El flujo logra una mayor expansión que en el caso anterior, lo cual resulta lógico, ya que disminuye la relación . El número de Mach alcanza un valor de = 1.782 antes de experimentar una onda de choque a 5 cm de la garganta, aproximadamente. Es importante destacar que, aguas abajo de la onda de choque, los fenómenos presentes están más pronunciados que en el caso anterior.

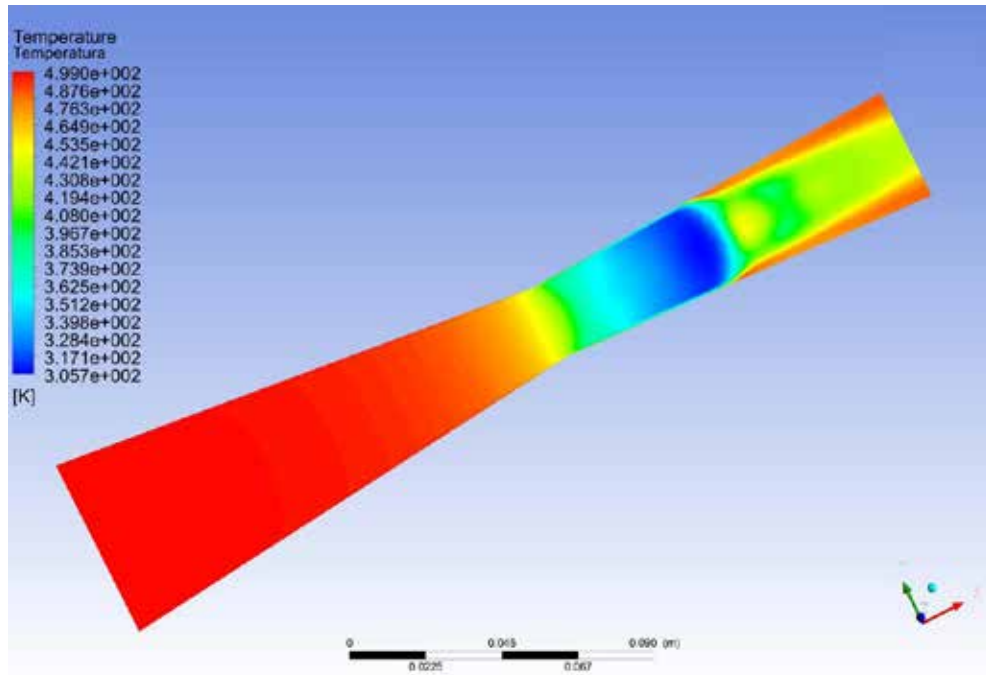
Cuando el flujo logra la mayor expansión, este alcanza velocidades de 624.7 m/s y aguas abajo de la onda de choque como se muestra en la figura 52, y hay un crecimiento progresivo de los perfiles de velocidad en la zona de separación, lo cual reduce la zona de compresión donde ocurren las ondas de choque oblicuas.



**Figura 52: Distribución de la velocidad para  $p = 400$  kPa**

Fuente: Prieto (2018)

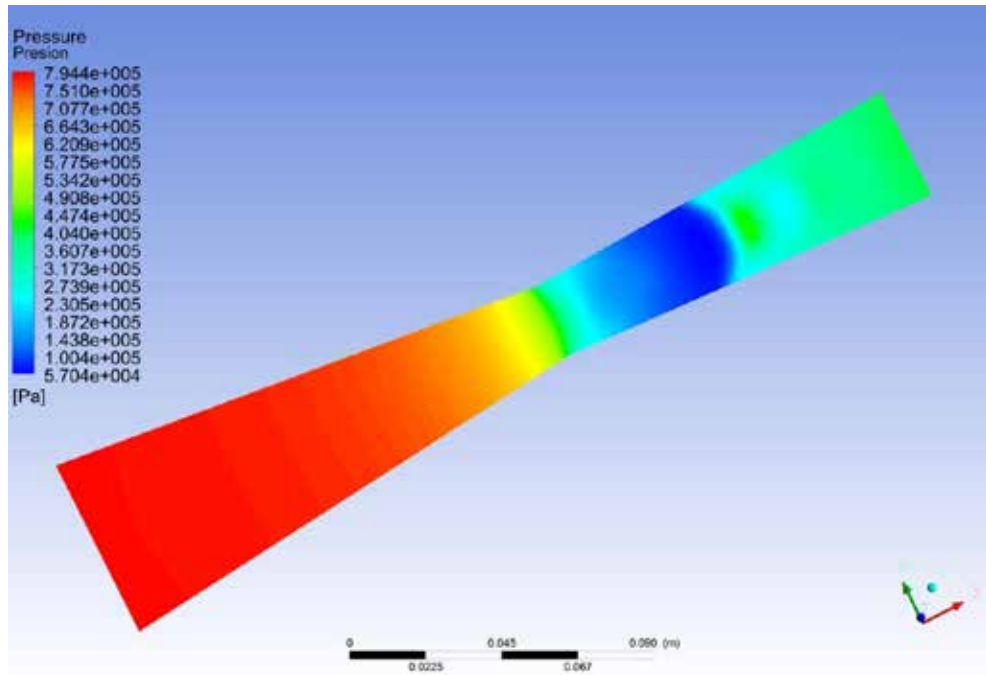
Como resultado de la simulación, también se determinó la distribución de la temperatura a lo largo de la tobera. En la figura 53 se observa cómo en las paredes de la tobera, la temperatura es alta y aumenta progresivamente a medida que se desplaza a lo largo de esta, además, de otro cambio de temperatura esta vez no tan brusco luego de la onda de choque.



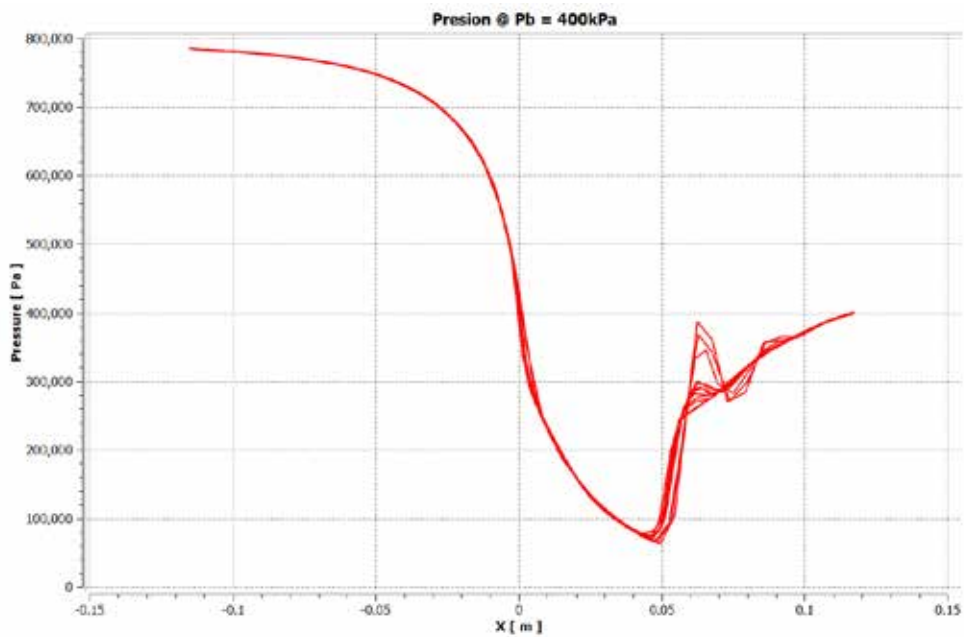
**Figura 53: Distribución de la temperatura para  $p = 400$  kPa**

Fuente: Prieto (2018)

En las figuras 54 y 55 muestran cómo la presión disminuye a lo largo de la tobera hasta la perturbación producto de la onda de choque. La presión mínima es de 57,04 kPa. Se observa el frente de onda como un cambio de presión luego de la onda de choque, con una longitud de onda mayor que en el caso anterior. El comportamiento de las líneas de corriente es similar en la mayoría de las secciones de la tobera, el frente de onda se presenta como un cambio de presión abrupto luego de la onda de choque.

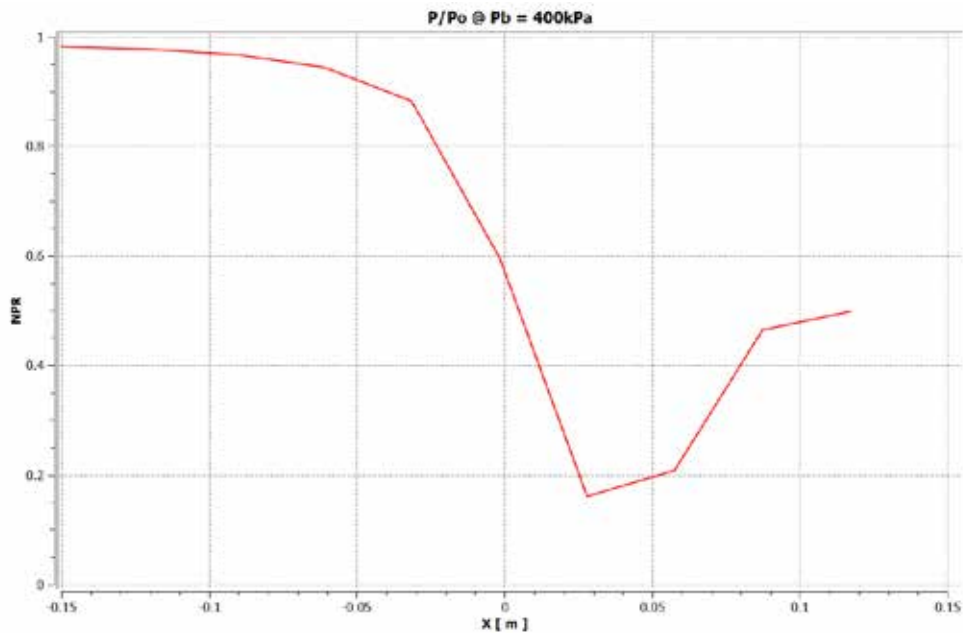


**Figura 54: Distribución de presión para  $P_b = 400$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)



**Figura 55: Presión vs Posición para  $P_b = 400$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)

En la figura 56, nuevamente se aprecia que el proceso de expansión antes de la onda de choque se logró de manera corriente para esta condición. Sin embargo, las irreversibilidades presentes aguas abajo de la onda de choque son notables debido a los gradientes de presión.

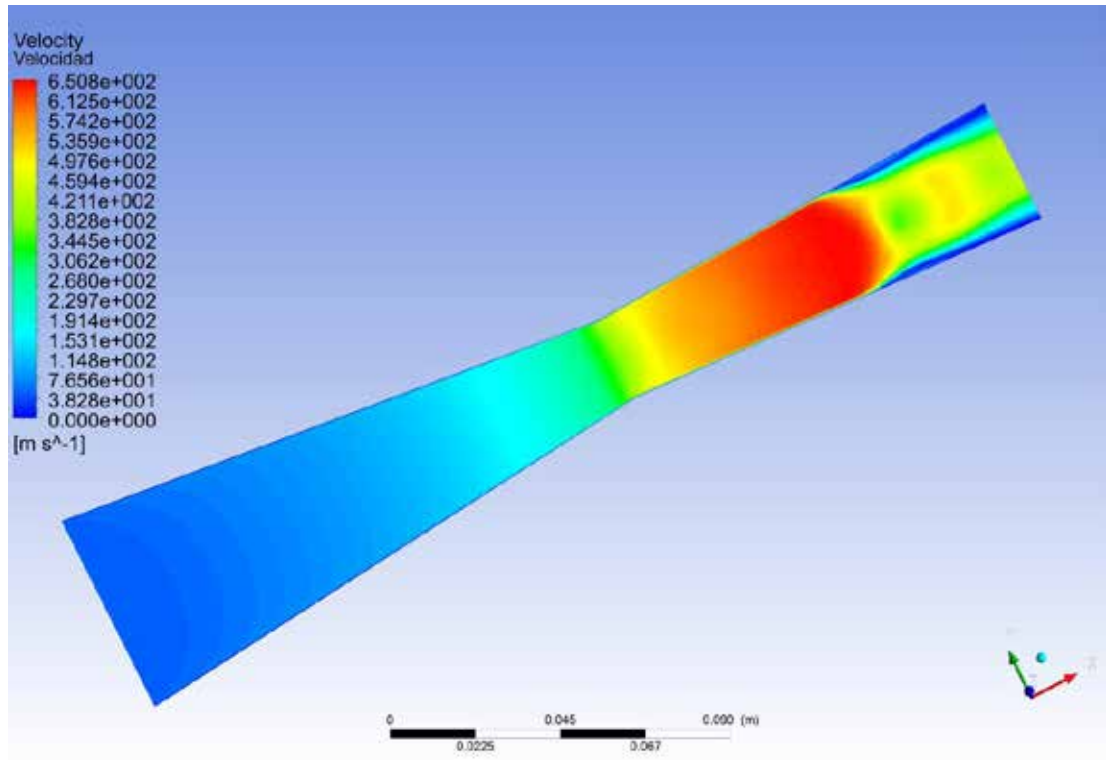


**Figura 56: Diagrama para  $P_b = 400 \text{ kPa}$**

Fuente: Prieto (2018)

#### 4.5.4 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de $P_b = 300 \text{ kPa}$

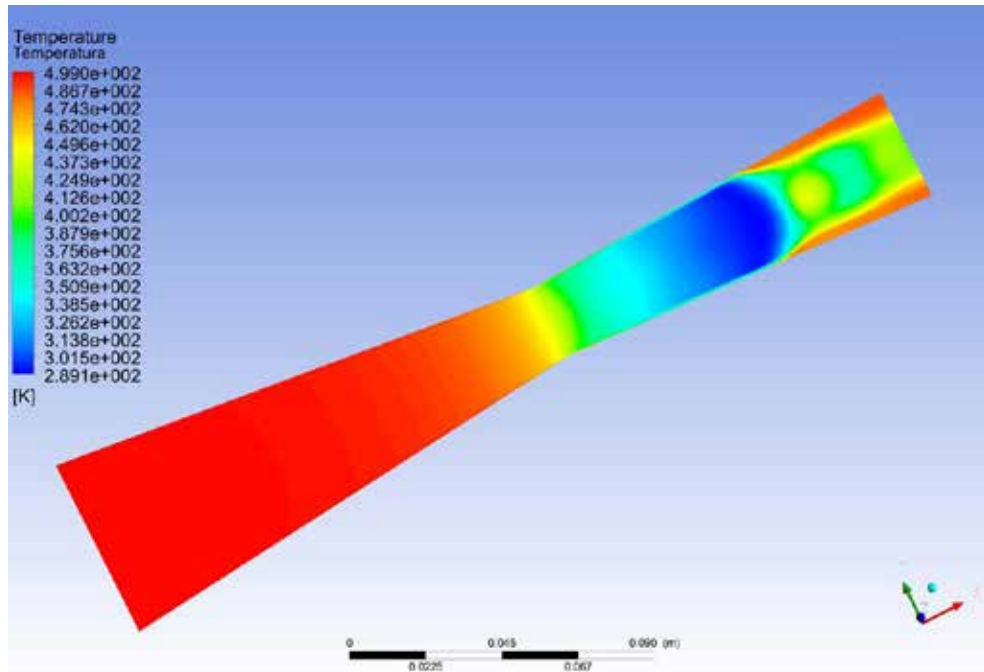
De la misma manera, se hizo un estudio del flujo de aire que atraviesa la tobera, ahora para un valor de contrapresión de 300 kPa. Lo que produce que la onda de choque se desplace longitudinalmente en dirección del flujo a mayor distancia de la garganta, logrando una mayor expansión del flujo con un valor máximo de número de Mach de  $M = 1.907$ . En la figura 57 se observa cómo el frente de onda va en aumento respecto a los casos precedentes. Por otro lado, también se aprecia cómo el espesor de la capa límite se hace más pronunciado, esto debido a que la interacción es más fuerte y las irreversibilidades presentes son más evidentes.



**Figura 57: Distribución de la velocidad para  $p = 300 \text{ kPa}$**

Fuente: Prieto (2018)

El gráfico de la figura 58 muestra cómo la temperatura disminuye a lo largo de la tobera hasta la perturbación producto de la onda de choque. La temperatura mínima es de 289,1 K. Se observa el frente a partir de un brusco gradiente de temperatura. Para esta propiedad, se definen cada una de las zonas de interacción con contornos de alto contraste. Luego de la onda de choque, en las paredes de la tobera, la temperatura es mucho mayor producto del desprendimiento de capa límite, aumentando su espesor hasta la salida de la tobera. También se observa que la temperatura desciende hasta que se presenta la onda de choque, aumentando hasta la salida, pero presentando cierta dispersión en las zonas que se generan coincidencias que choques incidentes y choques de reflexión.

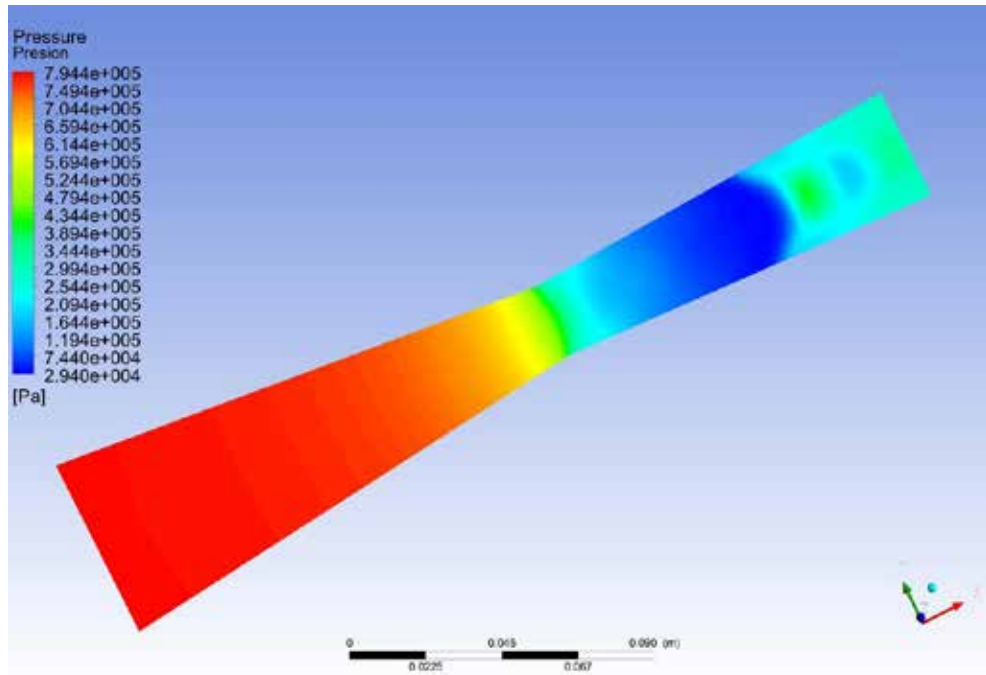


**Figura 58: Distribución de la temperatura para  $p = 300$  kPa**

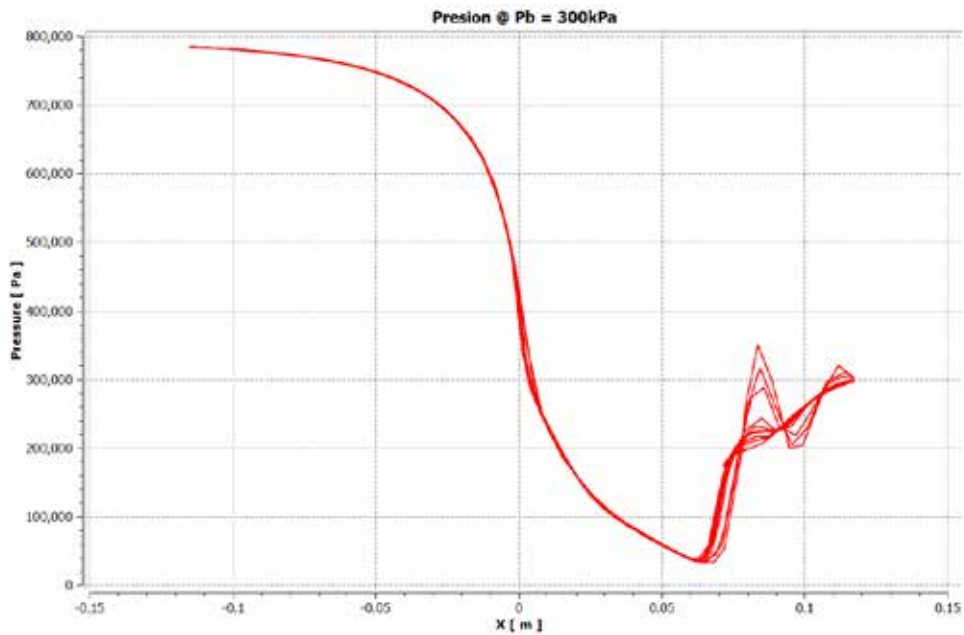
Fuente: Prieto (2018)

El gráfico de contorno de la figura 59 muestra cómo la presión disminuye a lo largo de la tobera hasta la perturbación producto de la onda de choque. La presión mínima es de 29,4 kPa. Se observa el frente de onda como un cambio de presión luego de la onda de choque, con una longitud de onda mayor que en el caso anterior.

El comportamiento de las líneas de corriente presentes en la figura 60 es similar en la mayoría de las secciones de la tobera, el frente de onda se presenta como un gradiente de presión luego de la onda de choque.

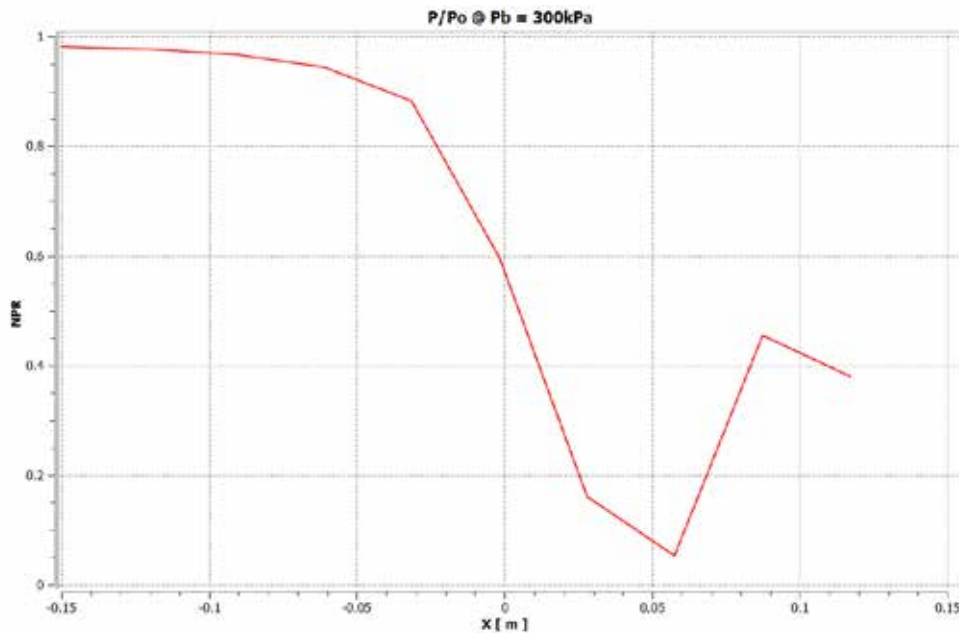


**Figura 59: Distribución de presión para  $P_b = 300$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)



**Figura 60: Presión vs Posición para  $P_b = 400$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)

La figura 61 representa el gráfico donde se observa la relación de presión a través de toda la sección longitudinal de la tobera para esta condición.



**Figura 61: Diagrama para  $P_b = 400 \text{ kPa}$**

Fuente: Prieto (2018)

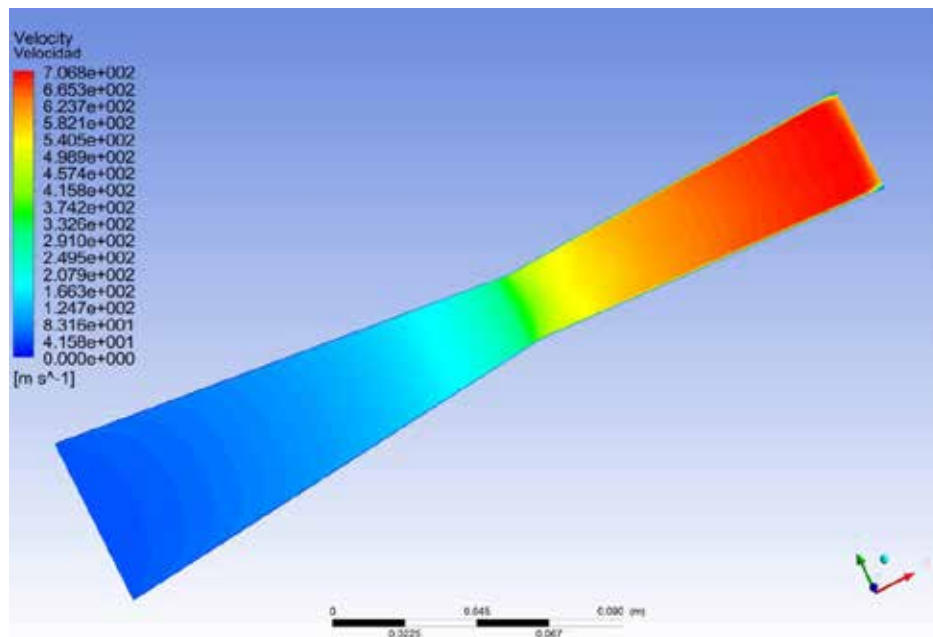
#### 4.5.5 Estudio de la tobera para un valor de contrapresión de $P_b = 72,5 \text{ kPa}$

De la misma manera, se hizo un estudio del flujo de aire que atraviesa la tobera, ahora para un valor de contrapresión de  $72.5 \text{ kPa}$ . La onda de choque se ha desplazado hasta la salida de la tobera, con un valor máximo de número de Mach de  $M = 2.220$ , por lo tanto, el flujo logra casi una completa expansión a lo largo de toda la tobera convergente – divergente. Debido a la proximidad de la onda de choque a la salida de la tobera, los fenómenos de interacción no afectan de manera considerable la expansión del flujo. El frente de onda no aparece y no se muestra el desprendimiento de capa límite debido a que la onda de choque está muy próxima a la salida.

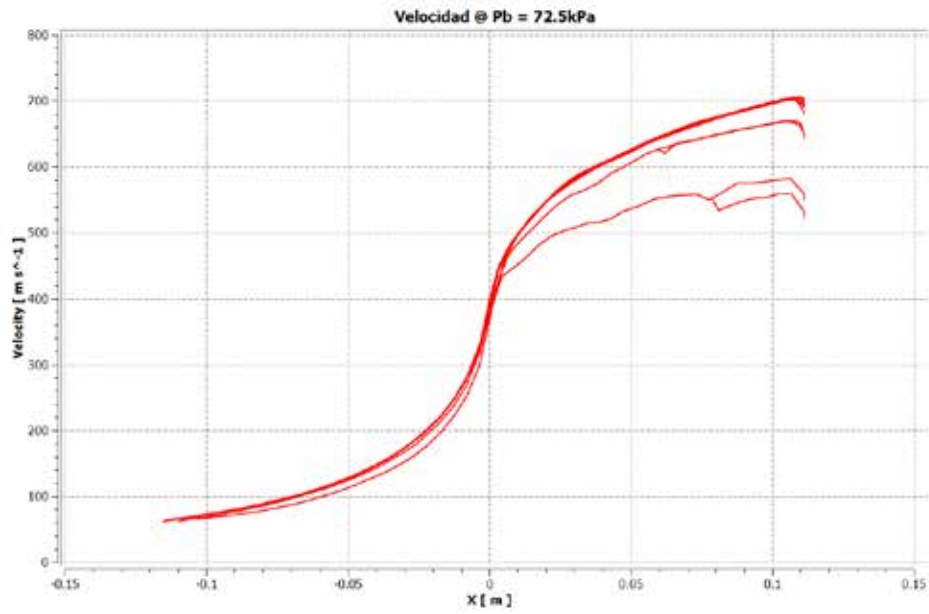
Se puede apreciar que, para esta geometría en la figura 62, a las condiciones expuestas, el flujo alcanza una velocidad de  $706.8 \text{ m/s}$  para el mayor grado de expansión. Sin embargo, aun en la ausencia de los fenómenos de interacción cuando

el proceso de expansión es casi completo, el comportamiento del campo de flujo no es completamente uniforme y las líneas de corriente presentan cierta dispersión a lo largo de la sección divergente como se muestra en la figura 63.

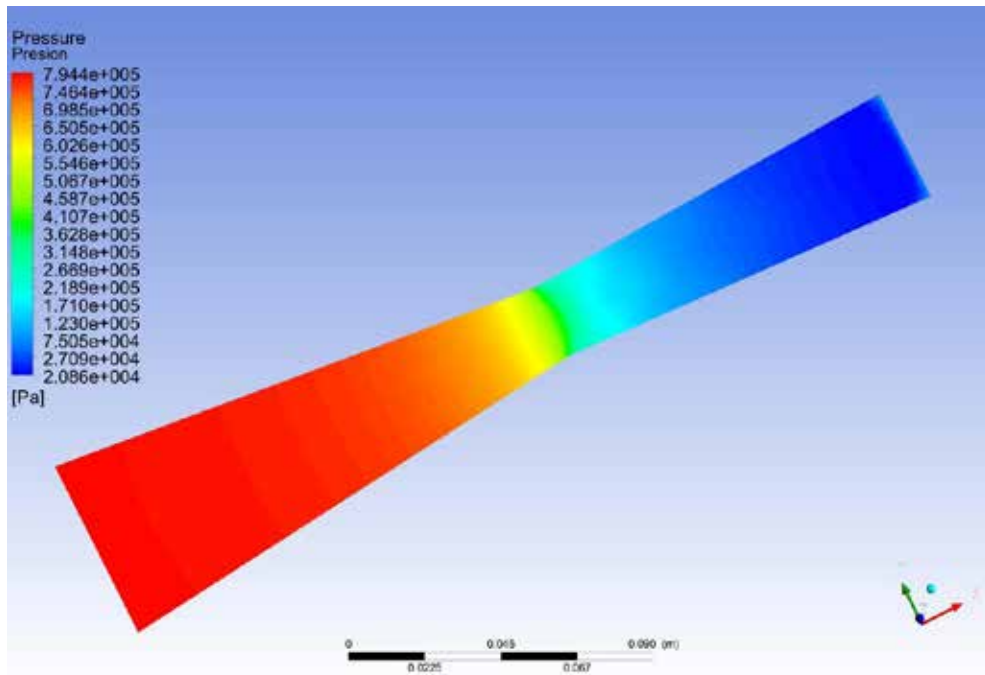
Las figuras 64 y 65 muestran cómo la presión disminuye a lo largo de la tobera hasta la perturbación producto de la onda de choque. La presión mínima es de 20,86 kPa. No se observa la presencia del frente de onda. El comportamiento de las líneas de corriente es similar en todas las secciones de la tobera. Para esta propiedad, se observa mayor uniformidad en el proceso de expansión a través de la sección divergente de la tobera. También se destaca el hecho de que no existen importantes gradientes de presión bruscos, por lo tanto, se evidencia que estos solo se desarrollan cuando se experimentan fenómenos de importante irreversibilidad.



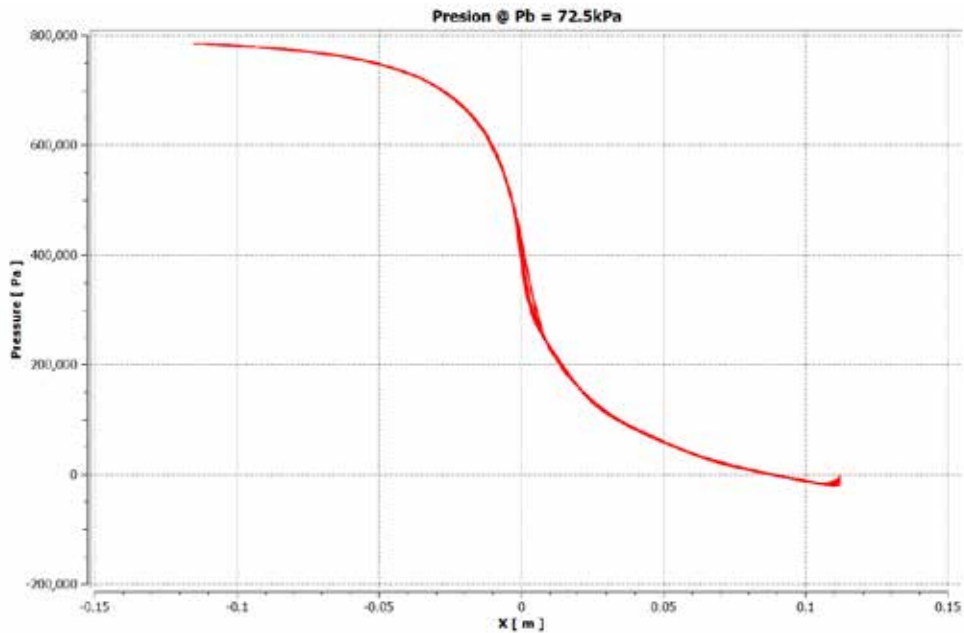
**Figura 62: Distribución de la velocidad para  $p = 72.5$  kPa**  
Fuente: Prieto (2018)



**Figura 63: Velocidad vs Posición para  $P_b = 72,5 \text{ kPa}$**   
 Fuente: Prieto (2018)

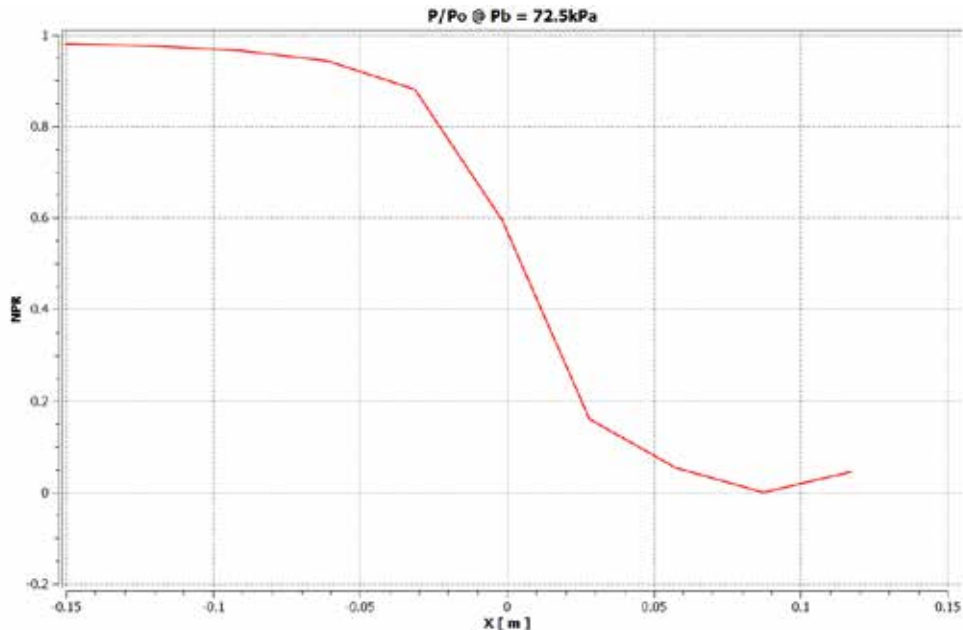


**Figura 64: Distribución de presión para  $P_b = 72,5 \text{ kPa}$**   
 Fuente: Prieto (2018)



**Figura 65: Presión vs Posición para  $P_b = 72,5 \text{ kPa}$**   
 Fuente: Prieto (2018)

El diagrama perteneciente a este proceso de expansión, se muestra en la figura 66, donde se puede observar que dicho proceso se da sin la presencia de importantes gradientes de presión, por lo que la expansión fue lograda casi en su totalidad. Sin embargo, se evidenció al analizar las propiedades del campo de flujo para esta condición, que se presentan irreversibilidades en la sección divergente a medida que se desarrolla el proceso de expansión y el flujo alcanza mayores velocidades, antes de presenciar la onda de choque en la salida y en la ausencia de fenómenos de interacción que acentuarían la turbulencia del campo de flujo.

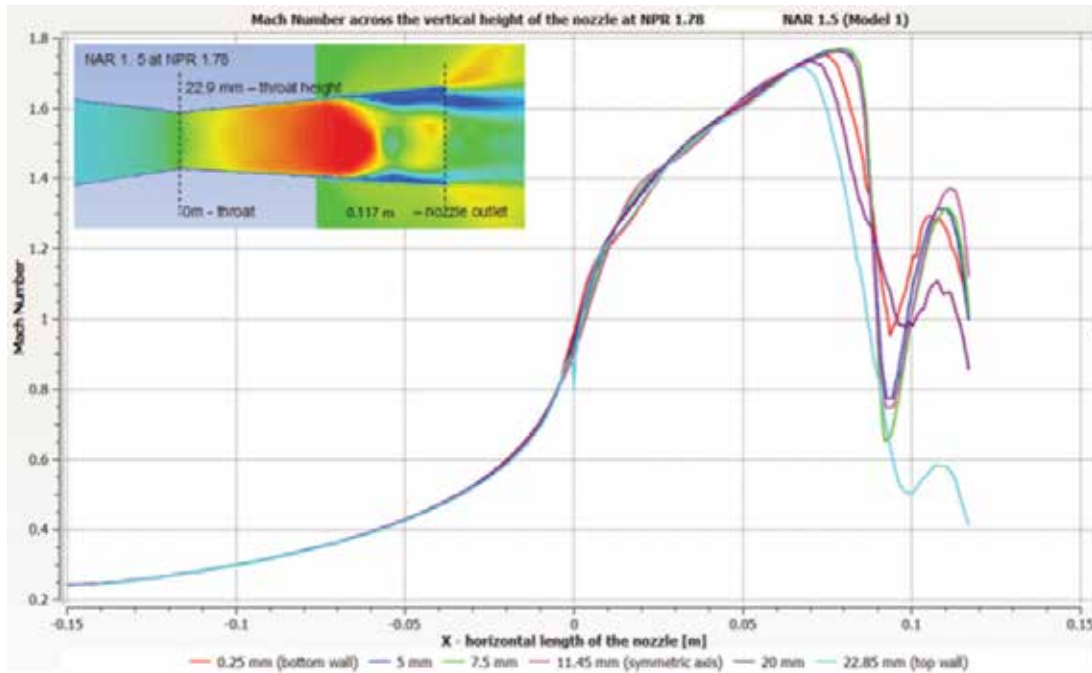


**Figura 66: Diagrama para  $P_b = 72,5$  kPa**  
 Fuente: Prieto (2018)

#### 4.6 Comparación con los valores proporcionados por el fabricante.

El profesor E. M. S. Ekanayake de la escuela de matemáticas y ciencias geoespaciales del Instituto Real de Tecnología de Melbourne (RMIT por sus siglas en inglés) en Australia, realizó pruebas a modelos de toberas convergentes – divergentes pertenecientes a los aviones cazas SR-71 y F-22A y que por razones de secreto militar solo revela la geometría de las mismas en su tesis de maestría “Numerical Simulation of a Convergent Divergent Supersonic Nozzle Flow”, utilizada como referencia en la presente investigación y en la cual encontró resultados similares en cuanto a tendencia, comportamiento y evolución del campo de flujo supersónico en dichos dispositivos, como lo revelan las comparaciones de las figuras 67 y 68. Ekanayake utilizó técnicas de aproximación numéricas mediante la herramienta ANSYS CFX y para una relación de presiones de 1,78 se presentó una onda de choque normal en la zona divergente aproximadamente a 7 cm de la garganta, resultado que concuerda con los obtenidos en esta investigación cuando la

contrapresión se mantiene a 300 kPa y la onda de choque normal se ubica a 6,57 cm de la garganta.



**Figura 67: Contorno y líneas de corriente del número de Mach según investigación de E. M. S. Ekanayake**

Fuente: Ekanayake (2013)

Es importante destacar que Ekanayake (2013) se enfocó más en describir el comportamiento del campo de flujo bajo la modalidad de flujo externo, es decir, en estudiar las irreversibilidades y patrones fuera de la tobera convergente – divergente, a diferencia de la presente investigación que se fundamenta en la descripción del flujo interno y la influencia de la contrapresión en el desarrollo de ondas de choque normal en la zona divergente donde se establece un flujo supersónico. Ello debido a que el principal interés en la industria aeroespacial es evitar la aparición de estos fenómenos no isentrópicos, ya que esto supone una considerable caída en el empuje del cohete propulsor y eventual pérdida de sustentación por la drástica disminución de la velocidad del flujo justo después de la onda de choque normal.



la cantidad de movimiento lineal, se puede describir como una magnitud física que depende de la masa del sistema.

En todas las simulaciones realizadas, las ecuaciones de energía cinética turbulenta y la de disipación turbulenta, prevalecen sobre las ecuaciones de transporte, lo cual, resulta lógico, ya que, en todos los estados de estudio, los sistemas presentan grandes niveles de irreversibilidad, principalmente aguas abajo de la onda de choque incidente. Condición que se acentúa para las expansiones de flujo más alejadas de la garganta de la tobera, donde los gradientes de presión son más bruscos.

Para las simulaciones en las que la onda de choque incidente se genera más próximas a la salida de la tobera, se necesitó un menor número de iteraciones para lograr la convergencia tanto de las ecuaciones de transporte, como de las de turbulencia. Esto puede deberse a que el flujo para estas condiciones, alcanzó un mayor grado de expansión dentro de la tobera, por lo tanto, aguas arriba de la onda de choque, el comportamiento del campo de flujo es casiisentrópico y aguas abajo, las irreversibilidades presentes no son tan evidentes.

#### **4.7.2 Comportamiento de los diagramas de contorno y las líneas de corriente para cada valor de contrapresión.**

Cuando el flujo logra expandirse hasta la salida de la tobera (antes de presenciar una onda de choque) el número de Mach para esta condición equivale a 2,220, alcanzando el flujo una velocidad de 706,8 m/s. Puede observarse para todos los casos, que el flujo logra una expansión sónica ( $M = 1$ ) en la garganta y que se sigue expandiendo a velocidades supersónicas ( $M > 1$ ) a lo largo de la sección divergente hasta presenciar la onda de choque donde, para todos los casos, se pudo apreciar un cambio sensible a un régimen transónico antes de pasar bruscamente al régimen de flujo subsónico ( $M < 1$ ).

Debido a la directa proporcionalidad de los parámetros, el comportamiento del número de Mach y la velocidad son similares. Con esta propiedad se puede reafirmar que el flujo más próximo a la capa límite, experimenta una separación debido a la

formación de perfiles de velocidad. Sin embargo, aguas arriba de la onda de choque se logra una expansión normal, alcanzando en todos los casos velocidades supersónicas a partir de 400 m/s, aproximadamente.

Las curvas de temperatura muestran cómo esta propiedad va disminuyendo hasta la sección donde ocurre la onda de choque, lugar donde existe el punto más bajo de la gráfica, luego la temperatura aumenta hasta la salida. Al igual que en las curvas de Mach, el comportamiento de las líneas de corriente antes del choque es uniforme. Sin embargo, luego de la onda las líneas se muestran más dispersas.

La propiedad que presenta menor varianza en las zonas de separación al momento de que el campo de flujo experimenta la onda de choque, fue la presión. No obstante, dicho fenómeno se origina al existir importantes gradientes de presión bruscos. Asimismo, se puede observar una serie de gradientes de presión que disminuyen progresivamente aguas abajo de la onda de choque incidente, producto de una región subsónica que se forma entre la coincidencia de las ondas de reflexión con las ondas de choque incidentes.

Cuando  $p = 300$  kPa, se aprecian cambios bruscos en todo el campo de flujo aguas abajo de la onda de choque. También puede observarse una leve recirculación cerrada entre la capa límite y la capa de cizallamiento en la zona de separación. Por lo tanto, se hace evidente que el proceso de expansión es considerablemente perturbado a partir de los diagramas de velocidad y temperatura aguas abajo de la onda de choque para esta condición especialmente. La separación de la capa límite se mantiene simétrica para valores de contrapresión menores a 300 kPa, a partir de ese estado se presencia una leve asimetría con mayor espesor en la pared inferior de la tobera.

Para  $p = 500$  kPa, se aprecia que la separación de capa límite inducida por la onda de choque incidente, se desarrolla aguas abajo de esta de manera asimétrica. Fenómeno presente en todas las interacciones de este tipo, pero mayormente pronunciada para esta condición.

En los diagramas se puede observar que, para todos los casos, la expansión del flujo antes de la onda de choque fue corriente. Por lo tanto, puede considerarse como una expansión casi isentropica, ya que no presenta importantes irreversibilidades. También puede observarse que para una tobera con relación de área de 1,5 y las condiciones de estancamiento establecidas, esta experimenta ondas de choque en la sección divergente para el rango de comprendido entre 0,09 y 0,89.

A medida que disminuye la relación de presiones, el flujo alcanza mayor expansión al momento de la generación de la onda de choque incidente, lo cual deriva en un gradiente de presiones más abrupto causando que la interacción con la capa límite sea cada vez más pronunciada, aumentando la separación de la misma y generando la aparición de choques oblicuos que evidencia disipación turbulenta e inestabilidad del sistema aguas abajo de la onda de choque.

El lugar geométrico que describe el frente de onda se hace más curvado en los procesos de expansión para los que al momento de que se genera la onda de choque, la interacción entre esta y la capa límite turbulenta es mayor. Fenómeno que se puede apreciar claramente cuando la onda de choque se desarrolla a lo largo de la sección divergente a medida que disminuye la relación .

## CONCLUSIONES

La variable de mayor interés en el estudio del campo de flujo a través de una tobera convergente – divergente, es la contrapresión o presión a la que descarga la tobera, ya que a medida de que la misma vaya disminuyendo el flujo se hace más supersónico en la zona divergente de la tobera y ésto conlleva a la aparición de ondas de choque normal.

Debido a la relativamente rápida convergencia de las simulaciones se demostró que los modelos matemáticos más apropiados para la realización de la simulación numérica son las ecuaciones RANS (Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas por Reynolds) acopladas al modelo de turbulencia kappa-épsilon, obteniéndose valores de RMS de las ecuaciones de momento por debajo de  $1,5 \times 10^{-6}$ .

Se demostró que en presencia de ondas de choque se generan cambios bruscos en las propiedades del flujo y la aparición de velocidades transónicas y subsónicas, alejando a la tobera de un funcionamiento ideal con características indeseables en el flujo de trabajo.

Con la aplicación de los diagramas de contorno y las líneas de corriente presentadas se demostró que la investigación está dentro de los rangos de estudio. Además se evidencia la precisión y exactitud definidas como parámetro de aceptación en el empleo de las técnicas de CFD mediante un software comercial de amplia trayectoria como el ANSYS® Workbench.

A medida que se cambiaban los valores de contrapresión en el estudio se observó que se generaban valores del número de Mach superiores a la unidad, tal como lo demostraron U.S. Ramakanth et al (2013) en su investigación. Esto debido al efecto de la capa límite viscosa del fluido que influye directamente en la sección transversal mínima efectiva, originando que la sección de la onda se haga cada vez más curva, apartándose de la simple idea de una distorsión perpendicular a la dirección del flujo.

## RECOMENDACIONES

Implementar el estudio de la incidencia de la calidad del aire, así como el uso de gases reales en el campo de flujo de las toberas convergentes – divergentes.

Estudiar el efecto producido sobre la capa límite y su influencia en la aparición de ondas de choque normal, cuando se considera la rugosidad absoluta del material y/o la transferencia de calor.

La realización de un estudio en el cual se tome en cuenta la forma como se ve afectado el flujo al variar la presión del receptor, además de verificar el comportamiento de las ondas de choque oblicuas y ondas de Prandtl – Meyer aguas arriba de la salida de la tobera.

La construcción de un banco experimental para observar las ondas de choque presentes en la tobera mediante técnicas de visualización de flujos.

La inclusión en el pensum académico de la escuela de ingeniería mececánica de la Universidad José Antonio Paéz, de una materia electiva o tópico especial en cuyo contenido programático incluya tanto tópicos de la dinámica de fluidos computacional (CFD) así como de tópicos que incluyan también la explicación y aplicación de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones de alta complejidad.

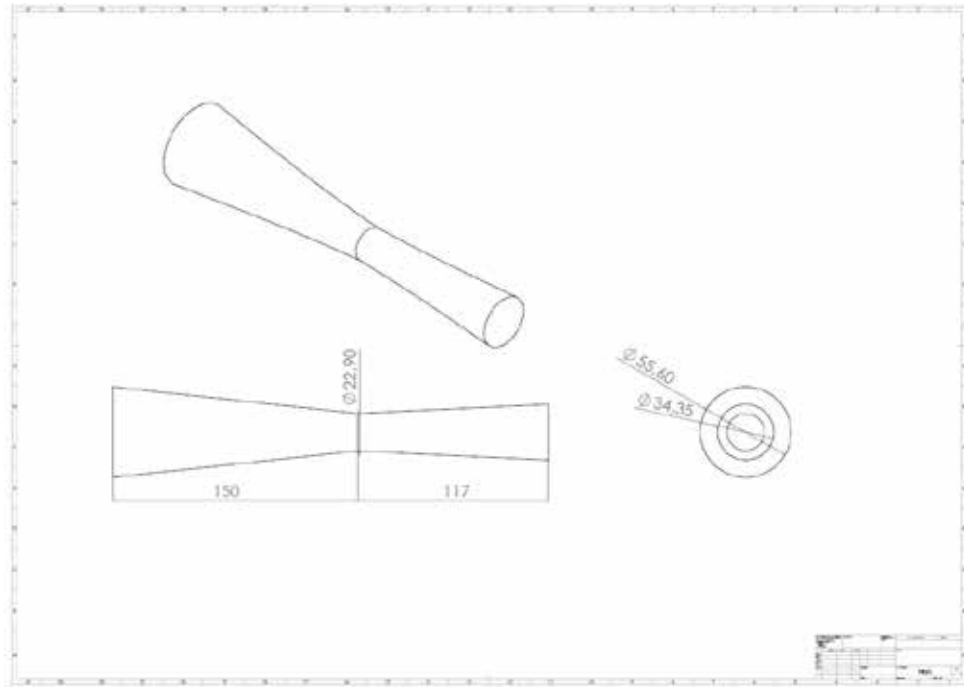
## BIBLIOGRAFÍA

- Anderson John. “Modern Compressible Flow”. Segunda Edición. New York.  
McGraw Hill Education, 2002, 125-178, ISBN 0072424435.
- ANSYS-Workbench. Release 18 Theory Guide. (2017).
- Cengel, Y. (2007), Fundamentos de Mecanica de Fluidos. (2ª ed.). Mexico D.F:  
McGraw Hill Education
- Echezuría, R. (2017), “Estudio del flujo compresible en una tobera convergente-divergente utilizando dinámica de fluidos computacional” Tesis de Ingeniería Mecánica. Universidad José Antonio Páez, San Diego.
- Ekanayake E. M. Sudharshani. “Numerical Simulation of a Convergent Divergent Supersonic Nozzle Flow” Tesis de Maestría. Instituto Real de Tecnología de Melbourne, Australia (2013)
- Caraballo, G. (2008), “Diapositivas de Dinámica de Gases” Diapositivas para la materia de Ingeniería Mecánica. Universidad de Carabobo
- Mataix, C. (1998) Mecanica de Fluidos y Maquinas Hidraulicas. (2ª ed.). Madrid: Ediciones del Castillo, S.A.
- Sampieri R., Fernandez C., Baptista P., (2006) “Metodología de la Investigación”. McGraw – Hill
- Shigeru Matsuo et al. (2012). “Effects of Supersonic Nozzle Geometry on Characteristics of Shock Wave Structure” Open Journal of fluid Dynamics
- Tamayo y Tamayo, Mario. El Proceso de la Investigación científica. Editorial Limusa S.A. México.1997.
- Universidad José Antonio Páez. (2007). Normas para Elaboración y Presentación de los Anteproyectos, Proyectos y Trabajos de Grado. San Diego, Carabobo, Venezuela
- U.S. Ramakanth et al. (2013) “Flow Analysis in a Convergent-Divergent Nozzle Using CFD” International Journal of Research in Mechanical Engineering

Vélez, S. Carlos M (2001) Apuntes de metodología de la investigación. Departamento de ciencias básicas Universidad EAFIT, Medellín – Antioquia. [En línea] Disponible en: <https://es.slideshare.net/saratogawild/apuntes-metodologia-investigacin>.

## ANEXOS

### Plano de Tobera Convergente – Divergente



**Figura 69: Plano de Tobera Convergente-Divergente**

Fuente: Prieto (2018)